

# 道路ネットワークの被災を考慮した 確率的利用者均衡配分モデル

峪龍一<sup>1</sup>・加藤哲平<sup>2</sup>・内田賢悦<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 北海道大学大学院 工学院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

E-mail:ryuichitani@eis.hokudai.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 北海道大学大学院 工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

E-mail:ieppet@eis.hokudai.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 北海道大学大学院 工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

E-mail:uchida@eis.hokudai.ac.jp

本研究では、道路ネットワークの被災を考慮可能とする確率的利用者均衡配分モデルを提案する。提案するモデルでは、確率的交通需要と確率的交通容量がそれぞれ対数正規分布に従うものとする。リンクの被災状況が確率的リンク交通容量に反映されるものとする、対数正規分布は常に非負であるため、リンクの途絶を含む任意の被災状況を確率変数を用いて想定することが可能となる。提案するモデルによって、通常時または被災時の道路ネットワークにおける交通量配分を行えるため、双方の状態を比較することが可能となる。本稿後半にてテストネットワークでの数値実験例を載せ、提案するモデルの妥当性を示す。

**Key Words :** *stochastic user equilibrium assignment model, degraded network, stochastic travel demand, stochastic link capacity, lognormal distribution*

## 1. はじめに

地震や水害などの大規模自然災害が発生した際、一定の交通機能を維持できるためには、強靱な道路ネットワークを実現させる必要がある。災害時には、道路ネットワークが被災することによって、交通容量が低下し、通常時とは異なる交通需要が発生すると考えられる。この結果、道路ネットワークに混雑が発生し、物理的な接続性のみならず時間的な接続性が低下して被災後の様々な活動に悪影響を及ぼす。したがって、被災により生じる混雑を考慮した、道路ネットワーク評価が求められる。

そこで本研究では、道路ネットワークの被災を考慮可能とする確率的利用者均衡配分モデルを提案する。また、提案するモデルでは交通の需要と供給が対数正規分布に従い、かつリンク間の相関を考慮するものとする。

交通の需要または供給の不確実性を考慮した、多くの既存研究では、交通需要または交通容量として正規分布が多く用いられてきた。しかし、正規分布は負の値をとる場合があり、交通量または交通容量の定義に反する。一方で、対数正規分布は常に非負であり、現実の交通と整合する。これにより、災害時におけるリンクの被災をリンク交通容量を変化させることにより表現可能となる。

特にリンクの途絶を考える場合、リンク交通容量が0に近づく場合と位置づけられるが、この状態も対数正規分布によって近似的に表現可能である。したがって、本研究で提案する確率的利用者均衡配分モデルは途絶を含む道路ネットワークの被災を考慮する場合に有用である。

既存研究として、Sumalee and Xu<sup>1)</sup>とZhou and Chen<sup>2)</sup>は対数正規分布により交通需要が確率的に変動するSUEモデルを提案した。上記2つの研究では、対数正規分布の和を対数正規分布として近似的に表現するために、Fenton<sup>3)</sup>による近似を用いている。この近似によって、対数正規分布に従うリンク交通量を得る。しかし、Fenton<sup>3)</sup>による近似を用いる場合、足しあわされる確率分布間の統計的独立性を仮定するため、リンク間の相関を考慮することができない。そこで、本研究では、Abu-Dayya and Beaulieu<sup>4)</sup>にて示される手法を用いることによって、対数正規分布に従い、かつリンク間の相関を考慮したリンク交通量を想定する。

## 2. 定式化

### (1) 記号

本項で使用する記号は以下の通りである。なお、確率変

数は大文字、確定変数は小文字で示している

- W**: ネットワーク中の OD ペア集合
- K<sub>w</sub>**: OD ペア  $w$  間の経路集合
- N**: ネットワーク中のノード集合
- A**: ネットワーク中のリンク集合
- $Q_w$ : OD ペア  $w$  間の確率的交通需要
- $q_w$ : OD ペア  $w$  間の確率的交通需要の平均
- $cv_w$ : OD ペア  $w$  間の確率的交通需要の変動係数
- $F_{w,k}$ : OD ペア  $w$  間を通る経路  $k$  の確率的交通量
- $f_{w,k}$ : OD ペア  $w$  間を通る経路  $k$  の確率的交通量の平均
- $V_a$ : リンク  $a$  の確率的交通量
- $C_a$ : リンク  $a$  の確率的交通容量
- $T_a$ : リンク  $a$  の確率的リンク移動時間
- $T_{w,k}$ : OD ペア  $w$  間を通る経路  $k$  の確率的経路移動時間
- $p_{w,k}$ : ドライバーが OD ペア  $w$  間を通る経路  $k$  を選択する確率
- $\eta_{w,k}$ : OD ペア  $w$  間を通る経路  $k$  の経路選択コスト
- $\delta_{w,k,a}$ : リンク  $a$  が経路  $k$  を含むとき 1 をとり、それ以外のとき 0 をとる変数

## (2) 交通量の定式化

本研究では、交通需要と交通容量が対数正規分布に従うものと仮定する。OD ペア  $w$  間の確率的交通需要  $Q_w$  の平均は  $E[Q_w] = q_w$ 、分散は変動係数  $cv_w$  を用いて  $\text{var}[Q_w] = (cv_w \cdot q_w)^2$  で与えられる。経路交通量は式(1)で、その期待値と標準偏差はそれぞれ式(2)と式(3)で与えられる。

$$F_{w,k} = p_{w,k} \cdot Q_w \quad (1)$$

$$f_{w,k} = E[F_{w,k}] = p_{w,k} \cdot E[Q_w] = p_{w,k} \cdot q_w \quad (2)$$

$$\sqrt{\text{var}[F_{w,k}]} = p_{w,k} \sqrt{\text{var}[Q_w]} = p_{w,k} \cdot q_w \cdot cv_w \quad (3)$$

ここで、OD 交通量と経路交通量に関する確率的交通需要の分散は式(4)のように保存される。

$$\begin{aligned} \text{var}[Q_w] &= \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \sum_{j \in \mathbf{K}_w} \text{cov}[F_{w,k}, F_{w,j}] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \sum_{j \in \mathbf{K}_w} p_{w,k} \cdot p_{w,j} (cv_w \cdot q_w)^2 \\ &= (q_w \cdot cv_w)^2 \left( \sum_{k \in \mathbf{K}_w} p_{w,k} \right)^2 = (q_w \cdot cv_w)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

リンク交通量はこれを構成する経路交通量の和によって表される。

$$V_a = \sum_{w \in \mathbf{W}} \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \delta_{w,k,a} \cdot F_{w,k} \quad (5)$$

リンク交通量の期待値と共分散は式(6)、(7)の通りである。

$$E[V_a] = \sum_{w \in \mathbf{W}} \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \delta_{w,k,a} \cdot E[F_{w,k}] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, V_b] &= \text{var} \left[ \sum_{w \in \mathbf{W}} \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,k,b} \cdot F_{w,k} \right] \\ &= \sum_{w \in \mathbf{W}} \sum_{k \in \mathbf{K}_w} \sum_{j \in \mathbf{K}_w} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,j,b} \cdot \text{cov}[F_{w,k}, F_{w,j}] \\ &\quad (\text{if } a = b, \text{ var}[V_a] = \text{cov}[V_a, V_b]) \end{aligned} \quad (7)$$

## (3) 対数正規分布

確率変数  $Z_a$  が対数正規分布に従うと仮定するとき、これに対数を取ることで得られる正規分布の平均と分散を用いて、確率変数  $Z_a$  は式(8)のように表せる。

$$Z_a \sim LN(\mu_{Z_a}, \sigma_{Z_a}^2) \quad (8)$$

確率変数  $Z_a$  の平均、分散・共分散を用いて、これに対応する正規分布の平均、分散・共分散が式(9)、(10)の通り得られる。

$$\mu_{Z_a} = \ln(E[Z_a]) - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\text{var}[Z_a]}{(E[Z_a])^2} \right) \quad (9)$$

$$\sigma_{Z_a, Z_b} = \ln \left( 1 + \frac{\text{cov}[Z_a, Z_b]}{E[Z_a] \cdot E[Z_b]} \right) \quad (10)$$

式(9)、(10)より、確率変数  $Z_a$  の平均と共分散は式(11)、(12)のように表される。

$$E[Z_a] = \exp \left( \mu_{Z_a} + \frac{1}{2} \sigma_{Z_a}^2 \right) \quad (11)$$

$$\text{cov}[Z_a, Z_b] = E[Z_a] \cdot E[Z_b] \cdot (\exp(\sigma_{Z_a, Z_b}) - 1) \quad (12)$$

ここで、式(10)、式(12)において、異なる対数正規分布間の相関が考慮されている点に注意が必要である。

一般的に、対数正規分布は正規分布のように加算に対して再生性をもたない。したがって、1 (2) の定式化において、リンク交通量が確率的交通需要と同じく対数正規分布に従うと仮定するためには、対数正規分布の和を対数正規分布として表せるように近似する必要がある。既存研究(Sumalee and Xu<sup>1)</sup>、Zhou and Chen<sup>2)</sup>では Fenton<sup>3)</sup>の方法により近似している。しかし、Fenton<sup>3)</sup>では足しあわせ

れる確率変数間の独立を仮定しているため、リンク間の相関を考慮できない。そこで、本研究では、相関のある対数正規分布の和を対数正規分布として近似するため、Abu-Dayya and Beaulieu<sup>4)</sup>にて示される手法を用いて、リンク間の相関を考慮する。

### (3) 移動時間の定式化

本研究ではリンク移動時間として、BPR 関数を用いる。

$$t_a(v_a, c_a) = t_a^0 \cdot \left( 1 + \beta_a \cdot \left( \frac{v_a}{c_a} \right)^{n_a} \right) \quad (13)$$

ここで  $t_a^0$  はリンク  $a$  における自由旅行時間、 $\beta_a$  と  $n_a$  はリンク  $a$  におけるパラメータを表す。本研究では Uchida<sup>5)</sup>に従い、確率変数としてのリンク交通量、リンク交通容量を BPR 関数に代入することによって、確率的なリンク移動時間を得る。また、本定式化では、リンク交通量とリンク交通容量は対数正規分布に従うため、これらは一つの確率変数  $D_a$  として統合可能であり、リンク移動時間は確率変数  $D_a$  の関数として表現できる。

$$t_a(V_a, C_a) = T_a(D_a) = t_a^0 \cdot \left( 1 + \beta_a \cdot D_a^{n_a} \right) \quad (14)$$

where

$$D_a = \frac{V_a}{C_a} \quad (15)$$

リンク移動時間の平均と共分散を以下のように得る。

$$E[T_a] = t_a^0 + \beta_a \cdot E[D_a^{n_a}] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[T_a, T_b] &= E[T_a \cdot T_b] - E[T_a] \cdot E[T_b] \\ (\text{if } a = b, \text{ var}[T_a] &= \text{cov}[T_a, T_b]) \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} E[T_a \cdot T_b] &= E\left[ \left( t_a^0 + \beta_a \cdot D_a^{n_a} \right) \cdot \left( t_b^0 + \beta_b \cdot D_b^{n_b} \right) \right] \\ &= E\left[ t_a^0 \cdot t_b^0 + t_b^0 \cdot \beta_a \cdot D_a^{n_a} + t_a^0 \cdot \beta_b \cdot D_b^{n_b} \right. \\ &\quad \left. + \beta_a \cdot \beta_b \cdot D_a^{n_a} \cdot D_b^{n_b} \right] \quad (18) \\ &= t_a^0 \cdot t_b^0 + t_b^0 \cdot \beta_a \cdot E[D_a^{n_a}] + t_a^0 \cdot \beta_b \cdot E[D_b^{n_b}] \\ &\quad + \beta_a \cdot \beta_b \cdot E[D_a^{n_a} \cdot D_b^{n_b}] \end{aligned}$$

ここで、式(18)における、 $D_a^{n_a}$ 、 $D_a^{n_a} \cdot D_b^{n_b}$  はそれぞれ対数正規分布に従うため、これらに対応する正規分布の平均と分散・共分散を用いて、それぞれの平均を求めることができる。

リンク移動時間が正規分布に従うと仮定した既存研究では、リンク移動時間はリンク交通量またはリンク交通容量に関する  $m$  次テイラー近似による多項式形で表さ

れてきた。(例：Clark and Watling<sup>6)</sup>; Uchida<sup>7)</sup> 正規分布の  $m$  次モーメントを得るためには Isserlis<sup>8)</sup>による近似計算が必要であるが、本研究では、確率変数として対数正規分布を用いるため、任意のモーメントを近似によらず、直接求めることが可能である。

式(18)より、リンク移動時間は確定項と確率項から構成されている。そのため、分布形は確定項だけ右に移動したシフト対数正規分布となる。Abu-Dayya and Beaulieu<sup>4)</sup>における近似によって、経路移動時間の分布形もまたリンク移動時間と同様に、確定項と確率項から構成される。経路移動時間は式(31)として与えられる。

$$T_{w,k} = \sum_{a \in A} \delta_{w,k,a} \cdot T_a \quad (19)$$

経路移動時間の期待値と分散はそれぞれ式(20)、(21)の通りである。

$$E[T_{w,k}] = \sum_{a \in A} \delta_{w,k,a} \cdot E[T_a] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[T_{w,k}] &= \text{cov}\left[ \sum_{a \in A} \delta_{w,k,a} \cdot T_a, \sum_{b \in A} \delta_{w,k,b} \cdot T_b \right] \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,k,b} \cdot \text{cov}[T_a, T_b] \end{aligned} \quad (21)$$

### (4) 確率的利用者均衡配分モデルの定式化

本研究では、経路選択基準は Uchida<sup>5)</sup>に従い、経路移動時間の平均と分散の和で表されるものとする。したがって、ドライバーは経路移動時間に関して、リスク回避的な経路選択を行うものとする。

$$\eta_{w,k} = E[T_{w,k}] + \gamma \cdot \text{var}[T_{w,k}] \quad (22)$$

ここで、 $\gamma$  はリスク回避度を表す定数である。経路選択基準にランダム効用理論を適用し、経路選択に関する誤差項として、同一で互いに独立なガンベル分布を想定する。したがって、ロジット型の確率的利用者均衡配分モデルを不動点問題として定式化できる。なお、式(25)における  $\theta$  は、ドライバーの経路選択基準に対する認知誤差を表している。

$$\mathbf{f}_w = q_w \cdot \mathbf{p}_w(\boldsymbol{\eta}_w(\mathbf{f})) \quad (23)$$

where

$$p_{w,k} = \Pr(\eta_{w,k} + \varepsilon_{w,k} \leq \eta_{w,k'} + \varepsilon_{w,k'}) \quad (24)$$

$$p_{w,k} = \frac{\exp(-\theta \cdot \eta_{w,k})}{\sum_{k \in \mathbf{K}_w} \exp(-\theta \cdot \eta_{w,k})} \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_w = (f_{w,1}, \dots, f_{w,|K_w|})^T \quad (26)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{|W|})^T \quad (27)$$

$$\mathbf{p}_w = (p_{w,1}, \dots, p_{w,|K_w|})^T \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\eta}_w = (\eta_{w,1}, \dots, \eta_{w,|K_w|})^T \quad (29)$$

#### 4. 数値計算

##### (1) テストネットワーク1 (単一ODペア)

上記で提案する定式化を検証するため、大小2つのテストネットワークにおいて、数値実験を行った。OD交通量の期待値と変動係数を表-1 に示す。本節では図-1のような、1ODペア、3経路、5リンクのテストネットワーク1における結果を示す。

式(18)におけるパラメータ、 $\beta_a$  と  $n_a$  は全てのリンクにおいてそれぞれ2と6である。式(34)と式(37)におけるパラメータ  $\gamma$  と  $\theta$  はそれぞれ1である。すべてのリンクの自由走行時間は0.05[時間]とし、リンク交通容量の期待値と分散はそれぞれ1000[pcu/時間]、 $100^2$  [(pcu/時間) $^2$ ]とする。ただし、被災したリンクではリンク交通容量の期待値を10 [pcu/時間]とする。なお、以上の条件は2つのテストネットワークにおいて共通している。

表-1 OD交通量 (テストネットワーク1)

OD ペア	平均 [pcu/時間]	変動係数
(1,4)	1000	0.2

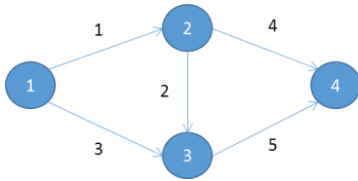


図-1 テストネットワーク1

表-2 経路・リンク組み合わせ (テストネットワーク1)

O-D ペア	経路番号	リンク組み合わせ
(1,4)	1	1-4
	2	1-2-5
	3	3-5

テストネットワーク1ではリンク5が被災するものとする。通常時と被災時において、配分されたリンク交通量はそれぞれ図-2と図-3の通りである。リンク5の被災により、リンク5を経由する経路2と3が途絶した。そのため、経路2または3のみから構成されるリンク2と3に交通量が

配分されなくなり、リンク5を経由せず、リンク1とリンク4から構成される経路1のみに交通量が集中した。

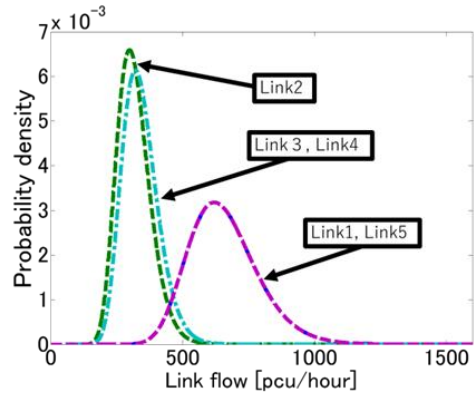


図-2 リンク交通量 (通常時)

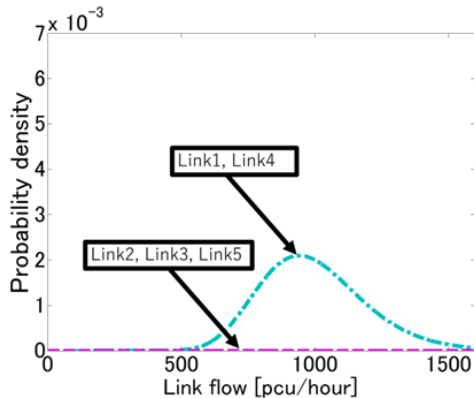


図-3 リンク交通量 (被災時)

##### (2) テストネットワーク2 (複数ODペア)

次に、図-4のような、4ODペア、25経路、19リンクからなるテストネットワーク2における結果を示す。テストネットワーク2ではリンク2が被災するものとする。

表-3 OD交通量 (テストネットワーク2)

O-D ペア	平均 [pcu/時間]	変動係数
(1,2)	1000	0.2
(4,2)	1500	0.2
(1,3)	800	0.25
(4,3)	1000	0.25

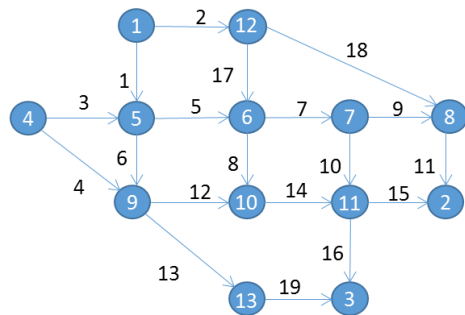


図-4 テストネットワーク2

通常時と被災時におけるリンク移動時間は図-5、図-6の通りである。図-6では、リンク2の被災により、他のリンクに交通量が集中し、混雑が発生している様子が分かる。なお、リンク2の分布形はリンク移動時間の平均と分散が極めて大きな状態を表していることに注意が必要である。

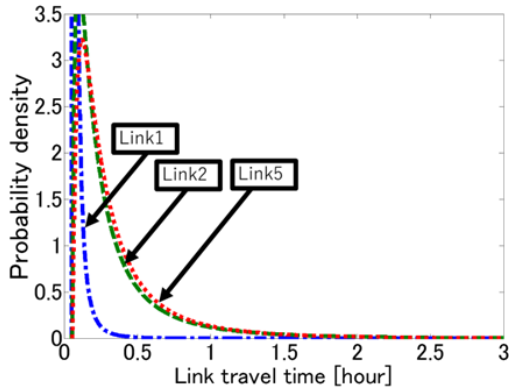


図-5 リンク移動時間 (通常時)

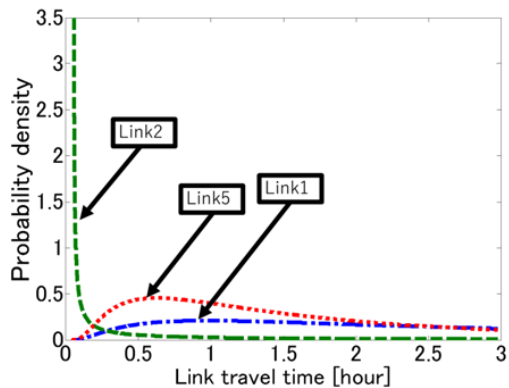


図-6 リンク移動時間 (被災時)

## 5. まとめ

本研究では、確率的交通需要と確率的リンク交通容量が対数正規分布に従い、かつリンク間の相関を考慮した確率的利用者均衡配分モデルを提案した。対数正規分布

は常に非負であるため、リンク交通容量は任意の分布形状を取ることが可能となり、リンクの途絶を含む様々なリンクの被災状況をリンク交通容量を変化させることによって、ネットワーク上で表現することが可能となる。したがって、提案するモデルでは、通常時と被災時それぞれの道路ネットワークにおける交通量配分が可能であり、それぞれの状態を比較検討することにより、道路ネットワークの機能を評価することが可能となる。

## 参考文献

- 1) Sumalee, A. and Xu, W. : First-best marginal cost toll for a traffic network with stochastic demand, *Transportation Research Part B*, Vol 45, No. 1, 2011.
- 2) Zhou, Z. and Chen, A. : Comparative analysis of three user equilibrium models under stochastic demand, *Journal of Advanced Transportation*, Vol 42, No. 3, 2008.
- 3) Fenton, F. L. : The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission systems, *IEEE Transactions on Communication Systems*, Vol 8, No. 1, 1960.
- 4) Abu-Dayya, A. A., and Beaulieu, N. C. : Outage probabilities in the presence of correlated lognormal interferers, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol 43, No. 1, 1994.
- 5) Uchida, K. : Estimating the value of travel time and of travel time reliability in road networks, *Transportation Research Part B*, Vol 66, 2014.
- 6) Clark, S. & Watling, D. : Modeling network travel time reliability under stochastic demand, *Transportation Research Part B*, Vol 39, No. 2, 2005.
- 7) Uchida, K. : Travel time reliability estimation model using observed link flows in a road network, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol. 30, No. 6, 2015.
- 8) Isserlis, L. : On a formulation for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables, *Biometrika*, Vol. 12, No.1-2, 1918.

(?)

## STOCHASTIC USER EQUILIBRIUM ASSIGNMENT MODEL CONSIDERING A DEGRADATION OF ROAD NETWORK

Ryuichi TANI, Teppei KATO and Kenetsu UCHIDA

This study proposed a new stochastic user equilibrium assignment model which can be used in the degraded network including the link disruption. In this proposed model, stochastic traffic demand and stochastic traffic capacity which follow lognormal distributions are assumed. If the link capacity corresponds to the degraded network, the nonnegative property of lognormal distributions makes it possible to assume any degraded state including link disruptions. At the end, numerical experiments in two test networks demonstrate the validity of the proposed model.