単一終点ネットワークにおける動的交通量配分問題のNash均衡解の解法について

佐津川 功季[1]・和田 健太郎[2]

[1]学生会員　東京大学大学院 工学系研究科 博士後期課程（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp
[2]正会員　東京大学助教 生産技術研究所（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

本稿は井料[1)]により提案された，動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法「順序配分アルゴリズム」について，いくつかの修正・補足を行う．具体的には，単一終点ネットワークに対して順序配分アルゴリズムが均衡解を導出することを保証する定理（定理 3b, 井料[1)]）に不備があることを反例とともに示す．この反例は，ネットワーク上に待ち行列が存在する場合，その最後尾に到着できる任意の車両が同一時刻に終点に到着できることを指摘するものであり，原著論文で示された終点到着時刻に基づく車両の配分順序付けが多くの場合不可能であることを意味する．その上で，単一終点ネットワークに対する適切な配分順序付けが存在することを新たに証明し，この構造のネットワークでは順序配分アルゴリズムが必ず均衡解を導出することを保証する．

Key Words: *dynamic traffic assignment, Nash equilibrium, single destination network, solution algorithm*

1.　はじめに

渋滞現象を明示的に扱うことのできる動的交通均衡配分は，中・長期的な交通計画策定を主なスコープとする静的なモデルでは評価が難しかった，きめ細やかな交通制御，需要管理施策や Intelligent Transportation Systems の評価といった現代的な交通計画上の課題に対応するために開発が進められている．動的交通均衡配分問題は，渋滞現象の記述にともなう解析上の困難から，解の存在，一意性や安定性などの数理特性に関して不明な点が多く残されている（詳細は，近年のレビューを参照[2),3),4)]）．また，均衡問題（と等価な変分不等式問題）に対する多くの解法が提案されてきたが，均衡解への収束を保証する解法はいまだに存在しない．その理由は，これらの解法が問題の写像の単調性を要求するが，その条件は動的均衡配分では一般に満たされないためである[5)]．[1]．

これに対し井料[1)]は，いくつかの条件下では必ず均衡解の導出を保証する解法「順序配分アルゴリズム」を提案した．この解法は，動的均衡配分問題を出発/終点時刻別に分解して解く方法[6),7)]に着想を得たものであり，「ある時刻でのリンク旅行時間はより早い時刻にリンクに流入した車両にのみ依存する」という交通流の「因果律」を満たす様々な交通流モデルの下で均衡状態を求めることができる．より具体的には，当該手法はまず，車両を離散化し Nash 均衡として動的均衡配分状態を定義する．そして，「最早未配分車両」(i.e., ネットワークに配分されていない車両のうち，当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が，他のどの未配分車両の流入時刻より遅くない車両）を順次配分することにより，ヒューリスティックな計算をすることなく均衡解を導いている．すなわち，未配分車両の適切な「順序付け」が可能な構造を持つネットワークでは必ず均衡解を導出することができる．

この論文の中で著者は，単一起点の一般構造のネットワークでは，起点からの出発時刻に基づき順序付けが可能であることを証明した．そして，単一終点ネットワークにおいても同様の順序付けが可能であると述べている．具体的には，唯一の終点への到着時刻が最も早い未配分車両が最早未配分車両であると説明されている．しかし，単一終点ネットワークでは終点到着時刻が最も早い未配分車両がその最短経路上のリンクに他のいかなる未配分車両よりも早く（厳密には遅くなく）到着するとは限らない．例えば，終点に接続するリンク上に待ち行列が存在する場合，その最後尾に到着できる任意の未配分車両が同一時刻に終点に到着でき，当然その中にはそのリンクへの到着が他の未配分車両よりも遅い車両も存在する．つまり，終点到着時刻の情報のみから最早未配分車両を特定するのは不可能である．従って現段階では，単一終点ネットワー

[1] 2 つ以上のボトルネックが直列に配置されている比較的単純な状況においても，待ち行列条件の単調性が満たされないことが示している (Proposition 4.5, Akamatsu et al.[5)]).

クに対する順序配分アルゴリズムの適用可能性（i.e., 均衡解の導出）は保証されていないと言える．

本稿は，以上で概要を示した，順序配分アルゴリズムの単一終点ネットワークに対する均衡解導出保証の不備をより正確な形で述べる．その上で，単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在を証明する．

本稿の構成は以下の通りである．続く **2.** では，井料[1]により定式化された車両を離散化した動的均衡配分問題「SG-DTA（Strategic Game of Dynamic Traffic Assignment)」と，その解法である順序配分アルゴリズムを概説する．**3.** では，井料[1]で示された単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在証明に不備があることを反例とともに示す．**4.** では，単一終点ネットワークにおいて，未配分車両の適切な順序付けが可能であることを証明し，順序配分アルゴリズムにより均衡解が導出できることを示す．最後に **5.** では，順序配分アルゴリズムと時間分解法の関係に関する議論を行う．

2. SG-DTA と順序配分アルゴリズム

本章では，SG-DTA と順序配分アルゴリズムについて，本稿で必要な事項のみを井料[1]に基づき記述する．また，その他のより技術的あるいは詳細な仮定等は，井料[1]と同様である．なお，原著論文でいくつか曖昧な定義がみられるので，その部分については再定義を行う．

(1) ネットワーク

本稿で取り扱うネットワークは，ノードと有向リンクから構成される．ノードの集合を $\mathcal{V}$，有向リンクの集合を $\mathcal{E}$ とし，リンク $l \in \mathcal{E}$ の上流端ノードを $v_u(l)$，下流端ノードを $v_d(l)$ と記す．ネットワーク上を走行する車両は離散化されており，全車両の集合を $\mathcal{N}$ とする．車両 $i \in \mathcal{N}$ の起終点ノード o_i, d_i と出発時刻 τ_i は外生的に与えられるとし，$o_i = o_j$ ならば $\tau_i \neq \tau_j$ とする．

車両 i が o_i から d_i までリンク $l_1, ..., l_m, ..., l_M$ をこの順番で通過するとき，その経路を $r_i = \{l_1, ..., l_m, ..., l_M\}$ と表す．どの車両も全ての acyclic な経路を選択でき，車両 i の経路選択肢集合を $\mathcal{R}_i$ で示す．全車両の経路選択はベクトル $\mathbf{r}$ で，車両 i 以外の車両の経路選択はベクトル $\mathbf{r}_{-i}$ で記述する．この経路ベクトルは，$\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$ のように r_i と $\mathbf{r}_{-i}$ を束ねた記述も行う．また，$\mathcal{R}_i$ の全車両に対する直積集合を $\mathcal{R}_{ALL} = \prod_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{R}_i$ と定義する．

配分計算過程では，一部の車両のみをネットワークに配分している状況を考えることがある．このとき，まだ配分されていない車両を「未配分車両」と呼び，その集合を $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ で表す．ここで，未配分車両 i の経路（i.e., 配分されていない状態）は ϕ_i と書き，$\phi_i \in \mathcal{R}_i$ である．未配分車両をネットワークに配分することを「追加配分」と呼ぶ．なお，未配分車両 $\forall i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を経路 $\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}$ の最初のリンクから m 番目のリンク l_m まで追加配分している場合の車両 i の経路を ρ_i^m で示す．一方，すでに配分された車両は「既配分車両」と名付け，その集合を $\mathcal{N}^*(\mathbf{r})$ で示す．

車両 i 以外の経路選択が $\mathbf{r}_{-i}$ であるとき，経路 r_i を利用することによる車両 $i \in \mathcal{N}$ の終点到着時刻を $g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$ と書く．また，未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が，仮に経路 $\rho_j \in \mathcal{R}_j - \{\phi_j\}$ を利用した場合に，リンク $l \in r_j$ への流入時刻，流出時刻をそれぞれ $t_j(l; (\rho_j, \mathbf{r}_{-j})), u_j(l; (\rho_j, \mathbf{r}_{-j}))$ と書く．同様に，既配分車両 $i \in \mathcal{N}^*(\mathbf{r})$ の経路 r_i 上のリンク l への流入時刻，流出時刻をそれぞれ $t^*(l; (r_i, \mathbf{r}_{-i})), u^*(l; (r_i, \mathbf{r}_{-i}))$ と書く．

(2) 交通流モデル

各車両のリンク流出入時刻は，採用された交通流モデルによって決定される．SG-DTA においては，下記に示す条件を満たす交通流モデルであれば，任意のモデルを使用できる．

1. 【一意性】: リンク流出時刻は，リンクへ流入する全車両の流入時刻を決定すれば一意に定まる.】
2. 【車両の同質性】: あるリンクを使用する車両を別の車両に置換しても，リンク流入時刻が同じであれば，他のどの車両のリンク流出入時刻も変化しない．
3. 【正の旅行時間】: あるリンクへの流入時刻と同じかより早い時刻に同一のリンクを流出する車両はない．
4. 【軌跡の連続性】: 車両 i の経路 r_i 上で連続する任意の 2 つのリンク $l_1, l_2 \in r_i$（l_1 が上流側）に対し，上流側のリンクの流出時刻は下流側のリンクの流入時刻と一致する：
5. 【同時刻流入の回避】: 同一リンクへ同一時刻に流入する車両は存在しない．具体的には，各車両に優先順位 p_i の値を外生的に与える．複数の車両が同時に同一のリンクへ流入しようとする場合，それらのうち優先順位が最も小さい車両 1 台のみが流入し，他の車両は上流側リンクの最下流端で待機する．
6. 【因果律】: ある時刻に道路に流入する車両が，より早い時刻に道路に流入した車両の旅行時間に影響を与えることはない．具体的には，経路ベクトル $\mathbf{r}$ での未配分車両 $\forall j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ と経路 $\forall \rho_j \in \mathcal{R}_j - \{\phi_j\}$ を考え，このとき，

$$t_i^*(l_{m+1}; (\rho_j^m, \mathbf{r}_{-j})) < t_j(l_{m+1}; (\rho_j^{m+1}, \mathbf{r}_{-j})), \quad (1)$$

となる既配分車両 $\forall i \in \mathcal{N}^*(\mathbf{r})$ に対し，

$$t_i^*(l_{m+1}; (\rho_j^{m+1}, \mathbf{r}_{-j})) = t_i^*(l_{m+1}; (\rho_j^m, \mathbf{r}_{-j})), \quad (2)$$

$$u_i^*(l_{m+1}; (\rho_j^{m+1}, \mathbf{r}_{-j})) = u_i^*(l_{m+1}; (\rho_j^m, \mathbf{r}_{-j})), \quad (3)$$

が成立する．

7. 【単調増加】：車両をあるリンクに追加配分したとき，追加した車両以降にリンクへ流入する車両のリンク流出時刻は少なくとも早くはならない．具体的には，$N^*(\mathbf{r}) \subset \mathcal{N}^*(\mathbf{s})$ となる経路ベクトル $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ と，未配分車両 $\forall i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を考え，i を経路 $\forall \rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}$ の起点からリンク l_m まで追加配分する．このとき，

$$t_i(l_m; (\rho_i^m, \mathbf{s}_{-i})) \geq t_i(l_m; (\rho_i^m, \mathbf{r}_{-i})), \quad (4)$$

であれば，

$$u_i(l_m; (\rho_i^m, \mathbf{s}_{-i})) \geq u_i(l_m; (\rho_i^m, \mathbf{r}_{-i})), \quad (5)$$

が成立する．

8. 【FIFO】：各リンクでは First In First Out が成立する．すなわち，より早く流入した車両がより早く流出する．

なお【因果律】と【単調増加】は，混雑したリンクに車両を追加したときに，追加された車両以降にリンクに流入する車両の旅行時間が増加するという，動的な交通量配分における外部性の非対称性を表している．

(3) SG-DTA と Nash 均衡状態の定義

SG-DTA は「プレイヤー（車両）」，「プレイヤーの戦略集合（経路選択肢集合）」，「戦略（経路）の利得」（および利得を計算するための交通流モデル）から構成される．利得は経路の一般化交通費用の符号を逆にしたものとし，一般化交通費用は終点到着時刻と等しいとする．各車両の出発時刻は固定されており，一般化交通費用を終点到着時刻とすることは旅行時間を用いることと等価である．このとき，Nash 均衡状態 $\mathbf{r}$ は，

$$g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \leq g_i(s_i, \mathbf{r}_{-i}) \quad \forall s_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\},\ \forall i \in \mathcal{N} \quad (6)$$

を満たす状態であると定義する．また，ここでは純粋戦略のみを考慮している．

(4) 順序配分アルゴリズム

以上で定式化した SG-DTA の解法として，井料は「順序配分アルゴリズム」を提案した．順序配分アルゴリズムでは，未配分車両のうち「最早未配分車両」（i.e., 当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が，他のどの未配分車両の流入時刻より遅くない車両）を 1 台ずつ最短経路に追加配分して，SG-DTA を解く．

以下では，最早未配分車両の定義を記述する．まず，「最早リンク流入時刻」を下記のように定義する．

定義 1. （最早リンク流入時刻，井料 [1)]）$\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える．未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の経路選択肢集合 $\mathcal{R}_i$ に含まれるいずれかの経路 1 本以上に含まれるリンクの集合 $\mathcal{E}_i$ を，

$$\mathcal{E}_i \equiv \{\, l \mid l \in \rho_i,\ \rho_i \in \mathcal{R}_i \} \quad (7)$$

と定義する．このとき，車両 i がリンク $l \in \mathcal{E}_i$ に最も早く流入できる時刻

$$\bar{t}_i(l; \mathbf{r}) = \min_{\rho_i \in \{s_i | s_i \in \mathcal{R}_i, l \in s_i\}} t_i(l; (\rho_i, \mathbf{r}_{-i})) \quad (8)$$

を「最早リンク流入時刻」と呼ぶ．

最早リンク流入時刻は，ある未配分車両があるリンクへ流入できる最も早い時刻を示す．

次に，ある未配分車両が配分されるときの「最短経路」の定義を以下のように与える．

定義 2. （未配分車両の最短経路，井料 [1)]）$\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考え，そのときの未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が追加配分されるときの最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ を以下を満たす経路と定義する：

$$\overline{\rho}_i(\mathbf{r}) \in \arg\min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}}.\ g_i(\rho_i, \mathbf{r}_{-i}). \quad (9)$$

ここで，最短経路は複数存在しうる．

これらの定義を用いて「最早未配分車両」は下記のように定義される．

定義 3. （最早未配分車両）未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})\ (\neq \emptyset)$ の最短経路のうち次の条件：

$$\bar{t}_j(l; \mathbf{r}) \geq t_i(l; (\overline{\rho}_i(\mathbf{r}), \mathbf{r}_{-i})) \qquad \forall l \in \mathcal{E}_j \cap \overline{\rho}_i(\mathbf{r}), \forall j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) - \{i\} \quad (10)$$

を満たす経路が存在するならば，$i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ は最早未配分車両であると定義し，それを $e(\mathbf{r})$ で表す．また，未配分車両が i のみである場合，それは最早未配分車両であるとする．

この「最早未配分車両」の定義は，井料 [1)] とは異なる．井料では，最短経路が複数ある場合には任意の 1 本を使うとしているが，そうすると，ある未配分車両が最早未配分車両であるか否かが最短経路の選び方（i.e., 選んだ経路が条件 (10) を満たすか否か）で変わりうるため，望ましくない．一方，上記の定義は，ある未配分車両の最短経路のうち，条件 (10) を満たす経路が「存在」することを最早未配分車両の定義としており，その車両が最早未配分車両であるか否かは一意に決まる．

最早未配分車両は，条件 (10) を満たす最短経路をとったときにその経路上の全リンクにおいて他のどの未配分車両よりも遅く到着することはない．そのため，最早未配分車両を順次最短経路に追加配分することにより，後から追加配分される車両は既に配分された車両を追い越すことはなく，どの車両も事後的な最短経路を選択している状態が達成される（i.e., Nash 均衡状態 (6) が実現する）．

この考え方に基づき，SG-DTA の均衡解を導出するアルゴリズムである順序配分アルゴリズムは以下のように構築される：

順序配分アルゴリズム

1. 経路ベクトル $\mathbf{r}^0$ を，$\forall i \in \mathcal{N}$ について $r_i^0 = \phi_i$ とすることにより用意する．また，【同時刻流入の回避】における p_i を定める．$n = 0$ とする．
2. $k = e(\mathbf{r}^n)$ とする．$e(\mathbf{r}^n)$ が複数あるときは，最小の p_i を持つ車両を k とする．同時に $\overline{\rho}_k(\mathbf{r}^n)$ を求める．ただし，$e(\mathbf{r}^n)$ が存在しなければ「求解不可能」としてアルゴリズムを停止する．
3. $\mathbf{r}^{n+1} = (\overline{\rho}_k(\mathbf{r}^n), \mathbf{r}^n_{-k})$ とし，n を $n+1$ に更新する．
4. $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) = \emptyset$ であれば，経路ベクトル $\mathbf{r}^n$ を SG-DTA の均衡解としてアルゴリズムを終了する．そうでなければステップ 2 に戻る．

順序配分アルゴリズムは最早未配分車両 $e(\mathbf{r}^n)$ の存在が保証されれば，有限の繰り返し回数で解を必ず導出する．しかしながら，最早未配分車両の存在性および唯一性はこの時点では保証されず，特に存在性が保証されない場合，順序配分アルゴリズムによる均衡解の導出は保証されない．そのため，順序配分アルゴリズムを適用する際には，適用先のネットワークにおいて最早未配分車両が存在することを示す必要がある．

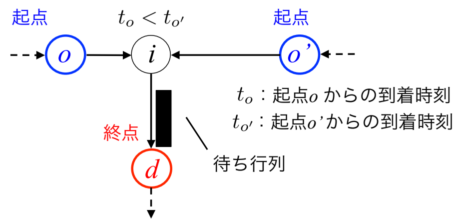
3. 単一終点ネットワークの最早未配分車両の存在定理 [1)] に対する反例

本章では，単一終点ネットワークの最早未配分車両の存在定理（定理 3b, 井料 [1)]）に対する反例を挙げ，その存在定理の証明過程における不備を具体的に示す．

まず，井料 [1)] の定理 3b を以下に引用する：

> 単一ネットワークでは到着時刻 $g_i(\overline{\rho}_i(\mathbf{r}), \mathbf{r}_{-i})$ が最小の未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が最早未配分車両である．

これは，一見自然な主張のように思われるが，最早未配分車両の定義と矛盾することになる．このことを具体的に見るために，図–1 に示すような状況を考える．このネットワークは，終点ノードが d，起点ノードが $\{o, o'\}$ であり，出発時刻・旅行時間の関係から起点 o から「追加配分」される「未配分車両」がより早くノード i に到着できるものとする（i.e., 起点 o' の未配分車両は定義上，最早未配分車両ではない）．また，リンク (i,d) 上に十分な長さの待ち行列が存在しており，どちらの起点から追加配分される未配分車両もその待ち行列の最後尾に追いつけるとしよう．すると，いずれの未配分車両を追加配分しても，終点到着時刻は同一（i.e., 待ち行列が捌けきる時刻）となる．つまり，定義上は起点 o' の未配分車両は最早未配分車両でないにも関わらず，定理 3b 上は最早未配分車両となるという矛盾が発生する．



図–1 終点到着時刻基準に基づく最早未配分車両決定の反例

では，この誤りはどこで生じたのであろうか．それは，定理 3b の証明中の次の主張（補題 3.1，井料 [1)]）である：

> 未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を通る最短経路 (v_1 が上流側) に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1, t_2 とする．一方，$i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を配分せず，別の未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る経路（ノード v_1 が上流側）に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1^*, t_2^* とする．このとき以下が成立：
>
> $$t_1^* > t_1 \ \Rightarrow \ t_2^* > t_2. \tag{11}$$

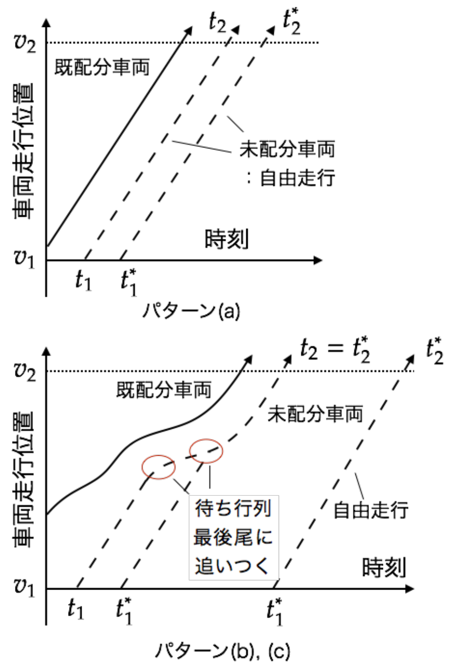
この主張の証明において井料 [1)] は，式 (11) が成立しないと仮定して，「First In First Out (FIFO) 原則」より矛盾を導いている．しかし，FIFO 原則はネットワークに実際に配分された車両が受ける制約であり，未配分車両同士の到着順序の比較に利用することはできない．実際，式 (11) が成立しないことは図–1 の例で見た通りである．

一般に，あるリンクに異なる時刻に流入した 2 台の未配分車両の走行パターンは図–2 に示す 3 つである [2]；(a) 両車両が自由走行；(b) 両車両が追従走行；(c) 先に流入する車両が追従走行，後に流入する車両が自由走行．(a) では，いずれの未配分車両も自由走行速度で走行するため，リンク流入時刻の差はちょうどリンク流出時刻の差となる：$t_1^* - t_1 = t_2^* - t_2$．(b) では，いずれの未配分車両も既配分車両に制約されるため，両者のリンク流出時刻は同一となる：$t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2 = t_2^*$．(c) では，後にリンクに流入する車両のリンク流出時刻は，先に流入する車両のリンク流入時刻より遅くなる：$t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2^* > t_2$．従って，式 (11) は以下のように修正されるべきであろう．

$$t_1^* > t_1 \ \Rightarrow \ t_2^* \geq t_2. \tag{12}$$

しかし，残念ながら，式 (11) を修正するだけでは不十分である．なぜなら，式 (9) で定義した「最短経路」では，経路上の全てのリンク上流ノードへ他の経路を利用した時よりも遅くなく到着できる（i.e., 最短経路

[2] 「同一経路」を通る 2 台の未配分車両を考えても成立する．



図–2 2 台の未配分車両の走行パターン

上で Dynamic Programming（DP）原理が成立する）ことを保証していないためである．例えば，終点リンクに接続するリンクに十分な待ち行列が存在し，車両はそのリンクを必ず通る場合を考えてみよう．この場合，待ち行列の最後尾に追いつくことができる任意の経路が「最短経路」である．すなわち，この「最短経路」を用いる限り，上記主張の未配分車両 i が v_1, v_2 間における最短経路を通る保証はないため，式 (12) が成立することを証明することはできない．この性質は，通常の最短経路問題であれば必ず成立するが，本稿で考えているような待ち行列が存在するネットワークでは，この制約なしに DP 原理は自動的に成立しない．

そこで，上記の性質を満たす「狭義最短経路」を新たに定義する：

定義 4.（未配分車両の狭義最短経路）$\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える．このとき，未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の狭義最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ を以下を満たす経路と定義する：

$$\overline{\rho}_i(\mathbf{r}) \in \arg\min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}} \cdot g_i(\rho_i, \mathbf{r}_{-i})$$
$$\text{s.t.} \quad t_i(l; (\rho_i, \mathbf{r}_{-i})) = \bar{t}_i(l; \mathbf{r}) \quad \forall l \in \rho_i. \tag{13}$$

これは，ある未配分車両が狭義最短経路を利用するとき，その経路上の全てのリンク上流ノードへ他の経路を利用した時よりも遅くなく到着できることを意味する．つまり，最短経路上で Dynamic Programming (DP) 原理が成立することを要求するものである．この性質は，通常の最短経路問題であれば必ず成立するが，本稿で考えているような待ち行列が存在するネットワークでは，制約 (13) なしには DP 原理は自動的に成立しない．

以上を用いると，下記の補題が成立する．

補題 1.（補題 3.1[1] の修正版）未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る狭義最短経路（v_1 が上流側）に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1, t_2 とする．一方，$i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を配分せず，別の未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る経路（v_1 が上流側）に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1^*, t_2^* とする．このとき，以下（i.e., 式 (12)）が成立する：

$$t_1^* > t_1 \;\Rightarrow\; t_2^* \geq t_2 \tag{14}$$

証明. 式 (14) が成立しないと仮定する．このとき，$t_1^* > t_1$ かつ $t_2 > t_2^*$ が成立しうる．これは，車両 i が v_1, v_2 間で車両 j が用いる経路を用いれば，現在の到着時刻 t_2 よりも早くノード v_2 に到着できることになり，現在の経路が狭義最短経路であることに矛盾する．よって背理法により式 (14) が成立する．（証明終）

なお，式 (11) は，単一起点ネットワークの最早未配分車両の存在定理（**定理 3a**, 井料 [1]）の証明にも用いられているが，**補題 1** を用いれば同様に証明することができる．さらに，井料 [1] の「**5.** テストネットワークでの計算例」では単一終点ネットワークが用いられているが，この計算例は最早未配分車両の定義を直接用いて計算されているため [8]（i.e., 定理 3b を用いていないため），Nash 均衡解が導出されている．これは，単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在を示唆しているが，次章ではその存在を保証する定理を示そう．

4. 単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在証明

本章では，単一終点ネットワークに対して全ての未配分車両が最早未配分車両ではないことを仮定し，矛盾を導くことにより最早未配分車両の存在を証明する．その際，未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が唯一の終点に最も早く到着することができる時刻を u_i（$= \min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}} \cdot g_i(\rho_i, \mathbf{r}_{-i})$）と表す．さらに，「割り込み」という概念を導入する．

定義 5.（割り込み）$\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える．未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ のある狭義最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) - \{i\}$ が「割り込み」できるとは，狭義最短経路上のリンク $l \in \overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ および車両 j の経路 $\rho_j \in \mathcal{R}_j$ のうち次の条件：

$$t_j(l; (\rho_j, \mathbf{r}_{-j})) < \bar{t}_i(l; \mathbf{r}) \qquad l \in \rho_j \cap \overline{\rho}_i(\mathbf{r}) \tag{15}$$

を満たすリンク l，経路 ρ_j が存在することをいう．

すなわち，ある未配分車両の全ての狭義最短経路が割り込まれているとき，その未配分車両は最早未配分車

両ではない．また，経路 ρ_j は様々なものが考えられるが，以下の議論では，リンク l まで車両 i より早く流入でき，かつ，$v_u(l)$ から終点 d までの間は車両 i の狭義最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に沿って走行する経路のみを考える．

以下では最早未配分車両の存在定理の証明に先立ち，この「割り込み」に関わる一連の補題を示す．ただし，以下では特別な記述がない限り，最短経路は基本的に「狭義最短経路」を指す．

補題 2. 単一終点ネットワークの 2 台の未配分車両 $i, j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ について，車両 j が車両 i のある最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に割り込みできるならば，以下が成立する：

$$u_j \leq u_i. \tag{16}$$

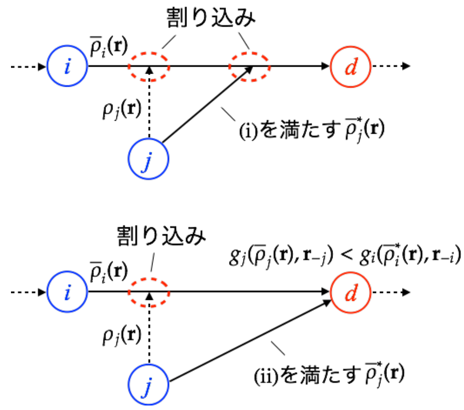
証明. 車両 j が割り込むリンクを l，そのときの経路を ρ_j と書く．いま，経路 ρ_j が最短経路のとき，補題 **1** の $v_1 = v_u(l)$，$v_2 = d$ とすれば，式 (15) より式 (16) が成立．一方，経路 ρ_j が最短経路でないとき，式 (12) より ρ_j の終点到着時刻 $g_j(\rho_j, \mathbf{r}_{-j})$ は u_i より遅くなく ($g_j(\rho_j, \mathbf{r}_{-j}) \leq u_i$)，かつ，経路 ρ_j とは別に最短経路が存在するため（$u_j \leq g_j(\rho_j, \mathbf{r}_{-j})$），式 (16) が成立．（証明終）

補題 3. 単一終点ネットワークにおいて，未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が，未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ のある最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に割り込みできるとする．このとき，車両 j は次のうち少なくとも一つの条件を満たす最短経路 $\overline{\rho}_j(\mathbf{r})$ を持つ：
(i) 車両 i の最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に対して割り込める，
(ii) 車両 i より早く終点に到着することができる．

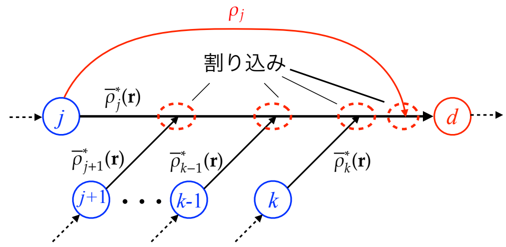
証明. 車両 j が割り込むリンクを l，そのときの経路を ρ_j と書き，その経路が最短経路であるか否かで場合分けを行う．経路 ρ_j が狭義最短経路の場合，条件 (i) が成立することは明らか．経路 ρ_j が狭義でない最短経路の場合，その経路上のいずれかのリンクにより早く到着できる（i.e., 式 (13) が成り立つ）狭義最短経路が存在するため条件 (i) は成立．経路 ρ_j が最短経路でない場合，その経路より早く終点に到着できる狭義最短経路が存在するため条件 (ii) が成立．（証明終）

ここで，補題 **3** を満たす未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の最短経路を $\vec{\rho}^{\,*}_j(\mathbf{r})$ と表す（そのイメージは図–**3** を参照）．

補題 4. 単一終点ネットワークにおいて，2 台以上の未配分車両が存在している状況（i.e., $1 < |\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$）を考え，次のような「割り込みの連鎖」が可能であるとする：未配分車両 i の最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_i(\mathbf{r})$ は未配分車両 j に割り込まれ，その車両 j の最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_j(\mathbf{r})$ は未配分車両 k に割り込まれ，....　そして，この連鎖に含まれる未配分車両をその順序通りに $i = 1, 2, \ldots, k$ と番号付けする（$k \leq |\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$）．このとき，未配分車両 k の最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_k(\mathbf{r})$ は，未配分車両 $i = 1, 2, \ldots, k-1$ に割り込まれることはない．



図–**3**　補題 3 を満たす最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_j(\mathbf{r})$ のイメージ



図–**4**　狭義最短経路による割り込みの連鎖のイメージ

証明. ある未配分車両 $j\,(< k)$ が，最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_k(\mathbf{r})$ に割り込めると仮定する．このとき，補題 **2** から $u_j \leq u_k$ であり，かつ，割り込みの連鎖に含まれる車両についても同様の関係が成り立つため，

$$\underbrace{u_j \leq}_{\text{仮定}} \underbrace{u_k \leq u_{k-1} \leq \ldots \leq u_{j+1} \leq u_j \leq \ldots}_{\text{「割り込みの連鎖」}} \tag{17}$$

である．これは，以下が成立することを意味する：

$$u_k = u_{k-1} = \ldots = u_{j+1} = u_j. \tag{18}$$

さらにこれは，車両 j から車両 k までの割り込みの連鎖において，補題 **3** で示した条件 (i)（のみ）が常に満たされることを意味している．つまり，割り込みに用いられる経路は最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_i(\mathbf{r})$ であり [3]，その最短経路が次の車両に割り込まれる．そのため，車両 k は最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_k(\mathbf{r})$ を用いて車両 $i = k-1, \ldots, j+1$ が割り込みに用いたすべての最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_i(\mathbf{r})$，および，車両 j の割り込まれる最短経路 $\vec{\rho}^{\,*}_j(\mathbf{r})$ に割り込むことができる（図–**4**）．

ここで仮定より，車両 j はある経路 ρ_j を用いて経路 $\vec{\rho}^{\,*}_k(\mathbf{r})$ に割り込むことができるが，これは経路 $\vec{\rho}^{\,*}_j(\mathbf{r})$ 上のいずれかのノードにより早く到着できることになり，(狭義) 最短経路であることに矛盾．よって背理法により補題は成立する．（証明終）

この補題は，k 台の車両の全ての最短経路が割り込まれるためには，少なくとも $k+1$ 台の車両が必要である

[3] 割り込みの連鎖の最初の車両の最短経路は単に $\overline{\rho}_1(\mathbf{r})$ であるが，ここでは $\vec{\rho}^{\,*}_1(\mathbf{r})$ と表している．

ことを示している．そして，この補題を用いることにより次の定理が得られる．

定理 1.（単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在）単一終点ネットワークにおいて，$\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える．このとき，未配分車両のうち少なくとも一台は最早未配分車両である．

証明. 全ての未配分車両は最早未配分車両ではないと仮定する．このとき，全ての未配分車両の全ての最短経路に割り込みが可能でなければならない．しかし，補題 **4** によれば，$|\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$ 台の未配分車両の全ての最短経路が割り込まれるには，少なくとも $|\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})| + 1$ 台の未配分車両が必要となる．これは $|\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$ 台の未配分車両が存在する状況と明らかに矛盾．よって，未配分車両のうち少なくとも一台は最早未配分車両である．（証明終）

5. ディスカッション

本稿では，井料 [1] で示された単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在証明に不備があることを示した上で，新たにその存在を保証する定理を証明した．その過程で，「最早未配分車両」や「最短経路」といった順序配分アルゴリズムのコアとなる概念のより適切な定義を与えた．前者は，これまで必ずしも一意でなかった最早未配分車両を一意に決めるためのものである．一方，後者は最短経路上で DP 原理が成り立つことを要求するものであり，本稿の最早未配分車両の存在証明において必要不可欠なものである [4]．

そもそも「最短経路上では必ずしも DP 原理が成立しない」という待ち行列の存在に起因する動的均衡配分問題の性質は，これまで明示的に述べられてこなかった（あるいは見落とされていた）ように思われる．そうであるとすると，この性質を考慮していない経路ベースの動的均衡配分モデルでは経路選択に大きな自由度が入る余地が存在することになる．一方，リンクベースのモデル [6),7)] では，定式化上 DP 原理の成立を想定しているため，そのような問題は発生しない．つまり，本稿では，アトミックプレイヤーの動的均衡配分モデルに対する順序配分アルゴリズムを，連続体プレイヤーモデルに対する時間分解法 [6),7)] により対応するように修正したと位置づけることもできる．

順序配分アルゴリズムと時間分解法の対応という点では，以下も興味深い．順序配分アルゴリズムでは，単一起点ネットワークでは出発時刻に基づき最早未配分車両を選ぶことができるが，単一終点ネットワークでは本稿でも見たように終点到着時刻に基づく最早未配分車両の選択はできない．これについては時間分解法でも，同様の報告 [9),10)] がなされている：飽和ネットワークについて，単一起点ネットワークでは起点で測った OD 交通流率により交通流パターンを一意に決定できるが，単一終点ネットワークでは終点で測った OD 交通流率に加えて追加的な情報が必要である．これらの OD 構造に関する両手法の類似性は，単一終点ネットワークにおける終点時刻別分解が交通の流れと逆方向（下流から上流へ）になされていることに起因すると考えられるが [5)]，その対応は正確にはわかっていない．

一方，順序配分アルゴリズムと時間分解法（に基づく変分不等式問題アルゴリズム [11)]）の違いとして，解への収束性が挙げられる：順序配分アルゴリズムでは単一起点/単一終点ネットワークに対して解への収束が保証されているが，同構造のネットワークでも時間分解法では解への収束性はこれまでのところ保証されていない．後者は，変分不等式問題の写像が単調性や P_0 といった望ましい性質を満たさない（あるいは満たすことが証明できていない）ためである．これに対して，順序配分アルゴリズムでは，その収束性の問題を「最早未配分車両の存在問題」に帰着させるというアイディアによりその証明がなされている．ただし，時間分解法で同様の方法が可能であるかは現時点で不明である．

以上のように，アトミックモデルと連続体モデル，あるいは，それらの解法の関係性は完全に整理されているわけではない．しかし，その関係性が明らかになってくれば，相互に知見を補いながら [5] 発展することが期待できる．幸いにも，巨視的交通流モデルと微視的交通流モデルの双対性については近年整理がされてきており [12)]，こうした知見を踏まえた動的均衡配分の解析は改めて別の機会に報告したい．

[4] この性質は，順序配分アルゴリズムそのものに必要というわけではない．しかし，順序配分アルゴリズムを実装する際には，ダイクストラ法で最短経路を探索することが想定されるので，実際には DP 原理が成立する経路を採用することになるであろう．

[5] 例えば，アトミックモデルはアルゴリズミックに考えやすい．それに比べて，連続モデルは解析的な取り扱いが易いと言えるであろう（解析が簡単というわけではない）．

参考文献

1) 井料隆雅: 車両を離散化した動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法, 土木学会論文集 *D3*（土木計画学）, Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
2) Iryo, T.: Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology, *Transportmetrica B*, Vol.1, No.1, pp.52–67, 2013.
3) 赤松隆・和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, 第 *26* 回 *RAMP* シンポジウム論文集, pp. 31–46, 2014.
4) 和田健太郎: 交通ネットワーク流の安定性と制御, 計測と制御, Vol.55, No.4, pp.368–375, 2016.
5) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
6) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on Trans-*

portation and Traffic Theory, (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Berkeley, 1993, Elsevior.
7) 赤松隆・桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 OD ペアの場合—, 土木学会論文集 *IV*, Vol.488, No.23, pp.21–30, 1994.
8) 井料隆雅: Private communication, 2016.
9) 赤松隆・高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと OD 構造の関係に関する理論的考察, 土木学会論文集 *IV*, Vol.43, No.618, pp.39–51, 1999.
10) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
11) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
12) Daganzo, C. F.: On the variational theory of traffic flow: well-posedness, duality and applications, *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.1, No.4, pp.601–619, 2006.

(2016. 7. 19 受付)

A NOTE ON THE SOLUTION ALGORITHM OF NASH EQUILIBRIUM IN DYNAMIC TRAFFIC ASSIGNMENT FOR SINGLE DESTINATION NETWORKS

Koki SATSUKAWA and Kentaro WADA

This paper corrects and modifies the Iryo's (2011) solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment, in which each discretized vehicle is assigned on its shortest path one-by-one in an appropriate order. Specifically, we first give a counterexample to the theorem that guarantees the algorithm produces a Nash equilibrium solution for single destination networks. This example shows that it is almost impossible to obtain the Nash equilibrium by assigning each vehicle in the order based on that theorem. We then prove the existence of an appropriate vehicle assignment order for single destination networks, which guarantees the applicability of the Iryo's algorithm to those networks.