

q一般化ネスティッドロジットモデル

中山 晶一郎¹, 力石 真²

¹正会員 金沢大学 環境デザイン学系 (〒920-1192 金沢市角間町)

E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

²正会員 広島大学大学院 国際協力研究科 (〒739-8529 東広島市鏡山一丁目5番1号)

E-mail: chikaraishim@hiroshima-u.ac.jp

交通分野では、ランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの中で、操作性の高さからロジットモデルが多用されている。ロジットモデルの誤差項は極値分布の一つのガンベル分布に従うが、著者らが開発した一般化ロジットモデルはガンベル分布を特殊形として含む一般化極値分布に従うランダム効用を持つ離散選択モデルである。本稿では、一般化極値分布をさらに一般化した多変量一般化極値分布に従い、ネスト構造化されたランダム効用を持つ一般化ネスティッドロジットモデルを構築する。

Key Words :generalized nested logit model, multivariate generalized extreme value distribution

1. はじめに

交通分野では、ランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの中で操作性の高さからロジットモデルが多用されている。

ロジットモデルはランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの一つであり、効用が極値分布の一つであるガンベル分布に従う。効用が正規分布に従う場合はプロビットモデルと呼ばれている。中心極限定理などから類推できるように、プロビットモデルの方が現象の再現上、本来的には望ましいとも考えられるが、正規分布の確率密度関数を積分することができないことを起因として、プロビットモデルの推定は数値的に扱うもしくは近似的にしか扱うことができないという欠点を持つ。一方、ロジットモデルは閉形式で問題を記述することができ、数理的な操作性が高く、プロビットモデルよりもロジットモデルが多用されている。

ロジットモデルを基礎としたより精緻化された様々なモデルがこれまでも開発されている。ロジットモデルの問題点である IIA 特性の緩和することができるネスティッドロジットモデルは実務的にも多用されている。

ロジットモデルで用いられているガンベル分布は極値分布の一つであるが、ガンベル分布を含むより一般的な分布として一般化極値分布¹⁾がある。著者らはロジットモデルで用いられるガンベル分布を一般化極値分布に拡張した場合の離散選択モデルを開発した²⁾。しかし、そのモデルはロジットモデルの一般化ではあるものの、各選択肢のランダム効用は独立であるという問題点を持っている。本稿では、その問題を緩和するために、一般化

ロジットモデルを多変量化する。選択肢にネスト構造を仮定し、各選択肢のランダム効用が多変量一般化極値分布に従う離散選択モデルである。これは従来までのネスティッドロジットモデルを一般化したモデルと言える。このような一般化ネスティッドロジットモデルを構築し、それを広島市の買い物行動の目的地と交通手段選択行動の分析に適用し、そのモデルの妥当性等を検討する。

2 q一般化ロジットモデル

(1) 一般化極値分布

ロジットモデルでは、効用（もしくは誤差項）はガンベル分布に従っている。ガンベル分布は極値分布の1つのタイプであり、ガンベル分布を含むより広い極値分布には一般化極値分布がある。一般化極値分布はガンベル分布を一般化したものであり、一般化極値分布の累積分布関数 $\tilde{F}(x)$ は以下の通りである。

$$\tilde{F}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\theta} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\gamma = 0$ の時、 $\exp(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [1 + \gamma x]^{\frac{1}{\gamma}}$ となるため、上の式は

$$\tilde{F}(x | \gamma = 0) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{x - \mu}{\theta} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

となり、ガンベル分布であることがわかる。なお、さらに、 $\theta = 1, \mu = 0$ の時は標準ガンベル分布である。

以降の議論を分かりやすくするために、以下のq指数

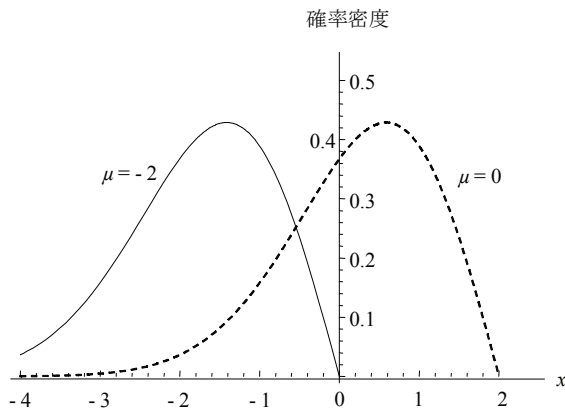


図-1 $q=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

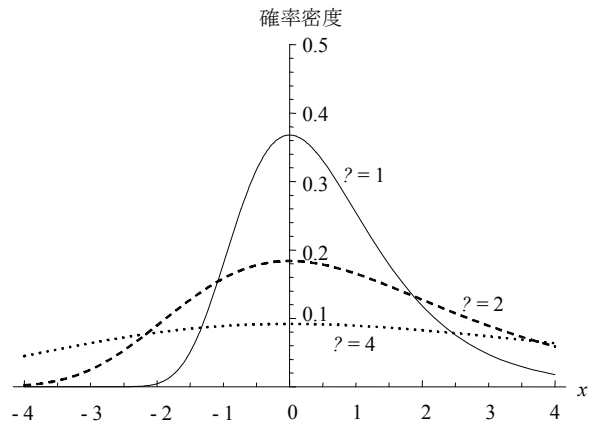


図-2 $q=1/2, \theta=1$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

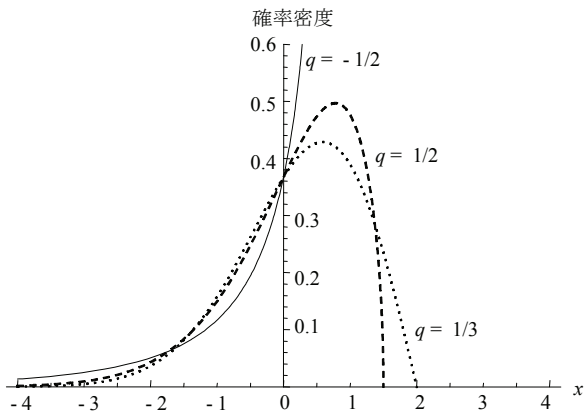


図-3 $q<1, \theta=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

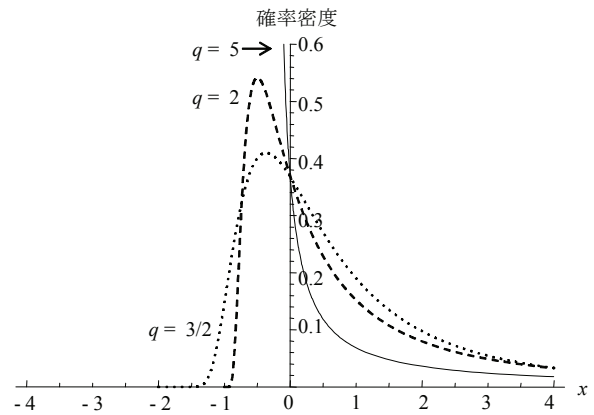


図-4 $q>1, \theta=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

関数

$$\exp_q(x) := [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (3)$$

を導入する。これはツェリス統計でよく用いられているものである。前述の通り、 $\exp(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [1 + \gamma x]^{1/\gamma}$ であり、上述の $\exp_q(x)$ は $q=1$ 通常の指数関数となる。つまり、 $\exp(x) = \exp(x)$ である。このように q -指数関数は通常の指数関数を特殊形として持つ一般化指数関数の一つである。同様に、

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (4)$$

も導入する。この q -対数関数も、 $q=1$ の時、 $\ln_1(x) = \ln(x)$ と通常の対数関数であり、対数関数の一般化である。また、 $\ln_q(\exp_q[x]) = x$ であることは容易に分かる。

q -指数関数を用いると、一般化極値分布の累積分布関数 $\tilde{F}(x)$ は

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp \left[-\exp_q \left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right] \\ &= \exp \left\{ - \left[1 - (1-q) \frac{x-\mu}{\theta} \right]^{1/(1-q)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる。

一般化極値分布の平均は

$$\begin{cases} \mu + \frac{\Gamma(2-q)-1}{q-1} \theta & q < 2 \text{ and } q \neq 1 \\ \mu + \eta \theta & q = 1 \end{cases} \quad (6)$$

である。なお、 $\eta = 0.572216$ (オイラー定数)、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。 $q \geq 2$ の時は平均値が存在しない。分散は

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(3-2q) - [\Gamma(2-q)]^2}{(q-1)^2} \theta^2 & q < \frac{3}{2} \text{ and } q \neq 1 \\ \frac{\pi^2 \theta^2}{6} & q = 1 \end{cases} \quad (7)$$

である。分散は $q \geq 3/2$ の時存在しない。

図-1は、 $q=1, \mu=0$ の場合の一般化極値分布 (ガンベル分布) の確率密度関数である。 $q=1$ の場合の一般化極値分布はガンベル分布となる。図-1から分かるように、 θ によってばらつきが異なる。なお、ガンベル分布の定義域は $-\infty$ から $+\infty$ までである。図-2は、 $q=1/2, \theta=1$ の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。 $q=1$ のガンベル分布の一般化極値分布の定義域は $-\infty$ から $+\infty$ ま

であったが、 $q \neq 1$ の一般化極値分布の定義域は上限もしくは下限がある。図-2から分かるように、 μ によって、分布が x 軸について平行移動する。図-3は $q < 1, \theta = 1, \mu = 0$ の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。この図から分かるように、 $q < 1$ の場合の一般化極値分布は上限があり、下限はない ($-\infty$ まで)。図-4は $q > 1, \theta = 1, \mu = 0$ の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。 $q > 1$ の場合は、図-3とは逆に、下限があり、上限がない ($+\infty$ まで) 分布となる。所要時間などは負の値はとらず、基本的には自由走行時間以上の値をとるため、このような分布をモデル化するためには、ガンベル分布よりも一般化極値分布の方が都合が良いと考えられる。

(2) 一般化ロジットモデル²⁾

前節で述べた一般化極値分布に従うランダム効用を持つ離散選択モデルを本節では考える。通常のロジットモデルでは、ランダム効用 U_i はガンベル分布に従うが、 $U_i = v_i + \varepsilon_i$ と確定効用と誤差項(確率項)に分離可能である。しかしながら、このように確定項と確率項が分離されるために、確定項の大小にかかわらず、効用の分散が同じになる(homeogeneityである)。所要時間などはその平均値が長ければ分散も大きくなるのが通常であり、必ずしもhomeogeneityが良いとは限らない。本研究では、確定項と確率項を分離させない。ランダム効用 U_i の平均値を効用関数で与えることにする。つまり、

$$E[U_i] = v_i \tag{8}$$

である。ここで、 $E[\cdot]$ は期待値をとる操作子、 U_i は選択肢 i のランダム効用、 v_i は選択肢 i の効用の平均値である。このように効用の平均値を効用関数で与えるが、本稿では線形効用関数で与えることにする。つまり、

$$v_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k y_{ik} \tag{9}$$

とする。ここで、 α_{i0} は選択肢 i の定数項、 α_k はパラメータ ($k = 1, 2, \dots, K$)、 y_{ik} は選択肢 i の k 番目の変数である。平均値が v_i となる(選択肢 i の)効用が従う一般化極値分布の累積分布関数 $F_i(x)$ は以下ようになる。

$$F_i(x) = \exp \left[- \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\{\Gamma(2-q_i)\}^{1/(q-1)}} \exp_q(-x) \right] \\ = \exp \left[- \exp_q \left(- \frac{x - \frac{1}{1-q} \left\{ 1 - \frac{1+(q_i-1)v_i}{\Gamma(2-q)} \right\}}{\frac{1+(q_i-1)v_i}{\Gamma(2-q)}} \right) \right] \tag{10}$$

$\mu = \frac{1}{1-q} \left[1 - \frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)} \right]$ と $\theta = \frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)}$ を式(6)に代入することによって、 $E[U_i] = v_i$ であることを確認するこ

とができる。ただし、 $q < 2$ でなければならない。また、 $q \neq 1$ の場合、 $1+(q-1)v_i \geq 0$ でなければならない。

選択肢 i を選択する確率はその選択肢のランダム効用が他の選択肢のランダム効用よりも大きい確率であり、

$$p_i = \Pr[U_i > \max_{i'(\neq i)}(U_{i'})] \\ = \int_{x \in \Omega} F_1(x) \cdots F_{i-1}(x) f_i(x) F_{i+1}(x) \cdots F_I(x) dx \tag{11}$$

として与えられる。ここで、 $f_i(x)$ は選択肢 i のランダム効用が従う一般化極値分布の確率密度関数であり、 I は選択肢の総数、 Ω は定義域である。ここで、 $z := \exp_q(-x)$ とすると、確率密度関数 $f_i(x)$ は

$$f_i(x) = \frac{d}{dx} F_i(x) = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} F_i(x) \frac{dz}{dx} \tag{12}$$

となる。また、 $dz/dx = -[\exp_q(-x)]^q$ であり、これらを式(11)に代入すると、

$$p_{ij} = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q_i)]^{1/(q-1)}} \int_{z \in \hat{\Omega}} \prod_{i=1}^I F_i(x) dz \\ = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q_i)]^{1/(q-1)}} \int_{z \in \hat{\Omega}} \exp \left[- \frac{z}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)} \sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \right] dz \\ = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \left[\exp \left\{ - \frac{z}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)} \sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \right\} \right]_0^{\hat{\Omega}} \\ = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \tag{13}$$

となる。ここで、 $\hat{\Omega}_i$ は z の定義域である。このように、

$$p_i = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \tag{14}$$

が得られる。 $q=1$ の時、上の式は

$$p_i = \frac{\exp(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp(v_i)} \tag{15}$$

であり、式(14)の一般化ロジットモデルは通常の多項ロジットを含むことが分かる。通常の多項ロジットモデルと一般化ロジットモデルの違いは、通常のものでは通常の指数関数がいわれている一方、一般化ロジットモデルでは、その指数関数を一般化された指数関数である q -指数関数に置き換わっている点である。ロジットモデルの一般化としては様々なものがあるため、本研究での一般化ロジットモデルを「 q -一般化ロジットモデル」と呼ぶことにする。

式(14)の q -一般化ロジットモデルでは、選択肢の効用が一般化極値分布となる。これによって、多項ロジット

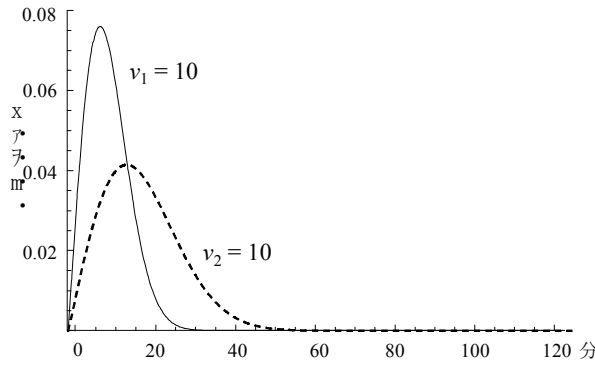


図-5 所要時間が10と20の経路の不効用の確率密度($q=0.5$)

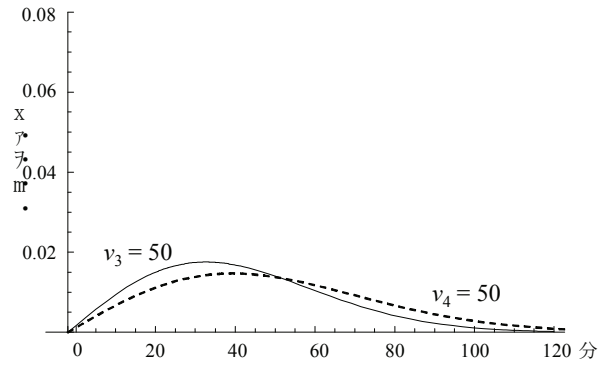


図-6 所要時間が50と60の経路の不効用の確率密度($q=0.5$)

モデルでの各選択枝の効用のばらつきが同じという問題を緩和することができる。このモデルを経路選択に適用することを考えよう。単純に、 $v_i = -c_i$ と設定してみる。ただし、 $-c_i$ は経路*i*の所要時間平均である。ランダム不効用 $-U_i$ の分布(所要時間分布)は図-5、図-6の通りとなる。なお、いずれも $q = 0.5$ の場合である。図-5は所要時間の平均値が10と20の場合であり、図-6は所要時間の平均値が50と60の場合である。多項ロジットモデルの場合は10、20、50、60に関わらずばらつきは同じになるが、 q 一般化ロジットモデルの場合は平均所要時間が長いほどばらつきが大きく、現実に近い状況を表現することができている。

式(14)は

$$p_i = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} = \frac{[1+(q-1)v_i]_{q-1}^{-1}}{\sum_{i=1}^I [1+(q-1)v_i]_{q-1}^{-1}} \quad (16)$$

$$= \frac{\left(v_i + \frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}}{\sum_{i=1}^I \left(v_i + \frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}} = \frac{\tilde{v}_i^{-\xi}}{\sum_{i=1}^I \tilde{v}_i^{-\xi}}$$

と変形できる。ここで、

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{1}{q-1} = \alpha_{i0} + \frac{1}{q-1} + \alpha_{i1}y_{ij1} + \dots + \alpha_{ik}y_{ijk} \quad (17)$$

$$\xi = -\frac{1}{q-1} \quad (18)$$

である。このように、式(14)は効用がワイブル分布に従う離散選択モデルであるワイビットモデル³⁾も含むこともわかる。このように、一般化ロジットモデルはワイビットモデルも含む。

ランダム効用 $U_i (i=1, 2, \dots, I)$ の最大値の分布の累積分布関数 $F^{\max}(x)$ は以下のように与えられる。

$$F^{\max}(x) = \prod_{i=1}^I F_i(x) = \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)}{\{\Gamma(2-q)\}^{\frac{1}{q-1}}} \exp_q(-x) \right] \quad (19)$$

このように最大効用の分布も一般化極値分布となる。その平均が式(6)で与えられ、上の式と式(10)を比較することにより、最大効用の期待値は

$$E[\max(U_{ij} | \forall j)] = \ln_{2-q_i} \left[\sum_{j=1}^{J_i} \exp_{2-q_i}(v_{ij}) \right] \quad (20)$$

となることが分かる。 $q = 1$ の時、 $\max[U_{ij} | \forall j] = \ln[\sum \exp(v_i)]$ となり、いわゆるログサムである。この点においても通常のロジットモデルの一般化であることを確認できる。

3. ネスティッドモデルの一般化

上述の一般化ロジットモデルでは、一般化極値分布を誤差項に持つものの、それぞれの選択枝の誤差項は互いに独立であった。この独立の仮定の緩和を考える。通常のロジットモデルについては、これまで選択構造のネスト化によるこの問題の緩和が一つの主要なアプローチであった。このアプローチでは、ネスティッドロジットモデル、クロスネスティッドモデルなど様々なモデルが開発されてきている。

本稿では、 q 一般化ロジットモデルについて、選択枝構造のネスト化を行う。

McFadden⁴⁾は、以下の4つの性質をもつ $G(y_1, y_2, \dots)$ 関数を用いて、ロジットモデルの多変量化を行った。

$$\textcircled{1} \quad G(y_1, y_2, \dots, y_l) \geq 0 \quad (21)$$

$$\textcircled{2} \quad G(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_l) = \alpha G(y_1, y_2, \dots, y_l) \quad (22)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{y_l \rightarrow \infty} G(y_1, y_2, \dots, y_l) = \infty \quad (23)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial^k G(y_1, y_2, \dots, y_l)}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_k}} \begin{cases} \geq 0 & \text{if } k = 2r - 1 \\ \leq 0 & \text{if } k = 2r \end{cases} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

なお、この②の性質は以下のような s 次同次 ($s \geq 2$) に

まで拡張されていることを付記しておきたい³⁾。

$$\textcircled{2} \quad G(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_l) = \alpha^s G(y_1, y_2, \dots, y_l) \quad (25)$$

ここで、以降の議論のために、

$$G_i(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_l) = \frac{\partial G(y_1, y_2, \dots, y_l)}{\partial y_i} \quad (26)$$

と表記することにする。各選択肢の誤差項が

$$\exp[-G(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \dots, e^{-\varepsilon_l})] \quad (27)$$

という結合累積分布関数を持つ多変量極値分布に従う場合のランダム効用離散選択モデルの選択肢*i*の選択確率は以下のように与えられる⁴⁾。

$$p_i = \frac{e^{v_i} G_i(y_1, y_2, \dots, y_l)}{G(y_1, y_2, \dots, y_l)} \quad (28)$$

以上のように、McFadden⁴⁾は、選択肢間の誤差項がG関数を用いた多変量極値分布に従うということにより、選択肢間の誤差項間の相関を考慮できるロジット系ランダム効用離散選択モデルを構築した。

Mattsson et al.⁶⁾はMcFadden⁴⁾のG関数を拡張したA関数 (aggregation function) を提案した。A関数を用いた多変量極値分布の結合累積分布関数は

$$\exp[-A(-\omega_1 \ln \Psi(-\varepsilon_1), -\omega_2 \ln \Psi(-\varepsilon_2), \dots, -\omega_l \ln \Psi(-\varepsilon_l))] \quad (29)$$

である。なお、 Ψ はシード (種) となる分布の累積分布関数で、 $\omega > 0$ である。

本研究では、以下の結合累積分布関数 $F(\mathbf{x})$ を持つ多変量極値分布を用いる。

$$F(\mathbf{x}) = \exp[-G\{e_{2-q}^{v_1} e_q^{-x_1}, e_{2-q}^{v_2} e_q^{-x_2}, \dots, e_{2-q}^{v_l} e_q^{-x_l}\}] \quad (30)$$

なお、式を短く書くために、 q -指数関数の表記を

$$\exp_q(x) = e_q^x \quad (31)$$

と単純化している。

McFadden⁴⁾は式(27)を考えていたため、その拡張と言える。一方、Mattsson et al.⁶⁾の特殊形と言える。

G関数自体は陽な関数形を与えず一般的なものとなっているが、McFadden⁴⁾はネスティッドロジットモデルが導出される以下の具体的なG関数形を提示している。

$$G(y_1, y_2, \dots, y_l) = \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \quad (32)$$

ここで、 m はネストの数、 n_i はネスト i の選択肢の数、 ρ_i はスケールパラメータである。このネスティッドロジットモデルを導出するG関数を式(30)に入れ込むことによって、一般化ネスティッドロジットモデルを導出することが可能となる。McFadden⁴⁾と異なっている点は、G関数の引数として、 e^{-x_i} を用いずに、 $e_{2-q}^{v_i} e_q^{-x_i}$ を用いて

いる点である。つまり、指数関数ではなく、その一般形である q -指数関数を用いていることである。この観点から、導出されるモデルは一般化ネスティッドロジットモデルと言える。したがって、以下の多変量一般化極値分布の累積分布関数 $F_{gn}(\mathbf{x})$ を用いる。

$$F_{gn}(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \quad (33)$$

この偏微分を考えよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{gn}}{\partial x_{ij}} &= -F_{gn}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \\ &= -\frac{1}{\rho_i} F_{gn}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \\ &= -\frac{1}{\rho_i} F_{gn}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \\ &= -\left(e_{2-q}^{v_{ij}} \right)^{\rho_i} F_{gn}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \left\{ e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i-1} \frac{d e_q^{-x_{ij}}}{d x_{ij}} \end{aligned} \quad (34)$$

なお、

$$\begin{aligned} \frac{d e_q^{-x_{ij}}}{d x_{ij}} &= \frac{d}{d x_{ij}} [1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \frac{1}{1-q} [1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{1}{1-q}-1} \frac{d}{d x_{ij}} [1 - (1-q)x_{ij}] \\ &= -[1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{q}{1-q}} \\ &= -\left(e_q^{-x_{ij}} \right)^q \end{aligned} \quad (35)$$

であるため、これを式(34)に代入すると、

$$\frac{\partial F_{gn}}{\partial x_{ij}} = \left(e_{2-q}^{v_{ij}} \right)^{\rho_i} F_{gn}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \left(e_q^{-x_{ij}} \right)^{q+\rho_i-1} \quad (36)$$

が得られる。ここで、 $x_{11} = x_{12} = \dots = x$ を上の式に代入したものを $\partial F_{gn}(x, x, \dots, x) / \partial x_{ij}$ と表記することにする。また、

$$\begin{aligned} F_{gn}(x, x, \dots, x) &= \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - e_q^{-x} \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

であり、ここで、

$$S = \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \quad (38)$$

とおくと、

$$F_{gn}(x, x, \dots, x) = \exp[-S e_q^{-x}] \quad (39)$$

と書くことができる。ネスト i の選択枝 j の選択確率 p_{ij} は

$$p_{ij} = \int_0^\infty \frac{\partial F_{gn}(x, x, \dots, x)}{\partial x_{ij}} dx \quad (40)$$

として与えることができるため、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \int_\Omega \exp[-S e_q^{-x}] \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} (e_q^{-x})^{q+\rho_i-1} dx \\ &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_\Omega (e_q^{-x})^q \exp[-S e_q^{-x}] dx \end{aligned} \quad (41)$$

である。そして、 $z = e_q^{-x}$ として、置換積分を行う。 $z = e_q^{-x} \geq 0$ であり、 e_q^{-x} の関数形から、積分範囲は $\infty \rightarrow 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_\infty^0 z^q e^{-S z} (-z^{-q}) dz \\ &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_0^\infty e^{-S z} dz \\ &= -\frac{1}{S} (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} [e^{-S z}]_0^\infty \\ &= \frac{(e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1}}{\sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \end{aligned} \quad (42)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} [e_q^v]^\rho &= [1 + (1-q)v]_{1-q}^{\frac{\rho}{1-q}} \\ &= \left[1 + \left\{ 1 - \left(1 + \frac{q-1}{\rho} \right) \right\} \rho v \right]_{1-(1+\frac{q-1}{\rho})}^{\frac{1}{1-(1+\frac{q-1}{\rho})}} \\ &= \exp_{1+\frac{q-1}{\rho}}(\rho v) \end{aligned} \quad (43)$$

であるため、

$$\left[e_{2-q}^{v_{ij}} \right]^{\rho_i} = \exp_{\rho_i}[\rho_i v_{ij}] = e_{\rho_i}^{\rho_i v_{ij}} \quad (44)$$

となる。ただし、

$$\rho'_i = 1 + \frac{1-q}{\rho_i} \quad (45)$$

である。また、

$$\left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \left(\sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho'_i}^{\rho_i v_{ij}} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \left(\exp_{\rho'_i} \left[\ln_{\rho'_i} \left[\sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho'_i}^{\rho_i v_{ij}} \right] \right] \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \quad (46)$$

である。ここで、さらに、

$$\Lambda_i = \ln_{\rho'_i} \left[\sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho'_i}^{\rho_i v_{ij}} \right] \quad (47)$$

とおく。これを用いると、

$$\left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \left(\exp_{\rho'_i} [\Lambda_i] \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \exp_{\rho'_i} \left(\frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) = e_{\rho'_i}^{\Lambda_i / \rho_i} \quad (48)$$

となり、したがって、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{(e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1}}{\sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \{e_{2-q}^{v_{ij}}\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \\ &= \frac{\exp_{2-q} \left(\frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) \exp_{\rho_i}(\rho_i v_{ij})}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q} \left(\frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) \sum_{j=1}^{n_i} \exp_{\rho_i}(\rho_i v_{ij})} \end{aligned} \quad (49)$$

が得られる。

次に、ネスト i の選択枝 j の効用 v_{ij} がネスト i 自体の効用 w_i と選択枝 j の効用 u_j から構成されている場合を考えよう。通常のネスティッドロジットモデルでは $v_{ij} = w_i + u_j$ と線形和で考えることが多いが、本研究では、一般化ネスティッドロジットモデルであるため、より一般的な構成を考える。和を一般化した q -和を以下のように定義しよう。

$$x \oplus_q y := x + y + (1-q)xy \quad (50)$$

$q=1$ の時は

$$x \oplus_1 y = x + y \quad (51)$$

となり、 q -和は通常の和も含んでいる。また、

$$\begin{aligned} \exp_q[x \oplus_q y] &= \exp_q[x + y + (1-q)xy] \\ &= [1 + (1-q)\{x + y + (1-q)xy\}]_{1-q}^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \{[1 + (1-q)x][1 + (1-q)y]\}_{1-q}^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \exp_q[x] \exp_q[y] \end{aligned} \quad (52)$$

であり、通常の指数関数のように、 q -指数関数内の変数の q -和は q -指数関数の積となる。

本研究では、 q -和を用いて、ネスト i の選択枝 j の効用 v_{ij} を

$$v_{ij} = w_i \oplus_{2-q} v_{ij} \quad (53)$$

とする。これを式(49)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \frac{\left(e^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}} \right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i} - 1}}{\sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \\
 &= \frac{\left(e^{w_i} \right)^{\rho_i} \left(e^{v_{ij}} \right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i} - 1}}{\sum_{i=1}^m e^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \\
 &= \frac{e^{w_i} \left(e^{v_{ij}} \right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i} - 1}}{\sum_{i=1}^m e^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \\
 &= \frac{e^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \left(e^{v_{ij}} \right)^{\rho_i}}{\sum_{i=1}^m e^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e^{v_{ij}} \right\}^{\rho_i}} \quad (54)
 \end{aligned}$$

ここで、式(47)の v_{ij} を v_j に置き換えたものとして、

$$\Lambda'_i = \ln \left[\sum_{j=1}^{n_i} e^{\rho_i v_j} \right] \quad (55)$$

とおく。なお、 ρ'_i は式(45)と同じである。また、式(48)と同様に、

$$\left[\sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \exp_{2-q}(\rho_i v_j) \right\}^{\rho_i} \right]^{\frac{1}{\rho_i}} = \exp_{2-q} \left[\frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \quad (56)$$

さらに、 $\left[e^{v_{ij}} \right]^{\rho_i} = e^{\rho_i v_{ij}}$ であり、これらを式(54)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \frac{\exp_{2-q}[w_i] \exp_{2-q} \left[\frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \left(\exp_{2-q}[v_{ij}] \right)^{\rho_i}}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q}[w_i] \exp_{2-q} \left[\frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \exp_{2-q}[v_{ij}] \right\}^{\rho_i}} \\
 &= \frac{\exp_{2-q} \left[w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \exp_{\rho_i}[\rho_i v_{ij}]}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q} \left[w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \sum_{j=1}^{n_i} \exp_{\rho_i}[\rho_i v_{ij}]} \quad (57)
 \end{aligned}$$

が得られる。これをq一般化ネステッドロジットモデル(q-NLモデル)と呼ぶことにする。これは通常のネステッドロジットモデル式と似ており、違いは指数関数の代わりにq指数関数が用いられており、通常の和の代わりにq和になっている点である。上の式で $q=1$ の時は通常のネステッドロジットモデルとなる。このようにq一般化ネステッドロジットモデルは通常のネステッドロジットモデルを含む一般的なネステッドロジット

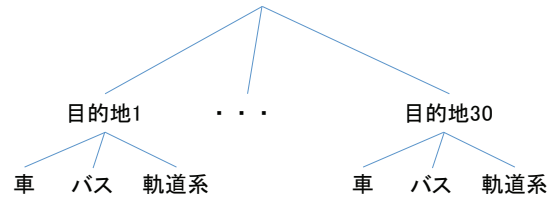


図-7 仮定したネスト構造

モデルである。

5. 一般化ネステッドモデルの適用例

上述のq一般化ネステッドロジットモデルを広島市交通実態調査データに適用し、買物目的トリップの交通手段・目的地選択行動の分析を行う。広島市交通実態調査データは、2008年に実施された調査で合計37,253票が回収されたものである。このうち、以下のクリーニング作業を行った後のデータで分析を行った。

- ・対象は広島市のみ
- ・Home-baseのトリップのみ抽出し、内々トリップは削除（内々のLOSデータが未整備なため、また、コンビニ等の細かい買物行動を対象から除外するためである）
- ・公共交通が利用できないODペアについてはデータから削除。
- ・当該目的地を選択したサンプルが10以上あるゾーンを選定。

クリーニング後のサンプル数は1,002の買い物トリップである。仮定したネスト構造は図-7の通りである。また、選択肢集合と説明変数は以下の通りである。

- ・交通手段の選択肢集合：
 - 車、バス、軌道系
- ・交通手段の説明変数：
 - 移動費用、移動時間、定数項
- ・目的地選択の選択肢集合（目的地）：
 - 30ゾーン（広島市全体で143ゾーン有り）
- ・目的地選択の説明変数：
 - 売り場面積、CBD(中区)ダミー、ゾーン面積

q-NLモデルのモデル式は、上述の通り、

$$P_{ij} = \frac{\exp_{2-q} \left[w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \exp_{1+\frac{1-q}{\rho_i}}[\rho_i v_{ij}]}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q} \left[w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \sum_{j=1}^{n_i} \exp_{1+\frac{1-q}{\rho_i}}[\rho_i v_{ij}]} \quad (58)$$

であるが、 w_i は目的地 i の確定項、 v_j は目的地 i に対する交通手段 j の確定項、 ρ_i はスケールパラメータである。上の式では $\exp_{2-q}[v] = [1 + (q-1)v]^{1/(q-1)}$ が含まれているため、 $q \neq 1$ の場合、 v のとり得る値は $-\infty$ から $+\infty$ ではなく、上

表-1 推定結果

| | Multinomial logit | | Nested logit | | q-nested logit | |
|---|-------------------|---------|--------------|---------|----------------|---------|
| | Estimate | t value | Estimate | t value | Estimate | t value |
| Mode choice | | | | | | |
| Travel time [100 min] | -3.675 | -15.84 | -4.367 | -21.04 | -5.226 | -13.63 |
| Travel cost [1000 JPY] | -4.259 | -8.63 | -1.930 | -5.00 | -3.484 | -3.85 |
| Constant (car) | -0.968 | -7.30 | -0.773 | -9.29 | -1.100 | -7.00 |
| Constant (public transport) | -1.179 | -10.51 | -0.709 | -8.75 | -0.989 | -6.39 |
| Destination choice | | | | | | |
| ln (shopping floor area [0.1 km ²]) | 0.234 | 6.95 | 0.233 | 6.96 | 0.120 | 4.44 |
| ln (zone size [10 km ²]) | 0.137 | 4.38 | 0.132 | 4.24 | 0.068 | 5.36 |
| CBD dummy (destination=Naka ward) | 0.876 | 8.47 | 0.884 | 8.62 | 0.427 | 5.27 |
| Scale parameter rho | 1.0 | (fixed) | 1.739 | 12.50 | 1.744 | 11.33 |
| q | 1.0 | (fixed) | 1.0 | (fixed) | 0.862 | 22.77 |
| Sample size | 1002 | | 1002 | | 1002 | |
| Initial log-likelihood at zero (q=1.0) | -4508.81 | | -4508.81 | | -4508.81 | |
| Final log-likelihood | -3639.51 | | -3619.73 | | -3612.09 | |
| AIC | 7293.02 | | 7255.46 | | 7242.18 | |

限または下限がある。よって、定義域を正又は負に限定できる設定が望ましい。 $0 \leq q \leq 1$ では、少なくとも $v < 0$ のすべての領域で $\exp_{2,q}[v]$ の計算が可能である。一方、確定項 v が正の場合、 $1 \leq q < 2$ では、少なくとも $v > 0$ のすべての領域で $\exp_{2,q}[v]$ の計算が可能である。いずれにしても、 q の値によって、分布形が大きく変わるため、適切な分布形となるような設定を考える必要がある。実際に推定を行う際は、効用の確定項を正又は負に限定できるのであれば、それに合わせて q の範囲を設定すれば良い。しかしながら、交通手段選択・目的地選択行動においては、通常、前者の効用は負の領域、後者の効用は正の領域をとる。したがって、本稿では、目的地選択の効用関数 w_i を以下のように設定することによって、両者が負となるようにする。

$$w_i = -\alpha_1 \sum_{i' \neq i}^m y_{i'1} - \alpha_2 \sum_{i' \neq i}^m y_{i'2} - \alpha_3 y_{i3} \quad (60)$$

ここで、 α_1 、 α_2 、 α_3 はそれぞれ商業床面積、ゾーン面積及びCBDダミーについてのパラメータ、 y_{i1} 、 y_{i2} 、 y_{i3} はそれぞれゾーン i の商業床面積、ゾーン面積及びCBDダミー（中区ダミー）である。

交通手段についての効用関数については

$$v_{ij} = \beta_{j0} + \beta_1 y_{ij1} + \beta_2 y_{ij2} \quad (60)$$

である。ここで、 β_{j0} は定数項、 β_1 、 β_2 はそれぞれ所要時間及び費用についてのパラメータ、 y_{ij1} 、 y_{ij2} はそれらの変数である。

(2) 推定結果

多項ロジットモデル、通常のネスティッドロジットモデル、一般化ネスティッドロジットモデルの3つのモデルの推定結果を表-1に示す。推定されたパラメータについては、全てのモデルにおいて、交通手段選択に関するパラメータは負、目的地選択に関するパラメータは正となっており、旅行費用・時間の増加に伴い効用は低下すること、商業施設の床面積が大きい地域ほど目的地として選択される傾向にあることが示された。また、CBDダミーが正で有意であることから、都心部に該当するゾーンが選択される傾向があることが確認された。

AICに基づきlogitモデル、nested logitモデル、q-nested logitモデルを比較すると、q一般化ネスティッドロジットモデルを用いることによってモデル適合度が向上することが確認された。このことは、前述の通り、q一般化ロジットモデルの性質から、誤差項と確定項が分離されているのではなく、効用の平均の増大に伴いばらつきが増大することなどによって、適合度が上がっていると思われる。より具体的には、一般化旅行費用の高い交通手段ほど、費用の認知誤差が大きくなること（交通手段選択）、買物魅力度の高い目的地ほど、認知される魅力度の個人間差異が大きくなること（目的地選択）を示している。政策の視点からは、前者は、一定の旅行時間短縮は、一般化旅行費用の高いODよりも低いODにおいて手段選択に与える影響が大きい傾向にあること、後者は、ある特定の新たな商業施設が、既に多くの商業施設が立地するゾーンよりも既存の商業施設が少ないゾーンに立地する場合、目的地選択に与える影響が大きい傾向にあ

ることを示唆している。

6. おわりに

ロジットモデルでは効用はガンベル分布に従う。ガンベル分布は極値分布の一つであり、ガンベル分布を含むより一般的な極値分布が一般化極値分布である。著者らは一般化極値分布に従う効用による離散選択モデルである q -一般化ロジットモデルを開発した。本稿では、これを多変量化し、選択構造をネスト化した q -一般化ネステッドロジットモデルを構築した。そして、それを広島市交通実態調査データに適用し、買物目的トリップの交通手段・目的地選択行動の分析を行った。 q -一般化ネステッドロジットモデルの適合度は多項ロジットモデルや通常のネステッドロジットモデルよりも高く、 q -一般化ネステッドロジットモデルの妥当性を確認することができた。

参考文献

- 1) 例えば, 藁谷千風彦: 統計分布ハンドブック, 朝倉書店, 東京, 2003.
- 2) Nakayama, S. and Chikaraishi, M.: Unified closed-form expression of logit and weibit and its extension to a transportation network equilibrium assignment, *Transportation Research, Part B*, Vol. 81, pp. 672-685, 2015.
- 3) Castillo, E., Menendez, J. M., Jimenez, P., & Rivas, A.: Closed form expressions for choice probabilities in the Weibull case, *Transportation Research, Part B*, Vol. 42, pp. 373-80, 2008.
- 4) McFadden, D.: Modelling the choice of residential location, Karlqvist, A. et al. eds., *Spatial Interaction Theory and Planning Models*, North-Holland, Amsterdam, 75-96, 1978.
- 5) Ben-Akiva, M. and Lerman, S. R.: *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*, 8th ed., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 2000.
- 6) Mattsson, L.-G., Weibull, J. W., & Lindberg, P. O.: Extreme values, invariance and choice probabilities, *Transportation Research, Part B*, Vol. 59, pp. 81-95, 2014.

(2016. 7. 31 受付)

Q-GENERALIZED NESTED LOGIT MODEL

Shoichiro NAKAYAMA, Makoto CHIKARAISHI

In the field of transportation, the logit model has widely been used as a random utility discrete choice model. The error terms in the logit model follow the Gumbel-distribution, which is an extreme value distribution. The authors have developed the q -generalized logit model that includes the standard logit model. In this paper, the q -generalized logit model is “multivarized,” and the q -generalized nested logit model is developed. In the proposed model, the alternatives are nested, and their utilities follow the multivariate generalized extreme value distribution.