

一般ネットワークにおける 最適ランプ制御パターンの導出とその考察

森部伸一¹・和田健太郎²・大口敬³

¹非会員 東京大学大学院工学系研究科 修士課程 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: moribe@iis.u-tokyo.ac.jp

²正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

³フェロー会員 東京大学教授 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: takog@iis.u-tokyo.ac.jp

高速道路の渋滞緩和のための交通施策としてランプメタリングが挙げられるが、多くの手法はローカルな制御手法であり、個々のランプメタリングがネットワーク全体に与える影響についての知見は十分に蓄積されていない。本研究では、高速道路本線上で渋滞が発生しないという条件のもとで、総旅行時間最小化問題を定式化する。そして、多起点1終点ネットワークにおいて、その最適性の必要十分条件を求め、理想的なランプ制御ルールを明らかにする。最後に、シンプルなネットワークで数値計算を行うことでこの制御ルールの性質を考察する。

Key Words : ramp metering, network flow optimization, equilibrium condition

1. はじめに

現在建設中の首都圏三環状道路は今後数年のうちに概成し、首都圏の交通に大きな役割を果たすことが期待されている。このような面的な広がりを持つネットワークを最大限に活用するために、道路を賢く使う交通施策が必要とされており、このような施策として戦略的な料金体系の導入が検討されている。混雑状況に応じた料金施策を行うことによって、環状道路等の有効活用を図ることが期待されている。しかし、このようなロードプライシングの欠点としては、利用者の行動を直接的に制御できない点や、迂回距離が長く、実質的に選択肢が最短経路しかないような OD ペアの交通を制御することが難しいという点が挙げられる。そのため、ロードプライシング以外にも道路を賢く使う交通施策を導入することで、より効率的なインフラ活用を促進できると考えられる。

このような現状を踏まえて本研究では、OD ペアに関わらず直接的に高速道路本線への流入を制限することができるランプメタリングに着目する。一般的に、ランプメタリングの効果としては、高速道路本線への流入を抑制し渋滞を緩和させることや、車群による本線への流入を防ぎ合流を円滑化することが期待されている。そして現在では、多くのランプメタリングの手法が開発され、それらが実際に導入され渋滞を緩和している。また理論的にも、単純なネットワークにおいてラ

ンプメタリングの効果は明らかにされている^{1),2)}。しかし、最も普及している ALINEA³⁾ などをはじめ、多くのランプメタリングは局所的な制御であり、個々のランプメタリングがネットワーク全体にどのような影響を与えるかについての知見は十分に蓄積されていない。しかし、首都圏三環状道路のような複雑なネットワークにおいて、複数のボトルネックを効率的に活用するためには、個々のランプが協調して交通を制御するようなエリアランプ制御が適していると考えられる。

そこで本研究では、首都圏三環状道路でのランプメタリングの効果を定量的に評価する研究の一環として、最適ランプ制御パターンの性質を明らかにする。具体的には、多起点多終点の一般的なネットワークにおいて、高速道路本線で渋滞が発生しないという条件のもとで、総旅行時間最小化問題を定式化する。そして、その最適性の必要十分条件を求め、理想的なランプ制御ルールの性質を明らかにする。最後に、シンプルなネットワークで数値計算を行うことでこの制御パターンの性質を考察する。

本論文の構成は以下の通りである。まず、次の第2章では、状況設定と本研究が目的とする最適状態について述べる。第3章では、最適流入パターンを求めるための総旅行時間最小化問題を定式化し、第4章では、その最小化問題のクーンタッカー条件を求めることで、理想的なランプ制御ルールを明らかにする。第5章では、シンプルなネットワークで数値計算を行うことで

この制御ルールの性質を考察する。第 6 章では、本研究のまとめと今後の課題を示す。

2. 状況設定と目標とする最適状態

(1) 対象とするネットワーク

まず対象とするネットワークの概要を述べる。本研究では、多起点多終点の一般的なネットワークにおける動的な交通流を考える。まず、ネットワークを構成する集合については、ネットワークにおけるノードの集合を N 、有効リンクの集合を L 、需要が発生する起点の集合を O 、トリップが終了する終点の集合を D 、OD ペアの集合を W と定義する。一方、ネットワークを構成するそれぞれの要素に関しては、ノードを i 、リンクを上流側ノード i と下流側ノード j によって ij 、起点を o 、終点を d と記す。またランプメタリングを想定する時間 $[0, T]$ は十分に長い時間であると仮定する。

(2) 目的とする最適状態

本研究では、首都圏三環状道路のような複雑なネットワークでランプメタリングを導入した場合、どこまで高速道路上で総旅行時間を減らすことができるのかというベンチマークを求めるために、総旅行時間最小化問題を作成する。具体的には、高速道路本線上で渋滞が発生しないという条件のもとで、流入パターンと経路配分パターンを制御変数として、総旅行時間（ランプでの総待ち時間と高速道路本線での総走行時間の和）を最小化する。

最適状態では、高速道路本線では渋滞が発生しない条件を仮定しているため、道路管理者が利用者の経路を配分すると考えることができる。一方で、これはある種の最適施策の下での利用者の行動パターンとみなすこともできる。例えば、赤松⁴⁾が提唱するようなボトルネック通行権が導入されているときの利用者均衡とみなすことができる。なお、赤松⁴⁾では、利用者による出発時刻選択も考慮されているが、本研究ではランプに到着する時刻は所与とし、ランプでの待ち行列が生じる。そのため、本研究における均衡状態は、ボトルネック通行権取引制度導入時の均衡状態とは異なるはずであると考えられる。

3. 最適化問題の定式化

本章では、前章で議論した状態を達成する際の最適ランプ制御問題の定式化をする。また、定式化の際に、車両や時間を連続量として扱う。

(1) 目的関数

まず、ランプでの総待ち時間と高速道路本線での総走行時間の和である総旅行時間を最小化する最適化問題の目的関数を定める。この問題では、高速道路本線流入パターンと高速道路上での経路配分パターンが制御変数となる。

ある OD ペアのランプでの総待ち時間はランプの到着累積曲線と出発累積曲線に囲まれる面積に等しいので、時刻 t にランプに到着する OD ペア od の交通流率 $q^{od}(t)$ と時刻 t にランプから出発する OD ペア od の交通流率 $r^{od}(t)$ を用いて式 (1) のように示すことができる。

$$\int_0^T \int_0^t (q^{od}(s) - r^{od}(s)) ds dt \quad (1)$$

また、前章で述べたように高速道路本線上で渋滞が発生しないという条件を仮定しているため、高速道路本線上のリンク ij の旅行時間を自由旅行時間 t_{ij} と定めることができ、総走行時間は

$$\sum_{ij \in L} \int_0^T \left(\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) \cdot t_{ij} \right) dt \quad (2)$$

となる。ここで、 $y_{ij}^d(t)$ は終点 d とする車両の時刻 t にリンク ij に流入する終点別交通流率であり、本研究ではそれぞれのリンクに対して終点別交通流率を用いて定式化する。

式 (1) と式 (2) より、目的関数を式 (3) のように定めることができる。

$$\min_{(\mathbf{r}, \mathbf{y}) \geq 0} F(\mathbf{r}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{od \in W} \int_0^T \int_0^t (q^{od}(s) - r^{od}(s)) ds dt + \sum_{ij \in L} \int_0^T \left(\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) \cdot t_{ij} \right) dt \quad (3)$$

(2) 制約条件

a) ノードでのフロー保存条件

ネットワークにおけるフロー保存条件は、任意のノード i における流入交通量と流出交通量が等しいことを用いて表すことができる。しかし、終点に関しては到着する時刻が与えられていないため終点ノードでのフロー保存則を作成することは不可能である。そこで本研究では、終点別交通ごとに、必ずその終点に到着するようなネットワーク上でフロー保存則を考えることで終点でのフロー保存則を省略できるようにした。必ずある終点に到着するようなネットワークは、その終点にたどり着くことのできないノードとそのノードを下流側ノードとして持つリンクを抜くことで作成することができる。

また、自由流を仮定したとき、終点を d とする車両の時刻 t にリンク ij から流出する終点別交通流率は、時刻 $t - t_{ij}$ にリンク ij に流入する終点別交通流率に等し

いので

$$y_{ij}^d(t - t_{ij}) \quad (4)$$

と表すことができ、このとき、ノードでのフロー保存則は、

$$\sum_{k \in NO(i)} y_{ik}^d(t) - \sum_{l \in NI(i)} y_{li}^d(t - t_{li}) = r^{od}(t) \delta_{oi} \quad \forall d, \forall t, \forall i \quad (5)$$

が成立することである。ここで、 δ_{oi} は $i = o$ なら 1、それ以外は 0 となる kronecker のデルタ、 $NO(i)$ はノード i から流出するリンクの下流側ノードの集合、 $NI(i)$ はノード i に流入するリンクの上流側ノードの集合である。

b) 需要保存則

任意の OD ペアに関して、ランプ到着台数とランプ出発台数が等しくならなければ、所与とされる交通需要が捌けないので、需要保存則として式 (6) が成立する必要がある。

$$\int_0^T q^{od}(t) dt - \int_0^T r^{od}(t) dt = 0 \quad \forall o, \forall d \quad (6)$$

c) 容量制約

高速道路本線上で渋滞が発生しないという条件を仮定するので、任意のリンクへの流入率は交通容量以下でなければいけない。このような容量制約は、式 (7) で表すことができる。

$$\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) - \mu_{ij} \leq 0 \quad \forall t, \forall ij \quad (7)$$

ここで、 μ_{ij} はリンク ij の交通容量である。

d) ランプでの制約

ある OD ペアについて考えると、ある時刻 t までにランプから出発できずに、ランプで待っている車両の累積数は、

$$\int_0^{t-dt} q^{od}(s) ds - \int_0^{t-dt} r^{od}(s) ds \quad (8)$$

であり、時刻 t にランプで待っている車両とランプに進入してくる $q^{od}(t)$ の和よりも多くの車両をランプから出発させることはできない。この制約は以下の式 (9) ように表すことができる。

$$\begin{aligned} r^{od}(t) &\leq \int_0^{t-dt} q^{od}(s) ds - \int_0^{t-dt} r^{od}(s) ds + q^{od}(t) \\ \Leftrightarrow \int_0^t r^{od}(s) ds - \int_0^t q^{od}(s) ds &\leq 0 \end{aligned} \quad \forall o, \forall d, \forall t \quad (9)$$

e) First-In-First-Out 条件

上記の制約条件のみでは、ランプでの追越が可能となり、ランプ到着した時間に関わらず車両が出発するという現象が生じてしまう。ランプでの車両の追越がない交通モデルを実現するには、First-In-First-Out(FIFO) 条件が成立する必要がある。

時刻 t において起点 o となるランプから終点 d に向かう終点別累積流入台数を $Q^{od}(t)$ 、終点別累積流出台数を $R^{od}(t)$ 、時刻 t に起点 o となるランプに流入した車両が流出するまでに要する時間を $t_o(t)$ と書くと以下の式 (10) が成り立つ必要がある。

$$Q^{od}(t) = R^{od}(t + t_o(t)) \quad (10)$$

交通流率を用いた表現では、

$$q^{od}(t) = r^{od}(t + t_o(t)) \cdot (1 + dt_o(t))/dt \quad (11)$$

と書ける。この式は、FIFO 原則の下では、時刻 t の全体の流入率に対する終点を d とするの車両の流入率の比と、時刻 $t + t_o(t)$ の全体の流出率に対する終点を d とする車両の流出率の比は終点に寄らず等しいこと示している。すなわち、

$$\frac{q^{od}(t)}{\sum_{d \in D} q^{od}(t)} = \frac{r^{od}(t + t_o(t))}{\sum_{d \in D} r^{od}(t + t_o(t))} \quad (12)$$

という関係式の成立も意味している。

しかし、流入パターンを変数とした総旅行時間最小化問題において、 $t_o(t)$ は制御変数 r^{od} によって決まるため、式 (12) を制約条件とすると問題が困難になる。そのため本研究では、次のように FIFO 条件を考慮する。ランプに流入した車両が流出するまでに要する時間 $t_o(t)$ を定数 τ とおくことで、車両の追越現象に関して制約を設ける。

$$\frac{q^{od}(t)}{\sum_{d \in D} q^{od}(t)} = \frac{r^{od}(t + \tau)}{\sum_{d \in D} r^{od}(t + \tau)} \quad \forall o, \forall d, \forall t \quad (13)$$

あるいは、変形すると

$$q^{od}(t) \cdot \sum_{d \in D} r^{od}(t + \tau) = r^{od}(t + \tau) \cdot \sum_{d \in D} q^{od}(t) \quad \forall o, \forall d, \forall t \quad (14)$$

となる。これは、時刻 $t + t_o(t)$ にランプから出発する車両を考えたとき、時刻 t と $t + t_o(t) - \tau$ の需要の終点別の割合が等しければ FIFO 条件が満たされることになる。そのため、あるランプでの総需要に対する終点別需要の割合が滑らかに変動すれば近似的に FIFO 条件を満たすことができると考えられる。

(3) 最適化問題

上記の目的関数と制約条件を用いると、最適化問題は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{r}, \mathbf{y}) \geq 0} F(\mathbf{r}, \mathbf{y}) &\equiv \sum_{od \in W} \int_0^T \int_0^t (q^{od}(s) - r^{od}(s)) ds dt \\ &+ \sum_{ij \in L} \int_0^T \left(\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) \cdot t_{ij} \right) dt \end{aligned} \quad (3)$$

subject to

$$\sum_{k \in NO(i)} y_{ik}^d(t) - \sum_{l \in NI(i)} y_{li}^d(t - t_{li}) = r^{od}(t) \delta_{oi} \quad \forall d, \forall t, \forall i \quad (5)$$

$$\int_0^T q^{od}(t) dt - \int_0^T r^{od}(t) dt = 0 \quad \forall o, \forall d \quad (6)$$

$$q^{od}(t) \cdot \sum_{d \in D} r^{od}(t + \tau) = r^{od}(t + \tau) \cdot \sum_{d \in D} q^{od}(t) \quad \forall o, \forall d, \forall t \quad (14)$$

$$\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) - \mu_{ij} \leq 0 \quad \forall t, \forall ij \quad (7)$$

$$\int_0^t r^{od}(s) ds - \int_0^t q^{od}(s) ds \leq 0 \quad \forall o, \forall d, \forall t \quad (9)$$

4. 最適性の必要十分条件

本章では多起点 1 終点ネットワークにおける最適化問題のクーンタッカー条件を求めることで、最適制御の必要十分条件を求める(多起点多終点ネットワークについては、付録 I 参照)。多起点 1 終点ネットワークでは終点 d を区別する必要がないので、 $y_{ij}^d(t)$, $q^{od}(t)$, $r^{od}(t)$ から添え字 d を抜き、 $y_{ij}(t)$, $q^o(t)$, $r^o(t)$ と表す。終点が一つの場合、FIFO 条件は考慮する必要はないので Lagrangean 関数 L を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}, \mathbf{w}) & \\ \equiv \sum_{o \in O} \int_0^T \int_0^t (q^o(s) - r^o(s)) ds dt & \\ + \sum_{ij \in L} \int_0^T (y_{ij}(t) \cdot t_{ij}) dt & \\ + \sum_{i \in N} \int_0^T \left\{ \pi_i(t) \left(r^o(t) \delta_{oi} - \sum_k y_{ik}(t) \right. \right. & \\ \left. \left. + \sum_l y_{li}(t - t_{li}) \right) \right\} dt & \\ + \sum_{o \in O} \rho^o \left(\int_0^T q^o(t) dt - \int_0^T r^o(t) dt \right) & \\ + \sum_{ij \in L} \int_0^T p_{ij}(t) (y_{ij}(t) - \mu_{ij}) dt & \\ + \sum_{o \in O} \int_0^T w^o(t) \left(\int_0^t r^o(s) ds - \int_0^t q^o(s) ds \right) dt & \quad (15) \end{aligned}$$

この問題の最適性条件は、以下の Kuhn-Tucker 条件で与えられる。

$$\begin{cases} \partial L / \partial r^{*o}(t) = 0 & \text{if } r^{*o}(t) > 0 \\ \partial L / \partial r^{*o}(t) \geq 0 & \text{if } r^{*o}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall o, \forall t \quad (16)$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial y_{ij}^*(t) = 0 & \text{if } y_{ij}^*(t) > 0 \\ \partial L / \partial y_{ij}^*(t) \geq 0 & \text{if } y_{ij}^*(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t, \forall ij \quad (17)$$

$$\partial L / \partial \pi_i^*(t) = 0 \quad \forall t, \forall i \quad (18)$$

$$\partial L / \partial \rho^{*o} = 0 \quad \forall o \quad (19)$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial p_{ij}^*(t) = 0 & \text{if } p_{ij}^*(t) > 0 \\ \partial L / \partial p_{ij}^*(t) \leq 0 & \text{if } p_{ij}^*(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t, \forall ij \quad (20)$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial w^{*o}(t) = 0 & \text{if } w^{*o}(t) > 0 \\ \partial L / \partial w^{*o}(t) \leq 0 & \text{if } w^{*o}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall o, \forall t \quad (21)$$

条件 (16) と条件 (17) を具体的に調べるために Lagrangean の偏微分を具体的に計算する。まず、Lagrangean 関数 L を $y_{ij}^*(t)$ で微分すると、

$$\partial L / \partial y_{ij}^*(t) = t_{ij} - \pi_i(t) + \pi_j(t + t_{ij}) + p_{ij}(t) \quad (22)$$

となり、条件 (17) に代入すると、

$$\begin{cases} t_{ij} + p_{ij}(t) + \pi_j(t + t_{ij}) = \pi_i(t) & \text{if } y_{ij}^*(t) > 0 \\ t_{ij} + p_{ij}(t) + \pi_j(t + t_{ij}) \geq \pi_i(t) & \text{if } y_{ij}^*(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t, \forall ij \quad (23)$$

となる。ここで、 $p_{ij}(t)$ は条件 (20) より交通流率が容量と等しいときに正になるため、リンク容量 1 単位あたりの潜在価格である。これを均衡リンク通行権価格とすると、旅行時間 t_{ij} と $p_{ij}(t)$ の和はそのリンクを通行するのに必要な交通費用と言える。また、 $\pi_i(t)$ を時刻 t にノード i を出発する利用者が終点までに費やす最小費用と考えると、ノード i から終点までの最小費用とノード j から終点までの最小費用の差がリンク交通費用と等しければ、リンク交通流率が正になるということが説明できる。

次に、Lagrangean 関数 L を $r^{*o}(t)$ で微分すると、

$$\partial L / \partial r^{*o}(t) = -(T - t) + \pi_o(t) - \rho^o + \int_t^T w^o(s) ds \quad (24)$$

となり、条件 (16) に代入すると、

$$\begin{cases} \pi_o(t) + \int_t^T (w^o(s) - 1) ds = \rho^o & \text{if } r^{*o}(t) > 0 \\ \pi_o(t) + \int_t^T (w^o(s) - 1) ds \geq \rho^o & \text{if } r^{*o}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall o, \forall t \quad (25)$$

となる。ここで、 $w^o(t)$ は条件 (21) より待ち行列の発生していないときに正になるものである。容量制約と同様に考えると、渋滞が発生していないときは到着累積台数を使い切っているというように解釈でき、到着台数 1 台当たりの潜在価値と言える。そのため、 $w^o(t)$ は時刻 t に累積台数を 1 台増やしたときの目的関数の減少分として理解することができる。条件 (25) を解釈するために、次の図-1 ような累積曲線を用いてランプ制御に関わる条件 (25) を書き下す。また、ランプ制御を行う時間を $[0, T]$ とする。

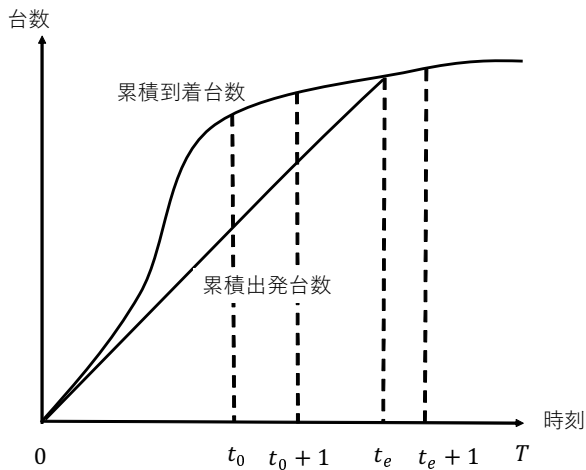


図-1 ある累積曲線

時刻 t_e で渋滞が発生しているため、時刻 0 からそれまでの $w^o(t)$ の値は 0 である。そのため、時刻 t_0 , $t_0 + 1$, t_e と $t_e + 1$ で以下の均衡条件が成立していると考えられる。

$$\pi_o(t_0) - (t_e - t_0) + \int_{t_e}^T (w^o(s) - 1) ds = \rho^o \quad (26)$$

$$\pi_o(t_0 + 1) - (t_e - t_0 + 1) + \int_{t_e}^T (w^o(s) - 1) ds = \rho^o \quad (27)$$

$$\pi_o(t_e) + \int_{t_e}^T (w^o(s) - 1) ds = \rho^o \quad (28)$$

$$\pi_o(t_e + 1) + \int_{t_e + 1}^T (w^o(s) - 1) ds = \rho^o \quad (29)$$

さらに、式 (26) と式 (27) より

$$\int_{t_0 + 1}^T (w^o(s) - 1) ds - \int_{t_0}^T (w^o(s) - 1) ds = 1 \quad (30)$$

となる。桑原⁵⁾によると、ボトルネック容量がいっぱいに使われている状態では、社会的余剰を最大にする際、時刻 t に需要を 1 台追加することで生じる限界費用はそれ以降の渋滞継続時間に依存する。そのため動的な限界費用は 1 時間帯ごとに 1 減少する。一方で、式 (30) において $\int_t^T (w^o(s) - 1) ds$ は 1 時間帯ごとに 1 上昇している。このことから、時刻 t に累積台数を 1 台増やしたときの限界費用の減少分と捉えることができる。また、式 (28) と式 (29) より

$$\pi_o(t_e + 1) = \pi_o(t_e) + w^o(t_e) - 1 \quad (31)$$

が得られ、渋滞していない場合は、時刻 $t_e + 1$ における利用者の最小費用 $\pi_o(t_e + 1)$ が、時刻 t_e における利用者の最小費用 $\pi_o(t_e)$ と到着台数 1 台当たりの価値 $w^o(t_e)$ と車両を早く出発することによる目的関数の減少分 -1 の和と等しければ、時刻 $t_e + 1$ に車両を出発させるということが説明できる。

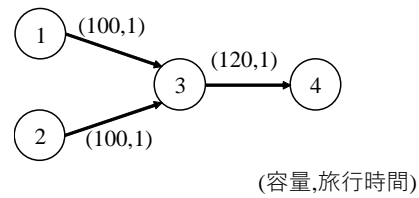


図-2 対象とする 2 起点 1 終点ネットワーク

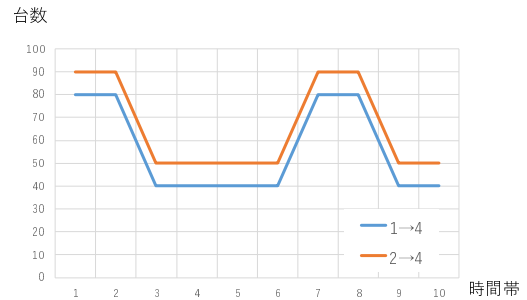


図-3 OD ペア別需要

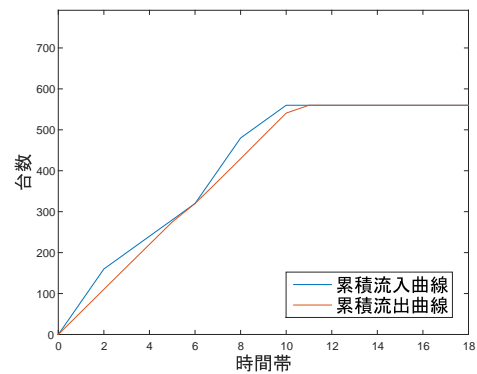


図-4 起点 1 における累積曲線

5. 数値計算

本章では、定式化した最適化問題の性質を数値計算により示す。以下では、時間を離散化して数値計算を行う。

(1) 多起点 1 終点ネットワークにおける均衡状態

ここでは、第 4 章で述べた多起点 1 終点ネットワークにおける均衡状態の Lagrange 乗数の値を計算することで、ランプ制御に関わる均衡状態の性質を調べる。図-2 のような 2 起点 1 終点ネットワークを用いる。リンク容量とリンク旅行時間は図-2 に示した通りであり、需要は図-3 のように与える。これらを所与として総旅行時間最小化問題を解くと起点 1 における累積流出曲線は図-4 のようになる。ここで、起点 1 において、式 (25) の左辺が時間帯別にどのように変化しているのかを求

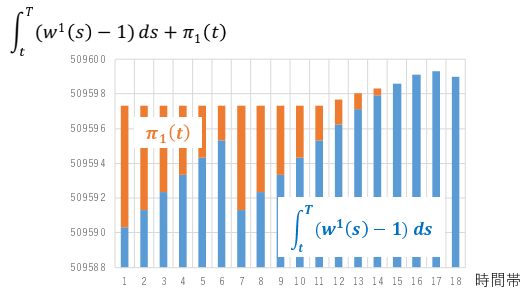


図-5 起点 1 でのランプ制御に関する均衡状態

めると図-5 のようになった。 $\pi_o(t)$ と $\int_t^T (w^o(s) - 1) ds$ の和が、車両が出発しない時間帯 12 以降は大きくなり、均衡費用 ρ^o と釣り合わなくなることが確認できた。また、最適ランプ制御パターンでは、両ランプで 2 回渋滞が発生しており、それぞれの渋滞においてランプから出発する時間帯が早いほど、利用者の高速道路本線上での最小費用 $\pi_o(t)$ は高くなるということが確認できた。この最適ランプ制御において、高速道路本線上では自由流を仮定しているので、最小費用 $\pi_o(t)$ の差は通行権価格によって生じるものであり、ランプから出発する時間が早いほど総通行権価格が高くなるということもわかる。

また、どのランプから車両を出すかについては、Zhang ら⁶⁾ が述べているように、経路選択がない多起点 1 終点ネットワークで渋滞を起こさずランプ制御を行う際は、どのランプから車両を出すかに関わらず終点で一定の累積到着曲線が達成されれば総旅行時間が最小化される。そのため、この数値実験においても総旅行時間を最小化する流入制御パターンの解は複数存在する。このような場合は、最適解の中でランプ毎の待ち時間に不公平が生じないように制御を検討することも可能である。

(2) FIFO 条件の近似による影響

多起点多終点ネットワークでの適用に向けて、近似的 FIFO 条件である式 (14) が及ぼす影響を、次の図-6 のような 1 起点 2 終点ネットワークを用いて記述する。リンク容量とリンク旅行時間は図-6 に示した通りである。

a) ランプ旅行時間の定数値による影響

OD ペア別需要を図-7 のように与えた際、ランプ待ち時間の定数化によって生じる、式 (14) の定数 τ が FIFO

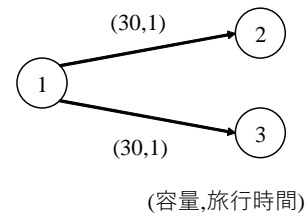


図-6 対象とする 1 起点 2 終点ネットワーク

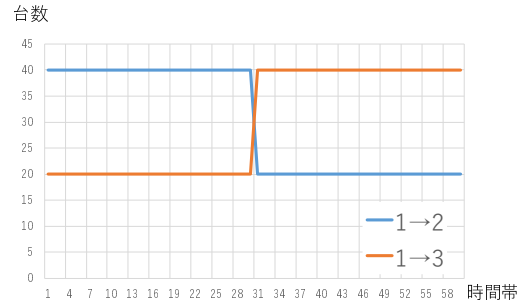


図-7 OD ペア別需要

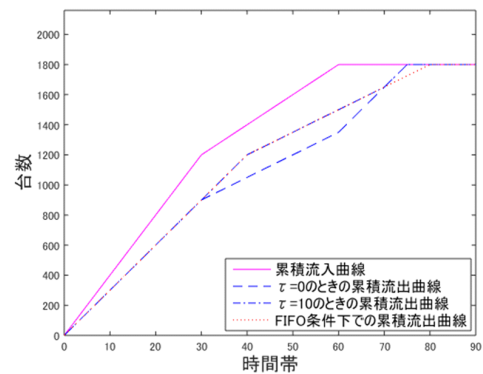


図-8 OD ペア 12 の累積曲線

条件にどのような影響を及ぼすのかを調べる。図-7 のような需要を与えた場合、FIFO 条件が満たされているのであれば $t = 1$ から $t = 30$ までに到着した車両がランプから出発するまで ($t = 40$) は終点別に一定の割合 (2 : 1) で出発し、その後 $t = 30$ から $t = 60$ に到着した車両がランプでの渋滞がなくなるまで ($t = 80$) 終点別に一定の割合 (1 : 2) で出発していくと考えられる。そこで $\tau = 0$ とした場合と $\tau = 10$ とした場合で最適化された累積流出曲線がどのようになるかを計算すると、終点別の累積曲線は図-8 と図-9 のようになる。 $\tau = 10$ の方が FIFO 条件を満たした状態に近いということが確認できるように、 τ の設定が FIFO 条件を満たした状態に近い交通流を再現するためには重要であるということが確認できた。しかし、 τ をどのように設定するかについては、検討できておらず今後の課題である。

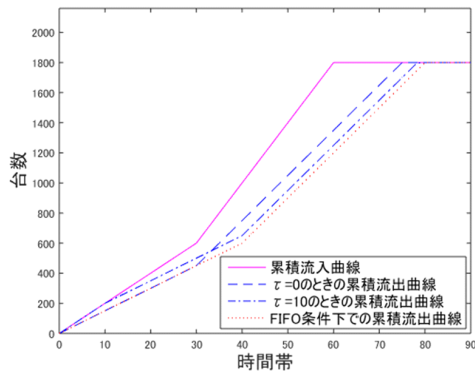


図-9 OD ペア 13 の累積曲線

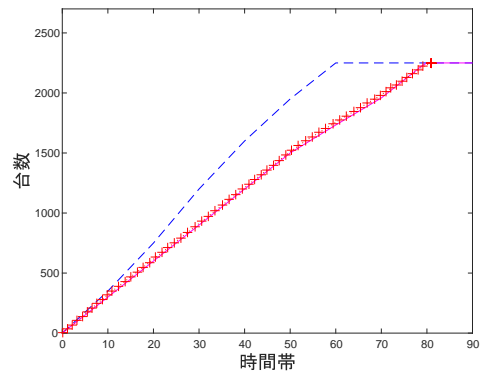


図-11 OD ペア 12 の累積曲線

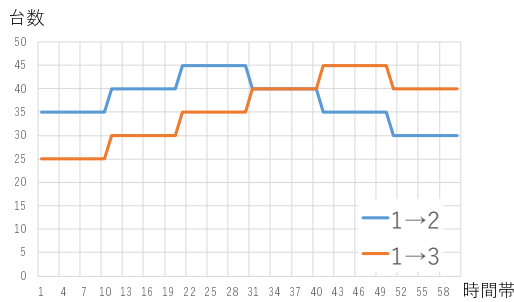


図-10 OD ペア別需要

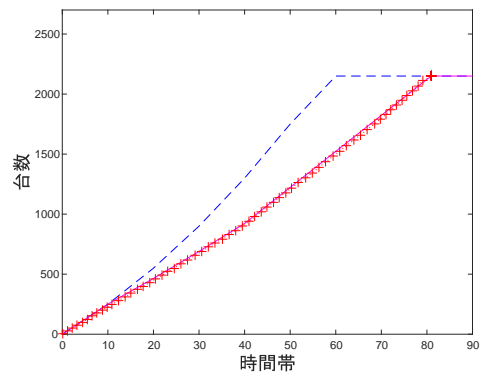


図-12 OD ペア 13 の累積曲線

b) 需要の比が細かく変動した際の FIFO 条件の近似

需要の比が細かく変動したとき FIFO 条件がどれくらい満たされるのかを確認する。OD ペア別需要を図-10, τ を 10 とした場合, 終点別の累積曲線は図-11 と図-12 のようになる。破線は累積流入曲線, 実線は累積流出曲線を示している。また, 十字マークは終点をまとめた累積図から得られるランプでの待ち時間が, 各 OD ペアの待ち時間となった場合の累積流出曲線である。

もし FIFO 条件が成立しているのであれば, 全ての時刻において, 終点をまとめた累積曲線から求めた待ち時間と, 終点別の累積曲線から求めた待ち時間が等しくなければならないため, グラフにおける実線と十字マークが一致しなければいけない。この場合は, 実線と十字マークがほぼ一致しているのので, FIFO 条件を満たした状態に近いということが確認できる。このように, 総需要に対する終点別需要の比率が少しずつ変動する場合は, 式 (14) を用いても FIFO 条件を満たした状態に近い交通状態を達成できる可能性があることが確認できた。

6. まとめ

本研究では, 一般ネットワークにおける流入パターン最適化問題を定式化し, 多起点 1 終点ネットワーク

におけるクーンタッカー条件を求めることで, 最適性の必要十分条件を導出した。しかし, 多起点多終点ネットワークにおける最適性条件については (付録 I 参照), まだ均衡状態の解釈が十分にできておらず, 今後の理論的な課題である。また, 本研究では, 単純なネットワークにおいて数値計算を行うことで, ランプの制御に関わる均衡状態の性質や FIFO 条件の近似による影響を確認した。

以上のように本研究では, 総旅行時間の最小化によって求まる理想的な流入パターンについて議論したが, まだ首都圏三環状道路のような大規模ネットワークにおける数値計算はできていない。大規模ネットワークにおける最適エリアランプ制御のパターンを分析することが直近の目標であり, 研究発表会では大規模ネットワークにおける最適エリアランプ制御パターンについても議論したいと考えている。また, エリアランプ制御を実社会で適用するには解決すべき課題が依然として数多くある。特に, 日々変動する需要やランプでの待ち行列延伸による一般道への影響などを考慮して現実的なランプ制御手法を作成することが重要であり, それらを考慮した現実的な制御法を検討することが今後の課題である。

付録 I 多起点多終点ネットワークにおける最適性の必要十分条件

ここでは、多起点多終点ネットワークにおける最適性の必要十分条件を求める。第 4 章と同様に、Lagrangean 関数 L を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
 & L(\mathbf{r}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{p}, \mathbf{w}) \\
 \equiv & \sum_{od \in W} \int_0^T \int_0^t (q^{od}(s) - r^{od}(s)) ds dt \\
 & + \sum_{ij \in L} \int_0^T \left(\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) \cdot t_{ij} \right) dt \\
 & + \sum_{d \in D} \sum_{i \in N} \int_0^T \left\{ \pi_i^d(t) \left(r^{od}(t) \delta_{oi} - \sum_k y_{ik}^d(t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_l y_{il}^d(t - t_{li}) \right) \right\} dt \\
 & + \sum_{od \in W} \rho^{od} \left(\int_0^T q^{od}(t) dt - \int_0^T r^{od}(t) dt \right) \\
 & + \sum_{od \in W} \int_0^T \left\{ \phi^{od}(t) \left(r^{od}(t + \tau) \cdot \sum_{d \in D} q^{od}(t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - q^{od}(t) \cdot \sum_{d \in D} r^{od}(t + \tau) \right) \right\} dt \\
 & + \sum_{ij \in L} \int_0^T p_{ij}(t) \left(\sum_{d \in D} y_{ij}^d(t) - \mu_{ij} \right) dt \\
 & + \sum_{od \in W} \int_0^T w^{od}(t) \left(\int_0^t r^{od}(s) ds - \int_0^t q^{od}(s) ds \right) dt
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

この問題の最適性条件は、以下の Kuhn-Tucker 条件で与えられる。

$$\begin{cases} \partial L / \partial r^{*od}(t) = 0 & \text{if } r^{*od}(t) > 0 \\ \partial L / \partial r^{*od}(t) \geq 0 & \text{if } r^{*od}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall o, \forall d, \forall t \tag{I.2}$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial y_{ij}^{*d}(t) = 0 & \text{if } y_{ij}^{*d}(t) > 0 \\ \partial L / \partial y_{ij}^{*d}(t) \geq 0 & \text{if } y_{ij}^{*d}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall d, \forall t, \forall ij \tag{I.3}$$

$$\partial L / \partial \pi_i^{*d}(t) = 0 \quad \forall d, \forall t, \forall i \tag{I.4}$$

$$\partial L / \partial \rho^{*od} = 0 \quad \forall o, \forall d \tag{I.5}$$

$$\partial L / \partial \phi^{*od}(t) = 0 \quad \forall o, \forall d, \forall t \tag{I.6}$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial p_{ij}^{*}(t) = 0 & \text{if } p_{ij}^{*}(t) > 0 \\ \partial L / \partial p_{ij}^{*}(t) \leq 0 & \text{if } p_{ij}^{*}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t, \forall ij \tag{I.7}$$

$$\begin{cases} \partial L / \partial w^{*od}(t) = 0 & \text{if } w^{*od}(t) > 0 \\ \partial L / \partial w^{*od}(t) \leq 0 & \text{if } w^{*od}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall o, \forall d, \forall t \tag{I.8}$$

条件 (I.2) と (I.3) を具体的に調べるために Lagrangean の偏微分を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}
 \partial L / \partial r^{*od}(t) &= \pi_o^d(t) - \rho^{od} + \int_t^T (w^{od}(s) - 1) ds \\
 &+ \phi^{od}(t - \tau) \cdot \sum_{d \in D} q^{od}(t - \tau) \\
 &- \sum_{d \in D} \{ \phi^{od}(t - \tau) \cdot q^{od}(t - \tau) \} \tag{I.9}
 \end{aligned}$$

$$\partial L / \partial y_{ij}^{*d}(t) = t_{ij} - \pi_i^d(t) + \pi_j^d(t + t_{ij}) + p_{ij}(t) \tag{I.10}$$

となる。式 (I.10) については、多起点 1 終点ネットワークと同一の条件に帰着する。一方で、式 (I.9) については、FIFO 条件による Lagrange 乗数 $\phi^{od}(t)$ が均衡条件に追加されるため、均衡状態は異なると考えられる。しかし、 $\phi^{od}(t)$ に関する均衡状態の解釈は十分にできておらず、今後に残された理論的課題である。

参考文献

- 1) Papageorgiou M and Kotsialos A (2000), "Freeway ramp metering: an overview", In Intelligent Transportation Systems, 2000. Proceedings. 2000 IEEE. , pp. 228-239.
- 2) Cassidy M (2003), "Freeway On-Ramp Metering, Delay Savings, and Diverge Bottleneck", Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. Vol. 1856, pp. 1-5.
- 3) Papageorgiou M, Hadj-Salem H and Blosseville J-M (1991), "ALINEA: A local feedback control law for on-ramp metering", Transportation Research Record. (1320)
- 4) 赤松 隆 (2007), "一般ネットワークにおけるボトルネック通行権取引制度", 土木学会論文集 D. Vol. 63(3), pp. 287-301.
- 5) 桑原 雅夫 (2002), "動的な限界費用に関する理論的分析", 土木学会論文集. Vol. 2002(709), pp. 127-138.
- 6) Zhang H and Shen W (2010), "Access control policies without inside queues: Their properties and public policy implications", Transportation Research Part B: Methodological . Vol. 44(89), pp. 1132 - 1147.

(2016. X. XX 受付)