

AHPの評価構造から見た Belton-Gear の反例に対する解釈

水野 隆文¹・木下 栄蔵²

¹非会員 名城大学准教授 都市情報学部都市情報学科 (〒509-0261 岐阜県可児市虹ヶ丘 4-3-3)
E-mail: tmizuno@meijo-u.ac.jp

²正会員 名城大学教授 都市情報学部都市情報学科 (〒509-0261 岐阜県可児市虹ヶ丘 4-3-3)
E-mail: kinoshit@meijo-u.ac.jp

AHP (Analytical Hierarchy Process) は、複数の代替案の中から適切な代替案を選択するための意思決定手法である。各代替案について、複数の評価基準に注目しそれぞれの評価基準に対する評価値を与え、それら評価値を合成し総合評価値を算出し、順位付けを行う。BeltonとGearは、代替案の集合にある代替案と同じ評価を持つ代替案を追加した際に、AHPの順位付けの結果に、順位逆転が発生する例を提示した。木下らは、このような順位逆転が発生しない新しいAHPとして、支配型AHPを提案した。本研究は、AHPの評価構造に着目し、このBelton-Gearの反例の新しい解釈を提示する。そして、支配型AHPが採用する評価構造においては、そもそもこの問題が発生し得ないことを示す。

Key Words : AHP, Belton-Gear's examples, rank reversal, Dominant AHP

1. はじめに

AHP (Analytical Hierarchy Process) は、複数の代替案の中から適切な代替案を選択するための意思決定手法である。意思決定に際しては、互いに競合しうる複数の代替案による評価が行われる。代替案は最終的に数値として、その総合評価値が提示される。意思決定者は総合評価値が最も高い代替案を採択する。

本稿では、代替案の集合を $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 、評価基準の集合を $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ とする。意思決定において解決すべき目標を T とする。

まず、一対比較法により評価基準の重みを算出する。評価基準のペアを取り出し、ある評価基準からみたときに一方の評価基準が何倍重要かを数値で提示する。これを行列 $R = (r_{ij})$ に配列したものを一対比較行列と呼ぶ。一対比較行列 R の要素 r_{ij} は、目標 T の解決にとって、評価基準 c_j からみて評価基準 c_i が何倍重要なかを意思決定者が数値として提示する。Saatyが提案したAHPではこの一対比較行列の正規化された主固有ベクトルの要素を評価基準の重みとして採用する。この主固有ベクトルを $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ とすると、次の関係がある。

$$Rw = \lambda w$$

評価基準 c_j の重みは $b_j = w_j / \mathbf{1}^T w$ となる。ここで λ は行列 R の最大固有値、また $\mathbf{1}^T = [1, 1, \dots, 1]^T$ である。

次に、評価基準ごとに代替案の評価値を算出する。評価基準 c_j からみた代替案 a_i の評価値を A_{ij} とする。この評価値を代替案すべてについてベクトルの形に配列した

ものを $A_j = [A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}]^T$ とする。評価基準 c_j からみた代替案のペア比較を行い一対比較行列を構成し、この一対比較行列の主固有ベクトルを A_j とする。そして、このように作成したベクトルを正規化し、次のように行列に配列したものを評価行列と呼ぶ。

$$A = \left[\frac{A_1}{\mathbf{1}^T A_1}, \frac{A_2}{\mathbf{1}^T A_2}, \dots, \frac{A_n}{\mathbf{1}^T A_n} \right]$$

最終的な代替案 a_i の総合評価値を E_i とする。 $E = [E_1, E_2, \dots, E_m]^T$ とすると、総合評価値は、次のように合成される。

$$Ab = E$$

ここで、 $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ である。各要素は次のように算出される。

$$E_i = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{\mathbf{1}^T \mathbf{A}_j} b_j$$

AHPは、階層構造における同じ層の要素同士（評価基準同士、代替案同士）の相対的な評価と、それら相対的な評価値の合成から構成される。相対的な評価をコストの高い一対比較により行い、異なる評価基準の間の複雑な評価構造を、行列とベクトルの単純な乗算で代替しているのがAHPの特徴である。

2. Belton-Gearについての反例の解釈

BeltonとGearは、Saatyが提案したAHPについて、ある代替案のコピーを追加した際に、別の代替案とそのコピーと同じ代替案とで、総合評価値の大小が追加前との結果と逆転する例を提示した。追加により、代替案同士の一対比較の評価の相対値は大きく変化しないにもかかわらず、それら合成結果の総合評価値の順位が逆転する。

Belton-Gearの反例についての評価構造を明示するために、代替案 a_o のコピーとなる代替案 a_c を追加することを考える。各評価基準から見た a_o と a_c の評価値は同一であり、 a_o に対する他の代替案の相対値は a_c の追加前と追加後とで変化しないと仮定する。評価行列 A は、代替案 a_c 追加後に次のようになる。

$$A' = \left[\frac{A'_1}{\mathbf{1}^T A'_1 + A_{o1}}, \frac{A'_2}{\mathbf{1}^T A'_2 + A_{o2}}, \dots, \frac{A'_n}{\mathbf{1}^T A'_n + A_{o,n}} \right]$$

ここで、 $A'_j = [A_{1j}, \dots, A_{mj}, A_{oj}]^T$ である。総合評価値は次式となり、

$$A' \mathbf{b} = \mathbf{E}'$$

ある代替案 a_i の総合評価値は次式で表現される。

$$E'_i = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{\mathbf{1}^T A_j + A_{o,j}} b_j$$

ここで、総合評価値 E_i と E'_i を次のように記述し直す。

$$E_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left[\frac{b_j}{\mathbf{1}^T A_j} \right] = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_j$$

$$E'_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left[\frac{b_j}{\mathbf{1}^T A_j + A_{o,j}} \right] = \sum_{j=1}^n A_{ij} B'_j$$

これは、代替案 a_c を追加することにより評価基準 c_j の構造上の重みが $B'_j/B_j = \mathbf{1}^T A_j / (\mathbf{1}^T A_j + A_{o,j})$ 倍に変化することを意味する。これは、代替案から見ると、 a_o が大きな評価値を受ける評価基準ほど、その評価基準からの重みを減らされことを意味する。これが、代替案の追加により総合評価値の大小が逆転する構造的理由である。

3. 支配型AHPの評価構造

木下らは、このような総合評価値の逆転を避ける意思決定手法として、支配型AHPを提案した。支配型AHPは、評価行列の各列を、ある代替案 a_d で正規化することが特徴である。

$$A^d = \left[\frac{A_1}{A_{d1}}, \frac{A_2}{A_{d2}}, \dots, \frac{A_n}{A_{dn}} \right]$$

評価基準の重み $\mathbf{b}^d = [b_1^d, b_2^d, \dots, b_n^d]^T$ は、この代替案 a_d の総合評価値が1となるように決定される。支配型AHPでは、ある代替案 a_i の総合評価値は次と同値になる。

$$E_i^d = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{A_{dj}} b_j^d = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left[\frac{b_j^d}{A_{dj}} \right]$$

SaatyのAHPと異なり、支配型AHPでは、評価基準 c_j から見た評価構造は代替案 a_d の評価値 A_{dj} にのみ依存している。ここには、前述のような、代替案の追加により変化する、すべての代替案の総合評価値の算出に影響する評価構造は存在しない。

参考文献

- 1) Saaty, T.L. : The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, 1980.
- 2) Belton, V., Gear, T. : On a shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies, OMEGA The International Management Science, Vol.11, No.3, pp.228-236, 1983.
- 3) 木下栄蔵, 中西昌武 : AHPにおける新しい視点の提案, 土木学会論文集 IV, pp.1-8, 1997.

(2016. 7. 29 受付)

AN INTERPRETATION FOR COUNTEREXAMPLES OF BELTON AND GEAR ON EVALUATION STRUCTURES OF AHP

Takafumi MIZUNO and Eizo KINOSHITA

AHP (Analytic Hierarchy Process) is a decision making method. The method select the best alternative from a set of alternatives proposed by Saaty. Belton and Gear show rankreversal examples of Saaty's method. Kinoshita and Nakanishi provide Dominant AHP which improve the Saaty's method to overcome Belton-Gear's counterexamples. This article describe that an evaluation structure of Saaty's method causes Belton-Gear's examples, and the rank reversal problems cannot occur on Dominant AHP.