

動的配分理論による道路ネットワークの 交通性能解析

和田 健太郎¹・佐津川 功季²

¹正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

²学生会員 東京大学大学院 工学系研究科 博士課程 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

本稿は、1 起点多終点ネットワークを対象に、動的配分理論に基づく Macroscopic Fundamental Diagram (ネットワークの車両存在台数とトリップ完了流率の関数関係) の解析法を構築する。具体的には、まず、渋滞パターンを与件とした動的利用者均衡モデルに対する逆問題を定式化する。逆問題は線形方程式系で記述されており、ネットワークのマクロな性能を表すトリップ完了流率とよりミクロな状態である渋滞パターンとを解析的に関係づけることができる。この解析式の感度分析を行うことにより、トリップ完了流率の低下を引き起こす渋滞パターンとそのメカニズムを明らかにする。

Key Words: *Macroscopic fundamental diagram, Network exit function, Trip completion rate, Dynamic user equilibrium, Reduced network, Inverse problem*

1. はじめに

近年、都市レベルの複雑な道路ネットワークの運用・管理を可能とするために、都市エリアの交通状態/性能を巨視的に捉える指標 Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) が Daganzo¹⁾ により提案された。MFD は、エリアの空間平均密度 (または、車両存在台数) と空間平均交通量 (または、走行台キロ、トリップ完了流率) を関係づける関数¹ であり、エリアの需要変化が緩やか、かつ、混雑がエリアに一様に分布しているとき、その関係が成立することが予想された¹⁾。

Geroliminis and Daganzo^{2),3)} では、サンフランシスコ都心部および横浜エリアの MFD を、それぞれ、シミュレーション、実観測データによって調べ、(曜日や時間帯により) OD 需要パターンが異なる状況下においても、(i) 再現性が高く、(同一平均密度下における平均交通量の) ばらつきの小さい well-defined MFD が存在すること、(ii) 空間平均交通量とエリアの時々刻々の交通“処理量”を表すトリップ完了流率の比が 1 日を通じて一定であること、を明らかにしている。また、Wang et al.⁴⁾ では、1 年に渡る仙台市中心部の MFD を分析し、典型的な条件下 (i.e., 晴れの平日) の MFD の特徴的な形状 (例えば、ヒステリシス・ループの形成) の変化が

年間を通してわずかであることを示している。

MFD のように、道路ネットワークの交通状態を巨視的な (集計的な) 状態変数間の“平均的な”関係から把握しようとする発想自体は古くから存在する^{5),6),7),8)}。ただし、上記 (ii) のように、巨視的な交通密度-交通量関係とそのエリアの動的な交通性能 (処理量) を関連づけるという点に基礎をおくところが、Daganzo¹⁾ と従来研究が異なり、また、エリアの制御法を考える上で重要な点である (より詳細な議論は、3. (1) を参照)。つまり、well-defined MFD が存在し、その空間平均交通量がトリップ完了流率と比例するならば、観測情報 (エリア平均密度) のみでエリアの交通性能をリアルタイムに把握できる。そして、(例えば) エリア内の密度を臨界密度以下に流入制御することで、ネットワークの性能の低下を避けることができると考えられている^{1),9)}。

しかし、上記のような制御ロジックが有効であるためには、MFD が制御自体によって大きく変化しないことが要求される。従って、「どのような条件下で well-defined MFD が成立するのか?、その容量や形状が生じる背後にはどのようなメカニズムがあるのか?」といった MFD の特性を把握しておくことが重要であろう。このうち、MFD の自由流領域は、交通需要が供給サイドの条件に制約されずに流れる状況であり、基本的にその道路ネットワークの平均自由流速度で決定される。

一方、MFD の臨界領域 (臨界密度付近) や渋滞領域は、状況がより複雑であるが、(時々刻々の) エリア内の“リンク密度分布” (密度レベル別のリンク数の頻度

¹ このうち、車両存在台数とトリップ完了流率 (エリアから流出およびエリア内でトリップを完了する交通量) の関係は、Network Exit Function (NEF) と呼ばれる。本研究で MFD とは、基本的に空間平均密度-空間平均交通量関係を指すが、NEF も含めた総称として MFD という用語を用いることもある。

分布) がその形状を特徴づける 1 つの鍵になることが明らかになってきている。Geroliminis and Sun¹⁰⁾ は横浜エリアのデータを用いて、同一のエリア平均密度に対して異なる日時に実現するリンク密度分布が (統計的に) 同一であれば well-defined MFD が成立することを示した。これは、現実の well-defined MFD の存在に、「エリア内の混雑が一様」という前提が必ずしも必要ではないことを意味するが、同時にネットワーク上の“空間的な”混雑パターンに一定の再現性があることを示唆している。実際、王ら¹¹⁾ は、(well-defined) MFD の渋滞領域発生時にはおおよそ同じ空間的な混雑パターンが発現していることを、那覇市中心部の実観測データを使って確認している。また、Mazlounian et al.¹²⁾、Daganzo et al.¹³⁾ では、ネットワーク上の混雑の偏りを表すリンク密度分布の分散に着目し、その分散の増加とともに同一平均密度下の平均交通量が低下することを、それぞれ、シミュレーション、理論分析により明らかにしている。さらに、この性質は現実の高速道路/一般道路ネットワークにおいても成立することが、長期間観測データを用いた実証研究により確認されている^{14),15)}。

以上のように、リンク密度分布およびその分散と MFD 形状の (相関) 関係については、いくつかの重要な知見が蓄積されつつある。しかし、リンク密度分布はあくまで集計化された指標であり、混雑の空間的な接続関係 (空間的な混雑パターン) は捨象されている。そのため、混雑パターンやその変化が MFD の形状に影響を与えるメカニズムは十分に明らかになっていない。様々な交通流モデリングに基づくシミュレーション分析² も行われているが、混雑パターンはネットワーク・トポロジー、起終点分布、リンク容量パターンや経路選択など様々な要因に影響を受けるため、MFD との関係において明確な結論を得るに至っていない。

本研究は、MFD を理論的に解析する手法を構築し、空間的な混雑パターンが MFD の渋滞領域の形状に影響を与えるメカニズムを明らかにする。提案手法は、実証研究からその重要性が示唆されている「(安定的に観測される) 空間的な混雑パターン」を中心に組み立てられており、そのパターンと MFD を結びつける手法として動的利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 理論を用いている。より具体的には、1 起点多終点の一般構造のネットワークを対象とし、ネットワークの物理的条件および OD 需要から内生的に混雑パターンを求める DUE 配分問題を、「混雑パターンを与件として、トリップ完了流率を導出する逆問題」へと変換する。この問題は線形方程式系で記述されているため、混雑パ

ターンとトリップ完了流率を解析的に関係づけることができる。この解析式の感度分析を行うことにより、トリップ完了流率の低下を引き起こす混雑パターンとそのメカニズムを明らかにする。

本稿の構成は次の通りである。続く 2. では、以降の解析の準備として、時刻別分解された DUE モデルおよび渋滞を与件とした DUE の均衡解の導出法を概説する。3. では、まず、本稿で解析対象とするトリップ完了流率の概念と MFD の関係を簡潔に整理する。そのうえで、空間的な混雑パターンを与件とした DUE の均衡解からトリップ完了流率を解析的に導出する。4. では、導出した解析式の感度分析を行い、トリップ完了流率の低下条件を明らかにする。5. では、数値実験により提案手法およびそこから得られる結論の妥当性を確認する。最後に 6. では、本研究のまとめと今後の課題を述べる。

2. 動的利用者均衡状態

(1) 解析の前提条件

本稿では、1 起点多終点の一般構造のネットワークを対象とする。ネットワークはノード集合 N 、リンク集合 L 、起終点の集合 W で表現されており、各々の要素を $i \in N, ij \in L, od \in W$ とする。ネットワークの構造は、ノード・リンク接続行列 A^* ($N \times L$ 行列) で表される。この行列のランクは $N-1$ であるため¹⁹⁾、唯一の起点に対応する行を除き、その行列を既約接続行列 A とする。さらに、既約接続行列の +1 の要素を 0 にした行列を A_- とおく。

各 OD ペア間の交通需要は“外生的”に与えられる (以降の章では、“内生変数”とする)。より具体的には、時刻 t までに起点 o を出発し終点を d とする累積 OD 交通量を $Q_{od}(t)$ と表す。各リンクは First-In-First-Out (FIFO) 原理を採用し、交通状態は Point Queue (PQ) モデルで表現されるとする (ただし、以降の章では“Physical Queue”も取り扱う)。具体的には、各リンク (i, j) は自由走行リンクと待ち行列リンクで構成されているとし、自由走行リンクの旅行時間は定数 m_{ij} 、待ち行列リンクのボトルネック容量は μ_{ij} とする。このとき、時刻 t にリンク (i, j) に流入した車両の旅行時間は、

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + x_{ij}(t + m_{ij}) / \mu_{ij} \quad (1)$$

$$\text{where } x_{ij}(t) = A_{ij}(t) - D_{ij}(t).$$

ここで、 $x_{ij}(t)$ は時刻 t のリンク下流端での待ち行列台数、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ は各々時刻 t までにリンク (i, j) を流入、流出した累積交通量を表している。なお、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ が時間微分可能であれば交通流率は下記のように書くことができる：

$$\lambda_{ij}(t) \equiv dA_{ij}(t)/dt, \quad g_{ij}(t) \equiv dD_{ij}(t)/dt. \quad (2)$$

² 例えば、マイクロ・シミュレーションによる分析¹⁶⁾ や、サブエリア経路毎に MFD を仮定してそれらから全体の MFD を分析する研究^{17),18)} が挙げられる。

(2) 時刻別分解された DUE の定式化

DUE は静的な利用者均衡を動的な場合に自然に拡張した解の概念であり、DUE 状態は以下のように定義される：任意の時刻において、どの利用者も自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態。言い換えれば、全ての瞬間において、全ての利用者が選択した経路が“事後的”に見ても各人の最短経路となっているような交通流パターンである。

DUE 状態では、同時刻に同一起点を出発した利用者の任意のノードへの到着時刻は経路によらず等しい。さらに、DUE 状態では、起点における利用者の出発順序が終点に到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されていなければならない。この性質により、起点出発時刻毎に、各ノードへの一意的な均衡到着時刻を定義することができる。これらの特性とリンクモデルの性質から、時刻 s に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は時刻 s 以降に起点を出発する利用者の影響を受けないことが分かる。そして、1 起点多終点を持つネットワークにおける DUE 状態は、起点出発時刻別に分解することができる^{20),21)}。

出発時刻別の DUE では、次の 2 つの変数が中心的な役割を果たす。1 つは、出発時刻 s に関する流入交通流率である：

$$y_{ij}^s \equiv A_{ij}(\tau_i(s))/ds. \quad (3)$$

もう 1 つは、起点を時刻 s に出発した車両が最も早くノード i に到着する時刻 $\tau_i(s)$ である。先に定義した絶対時刻 t における流入交通流率 $\lambda_{ij}(t)$ と y_{ij}^s の関係は以下のように表される：

$$y_{ij}^s = \lambda_{ij}(\tau_i^s) \dot{\tau}_i^s. \quad (4)$$

ここで、 $\dot{\tau}_i^s \equiv d\tau_i(s)/ds$ である。

上記の変数を用いると、出発時刻別の DUE 配分は以下のように表される^{20),22)}：

- ・リンク旅行時間関数 (PQ モデル)

$$c_{ij}^s = \int_0^s \dot{c}_{ij}^s ds + c_{ij}^{s=0} \quad \forall s \quad (5)$$

$$\text{where } \dot{c}_{ij}^s = \begin{cases} y_{ij}^s/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i^s & x_{ij}(\tau_i^s + m_{ij}) > 0 \\ 0 & x_{ij}(\tau_i^s + m_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

- ・各ノードでのフロー保存則

$$\sum_{i \in I(k)} y_{ik}^s - \sum_{j \in O(k)} y_{kj}^s - \dot{Q}_{ok}^s = 0 \quad \forall k \in N, k \neq o, \forall s$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}y^s = -\dot{\mathbf{Q}}^s \quad (7)$$

- ・最短経路選択条件

$$\begin{cases} y_{ij}^s \{c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s\} = 0 \\ c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s \geq 0, y_{ij}^s \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in L, \forall s. \quad (8)$$

ここで、 $I(k)$ はノード k に流入するリンクの始点となるノードの集合、 $O(k)$ はノード k から流出するリンクの終点となるノードの集合、 $\dot{c}_{ij}^s \equiv dc_{ij}(\tau_i(s))/ds$ 、 $\dot{Q}_{ok}^s \equiv dQ_{ok}(s)/ds$ である。また、(7) は、フロー保存則を行列・ベクトル表示したものである。

(3) 渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解

時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題として表現されており、一般的に、解析解を求めることはできない。しかし、ネットワーク上の全てのリンクでフローの流入があり (i.e., $y_{ij}^s > 0$)、かつ、全てのリンクで渋滞している (i.e., $x_{ij}(t) > 0$)、"飽和ネットワーク"では、時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着し、均衡解を解析的に求めることが可能である^{23),24),25),26)}。

時刻 s 以前に起点を出発したフローに対応したネットワークの状態は既知として、起点出発時刻が s の利用者に対応した均衡解を求めよう。飽和ネットワーク内の全てのリンクで流入および渋滞があるため、前節で相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (6) および最短経路選択条件 (8) は等式条件に帰着する：

$$c_{ij}^s = y_{ij}^s/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i^s \quad \forall ij \in L \quad (9)$$

$$c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s = 0 \quad \forall ij \in L. \quad (10)$$

式 (9) を式 (10) へ代入すれば、

$$y_{ij}^s = \mu_{ij} \dot{\tau}_j^s \quad \forall ij \in L \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^s = -(\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T) \dot{\boldsymbol{\tau}}^s \quad (12)$$

$$\text{where } \mathbf{M} \equiv \text{diag}[\dots, \mu_{ij}, \dots]$$

が成立する。この式をフロー保存則 (7) に代入すれば、

$$(\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T) \dot{\boldsymbol{\tau}}^s = \dot{\mathbf{Q}}^s. \quad (13)$$

行列 $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T$ のランクは一般に基準点の選び方に依存するが、1 起点多終点ネットワークにおいては、起点ノードを基準点に選べば、ランクは必ず $N-1$ となる²³⁾。従って、 $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T$ は逆行列を持ち、均衡解は唯一に定まる：

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^s = (\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T)^{-1} \dot{\mathbf{Q}}^s \quad (14)$$

$$\mathbf{y}^s = -(\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T)(\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T)^{-1} \dot{\mathbf{Q}}^s. \quad (15)$$

またこの方法論は、非渋滞リンクを含むネットワークに対しても拡張が可能である：非渋滞リンクを含むネットワークに対しても適切にネットワークを縮約することにより、“縮約ネットワーク”と呼ばれる飽和ネットワークを構築することができる²⁷⁾。縮約ネットワークは、ネットワーク上の渋滞パターンが与えられたとき、オリジナル・ネットワークの非渋滞リンクの始点と終点ノードを 1 つのノードとして集約する (i.e., 非渋滞リンクを取り除く) ことにより構築される (図-1)。また、フローの流入のないリンク (i.e., $y_{ij}^s = 0$) がある場合は、そのリンクを削除する。

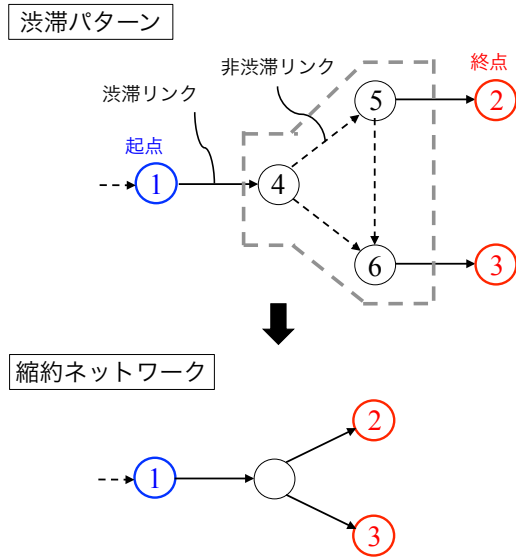


図-1 縮約ネットワークの構築例

この縮約ネットワークのノード集合, リンク集合, 起終点集合をそれぞれ, N_R, L_R, W_R とすれば, このネットワークは全てのリンクが渋滞しているため,

$$(\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T) \bar{\tau}_R^s = \bar{\mathbf{Q}}_R^s \quad (16)$$

が成立する. ここで, 下付き添字 R は縮約ネットワーク上で定義された変数であることを意味する. また, $\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T$ は逆行列を持つため²⁷⁾, この解は唯一である. なお, 縮約ネットワークにおいては, ノードの集約結果として起点に戻る (渋滞) リンクが生じ得る. この際, (既約接続行列を得るために) 起点ノードを取り除くことで, 純湧き出しノードではないノードが取り除かれ, 既約接続行列 \mathbf{A} から起点への流入情報が抜け落ちてしまう (i.e., フロー保存則が満たされなくなる). この情報を補うためには, リターン・リンクの始点ノードに対応する要素のみにリンク容量値を持つベクトル δ_R を式 (16) の右辺に加える必要がある:

$$(\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T) \bar{\tau}_R^s = \bar{\mathbf{Q}}_R^s + \delta_R. \quad (17)$$

3. 道路ネットワークの交通性能解析

本章では, DUE 状態におけるネットワークの交通性能を解析する. まず, (1) では, Daganzo¹⁾ で導入された MFD と Network Exit Function (NEF) の概念を簡潔に説明する. (2) では, DUE を記述する状態量と巨視的な状態量の関係性を整理したうえで, 定常状態におけるトリップ完了流率を解析的に導出する. (3) では, 定常状態の仮定を緩和した動的な交通条件下のトリップ完了流率を導出し, 定常状態との差異を考察する.

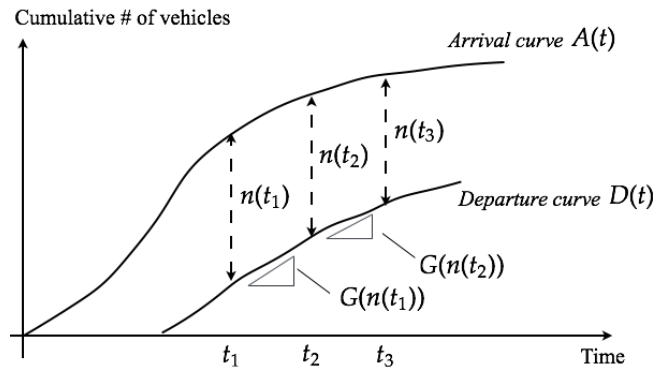


図-2 MFD 理論の基本仮説

(1) ネットワーク・レベルの交通性能指標

Daganzo¹⁾ は, あるエリア内の交通ネットワーク・システムを 1 つの貯水槽 (インプット/アウトプットシステム) として捉えることにより, MFD の理論を展開している. すなわち, MFD の理論は, 「システムへの交通需要 (貯水槽への水の流入) の変化が緩やかであれば, そのトリップ完了流率 (貯水槽からの水の流出) は, システム内の車両存在台数 (水位) の関数として近似的に表現することができる」という仮説に基づいている.

この仮説を図示したものが図-2 である. ここで, $A(t)$ はシステムへの累積流入台数, $D(t)$ は累積流出台数, $n(t)$ は車両存在台数を表す. システムの状態が変化するとき, 流出率 $dD(t)/dt$ は, 厳密には, 流入率 $dA(t)/dt$ と存在台数 $n(t)$ の履歴に依存する. しかし, 変化が緩やかなときその履歴依存性は弱まり, 定常状態に近い状態が実現するであろう. そしてこのとき, 流出率は,

$$dD(t)/dt \approx G(n(t)) \quad (18)$$

と書くことができる. $G(n(t))$ は定常状態における流出交通流率 (トリップ完了流率) と存在台数の関係を表す NEF である. NEF の存在および式 (18) の関係が成立することが MFD の理論の根本にある仮定である.

なお, NEF はトリップ完了流率のデータを必要とするため, 現実はその把握は必ずしも容易ではない. そのため, NEF の代替としてエリア平均交通密度 \bar{k} と平均交通量 \bar{q} の関係である MFD, $\bar{q} = F(\bar{k})$, が実際には利用される³⁾. これは, NEF と MFD は, エリア内の平均トリップ長が全 OD で等しいとみなせるとき, 次のように関係づけられるためである: $G(n) = (l_{all}/\bar{l}) F(\bar{k})$. ここで, l_{all} はエリア内の総リンク長, \bar{l} は平均トリップ長である. このとき, MFD は単に NEF をスケール変換したものである.

以上の NEF と MFD について, 注意が必要なのは, NEF はエリア内の車両「処理量」というネットワーク性

³⁾ ただし, 高速道路ネットワークのように流入が把握できる場合は, NEF を直接用いることができる.

能を明確に表しているのに対して、MFD 単独では（何らかの交通流動性指標とはみなせるが）明確な性能指標とはならないということである。すなわち、MFD が制御上有用であるとされる理由は、上記で示した NEF との関係が適切に定義されたエリアでは成立すると考えられるためである。本研究は、ネットワークの交通性能を解析することが目的であるため、以降では NEF を対象として議論を進める。

(2) トリップ完了流率の解析的評価

前節の議論を DUE 状態と結びつけて展開するために、巨視的な状態変数を DUE の記述に用いた変数を用いて表す：

$$A_d(t) = Q_{od}(t) \quad (19)$$

$$D_d(t) = Q_{od}(t) - C_{od}^*(t) \quad (20)$$

$$n_d(t) = A_{od}(t) - D_{od}(t). \quad (21)$$

これらは、終点別に区別された、ネットワークへの累積流入曲線、累積流出曲線、および、車両存在台数である。ここで、 $C_{od}^*(t)$ は時刻 t に終点 d に到着する車両の均衡（最小）OD 旅行時間である。式 (20) が成立するのは、DUE 状態においては OD 間で FIFO 条件が成立するためである。これらの巨視的な変数が微分可能であるとすると、

$$\lambda_d(\tau_o(s)) \equiv \frac{dA_d(\tau_o(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(\tau_o(s))}{dt} = \dot{Q}_{od}^s \quad (22)$$

$$\begin{aligned} g_d(\tau_d(s)) &\equiv \frac{dD_d(\tau_d(s))}{dt} \\ &= \frac{dQ_{od}(\tau_d(s)) - (\tau_d(s) - s)}{ds} \bigg/ \frac{d\tau_d(s)}{ds} \\ &= \dot{Q}_{od}^s / \dot{\tau}_d^s \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_d(\tau_d(s))}{dt} &= \lambda_d(\tau_d(s)) - g_d(\tau_d(s)) \\ &= \left(dQ_{od}(\tau_d(s))/dt - \dot{Q}_{od}^s / \dot{\tau}_d^s \right) \end{aligned} \quad (24)$$

が成立する。式 (22)、式 (23) は、終点毎のネットワークへの流入交通流率、流出交通流率（トリップ完了流率）を表している。また、式 (24) はネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスを表している。

以上の巨視的な状態変数を用いて、渋滞パターン \mathbf{x} を与件とした DUE 状態におけるトリップ完了流率 $\{g_d(\mathbf{x})\}_{\forall d}$ を評価する。そのために、ここでは以下の仮定を置く：
仮定 1. 渋滞パターン \mathbf{x} に対応する縮約ネットワークにおいて、起終点ノードが 1 つのノードに集約されていない。

仮定 2. ネットワークの各 OD ペアの交通需要と車両存在台数が時間とともに変化しない。

仮定 1 は、ネットワークが混雑していない状況を排除するものである。すなわち、起終点が集約される場

合、集約された起終点間の旅行時間が自由旅行時間に一致していることを意味しており、OD 需要 \dot{Q}_{od}^s がそのままネットワークを流出する。つまり、供給条件ではなく、需要条件でトリップ完了流率が決まっており、渋滞パターンはトリップ完了流率に影響をおよぼさない。本研究は、あくまで、渋滞パターンとトリップ完了流率の関係を調べることを目的であるため、このような状況は以降の解析対象から除外する。

仮定 2 は、前節で述べた MFD の基本的な前提条件 (i.e., システムへのインプットおよびシステムの変化が緩やかであること) に対応する仮定である。このとき、まず、車両存在台数が不変という仮定から、

$$dn_d(t)/dt = 0 \quad \forall d \quad (25)$$

が成立する。この条件は、式 (24) を用いると、以下の周期境界条件として表現される：

$$dQ_{od}(\tau_d^s)/dt = \dot{Q}_{od}^s / \dot{\tau}_d^s \quad \forall d. \quad (26)$$

次に、各 OD ペアの交通需要が不変という仮定から、異なる時刻のネットワークへの流入交通流率が等しい：

$$dQ_{od}(\tau_d^s)/dt = \dot{Q}_{od}^s \quad \forall d. \quad (27)$$

以上の式 (26) と (27) を連立することで、

$$\dot{\tau}_d^s = 1 \quad \forall d \quad (28)$$

が得られる。つまり、定常状態においては、トリップ完了流率はネットワークへの流入交通流率 (i.e., OD 交通流率) に一致する。

以上の仮定の下、定常状態におけるトリップ完了流率に関する次の命題が得られる。

命題 1. 1 起点多終点ネットワークにおいて渋滞パターン \mathbf{x} が与えられ、**仮定 1**、**仮定 2** が満たされているとする。このとき、DUE 状態における終点別のトリップ完了流率 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は以下の解析式で与えられる：

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{dd} \mathbf{1} - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id} \mathbf{1} - \delta_i] + \delta_d). \quad (29)$$

where

$$\mathbf{V}_{dd} \equiv \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T, \mathbf{V}_{ii} \equiv \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T,$$

$$\mathbf{V}_{id} \equiv \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T, \mathbf{V}_{di} \equiv \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T.$$

ここで、下付き添え字のついた行列 \mathbf{A}_k , $k = i, d$ は、ノード・リンク接続行列の終点ノード $d \in N_d$ 、通過ノード $i \in N_i$ に対応する部分行列を表す： $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_i \mid \mathbf{A}_d]^T$, $\mathbf{A}_- = [\mathbf{A}_{i-} \mid \mathbf{A}_{d-}]^T$ 。また、同様に、 $\delta = [\delta_i \mid \delta_d]^T$ 。

証明. 定常状態においては $g_d(\mathbf{x}) = \dot{Q}_{od}^s$ であるので、ブロック表示した式 (17)、および、式 (28) より、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \delta_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-} \mid \mathbf{A}_{d-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tau}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ii} & \mathbf{V}_{id} \\ \mathbf{V}_{di} & \mathbf{V}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tau}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

が成立する（ここでは縮約ネットワークについて記述しているが、下付き添字 R は省略している）。また、 τ_i^s は時間に依存しないため、 $\hat{\tau}_i$ と記述している。式 (30) はブロックごとには、

$$\delta_i = \mathbf{V}_{ii}\hat{\tau}_i + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1} \quad (31)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \delta_d = \mathbf{V}_{di}\hat{\tau}_i + \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} \quad (32)$$

と表すことができる。この第一式の \mathbf{V}_{ii} は純湧き出しノードを含まない行列であり、必ず逆行列を持つ²³⁾。従って、 $\hat{\tau}_i$ は一意に定まる：

$$\hat{\tau}_i = -(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i]. \quad (33)$$

この式を第二式に代入することで、解析式 (29) が得られる。（証明終）

この命題より、定常状態におけるトリップ完了流率は、渋滞リンク同士の接続構造およびそれらの容量（縮約ネットワーク）、OD 分布（OD 交通“量”ではなく起終点ノードの位置）、から決まることがわかる。

定常状態におけるトリップ完了流率を導く以上の手順は、DUE 配分の“逆問題”と見ることがができる。より具体的には、先に示した DUE 配分 (5)~(8) は、OD 交通流率 $\dot{\mathbf{Q}}^s$ を入力として、 $(\hat{\tau}^s, \mathbf{y}^s)$ を求めるものであった。そして、その結果として渋滞パターン \mathbf{x} が決定される。この問題を順問題としたとき、渋滞パターン \mathbf{x} を与件としてトリップ完了流率（あるいは、OD 交通流率）を求めるためには、OD 交通流率に代わる条件が必要となる。これが、終点ノードに関する条件 (28) である。ただしこの逆問題は、観測交通量と DUE 配分モデルによる予測交通量の誤差を最小とする OD 交通流率を求める“OD 交通量推定問題”とは異なり、観測渋滞パターンの下で定常的に流れうる OD 交通量を求めるものであると解釈されるべきものである。

以下では、式 (29) をより詳細に見ていこう。そのために、まず、行列 $\mathbf{V} \equiv \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T$ について述べる。この行列の基本的な構造は、ノード・リンク接続行列 \mathbf{A} の行ベクトルと流入リンクの情報のみを保持した接続行列 \mathbf{A}_- の行ベクトルの積であり、行列 \mathbf{V} の k 行 l 列要素 $[\mathbf{V}]_{kl}$ は以下のように与えられる：

$$[\mathbf{V}]_{kl} = \begin{cases} \sum_{j \in I(k)} \mu_{jk} & \text{if } k = l \\ -\mu_{kl} & \text{if } kl \in L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

すなわち、対角要素 $[\mathbf{V}]_{kk}$ がノード k への流入リンクの容量の和を表しており、非対角要素 $[\mathbf{V}]_{kl}$ ($k \neq l$) はノード k からノード l へ流出するリンク容量を表している。

このことから、式 (29) の第一項は \mathbf{V}_{dd} の重み付け行和をとったベクトルであり、各要素は以下のように与

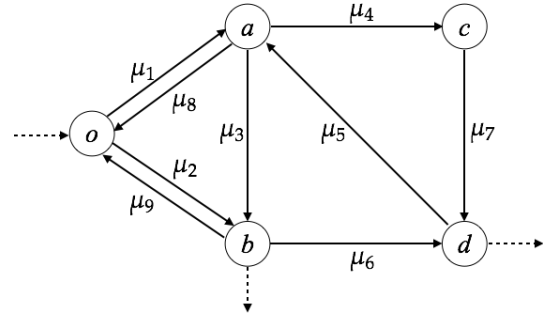


図-3 1 起点 2 終点の縮約ネットワーク

えられる：

$$[\mathbf{V}_{dd}\mathbf{1}]_d = \sum_{k \in I(d)} \mu_{kd} - \sum_{d' \in (O(d) \cap N_d)} \mu_{dd'}. \quad (35)$$

これは、縮約ネットワークで終点に流入するリンク容量の総和から他の終点に流出するリンク容量の総和を差し引いた量である。すなわち、終点 d からその終点以外へネットに流出する量（i.e., トリップの完了および通過ノードへの流出）である。一方、式 (29) の第二項は、次のように表される：

$$\begin{aligned} [-(\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}(\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i) + \delta_d)]_d &= [\mathbf{V}_{di}\hat{\tau}_i - \delta_d]_d \\ &= - \sum_{k \in (O(d) \cap N_i)} \mu_{dk}\hat{\tau}_k - \mu_{do} \end{aligned} \quad (36)$$

これは、トリップ完了流率の第一項 (35) で表されたフローのうち、終点 d でトリップを完了せず、通過ノードへ流出するフローである。ただし、 $\hat{\tau}_k$ は、式 (33) によって表される DUE の配分原理から決まる従属変数であり、この終点に直接接続していないリンクの影響も反映されていることには注意が必要である。

以上より、式 (29) は一見複雑であるが、その意味は、縮約ネットワーク上の各終点ノードについてのフロー保存則に相当することがわかる。ただし、渋滞パターンと DUE の配分原理で構造化されているため、(次章に示すように) トリップ完了流率が低下するメカニズムを理論的に考察することが可能となる。

ネットワーク全体のトリップ完了流率 $G(\mathbf{x})$ は、ベクトル $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ の要素を全て足し合わせることで求められる：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \mathbf{1}^T \{ \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i] + \delta_d) \} \\ &= \sum_{d \in N_d} \left\{ \sum_{k \in I(d) \cap N_i} \mu_{kd} - \left(\sum_{k \in (O(d) \cap N_i)} \mu_{dk}\hat{\tau}_k + \mu_{do} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、終点間のフローのやり取りは相殺されるため、式 (35) の第二項は現れない。

なお、以上は、Point Queue モデルを前提とした記述であったが、Physical Queue を考慮した場合にも上記の議論は成立する。すなわち、渋滞パターンを与件とする提案手法においては、渋滞延伸により低下した捌け量を容量として解析式のインプットとすればよい。

具体例. トリップ完了流率の解析式の計算例を示す. 図 3 は, 1 起点 2 終点の縮約ネットワークであり, ノード o が起点, ノード $\{b, d\}$ が終点, ノード $\{a, c\}$ は通過ノードである. 各リンクの容量は図に示すとおりである.

このとき, 式 (29) の要素となる行列・ベクトルは以下のように表される:

$$\mathbf{V}_{dd} = \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_3 & -\mu_6 \\ 0 & \mu_6 + \mu_7 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{ii} = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_5 & -\mu_4 \\ 0 & \mu_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{id} = \begin{bmatrix} -\mu_3 & 0 \\ 0 & -\mu_7 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{di} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu_5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \mu_8 \\ 0 \end{bmatrix}, \delta_d = \begin{bmatrix} \mu_9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

そして, これらを式 (29) に代入することにより, 各終点のトリップ完了流率が求まる:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} G_b \\ G_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_3 - \mu_6 - \mu_9 \\ \mu_6 + \mu_7 - \mu_5 \frac{\mu_3 + \mu_7 + \mu_8}{\mu_1 + \mu_5} \end{bmatrix}$$

ここで, 2 行目の分数が, 式 (33) で表される部分である:

$$\bar{\tau}_a = \frac{\mu_3 + \mu_7 + \mu_8}{\mu_1 + \mu_5}.$$

最後に, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ の要素の和をとれば, ネットワーク全体のトリップ完了流率が求まる:

$$G(\mathbf{x}) = \mu_2 + \mu_3 + \mu_7 - \mu_9 - \mu_5 \frac{\mu_3 + \mu_7 + \mu_8}{\mu_1 + \mu_5}.$$

この例からも, トリップ完了流率は終点ノードに接続するリンクの容量のみから表されるのではなく, (一見無関係な) リンク 1 やリンク 8 が影響をおよぼすことがわかる.

(3) 動的な交通条件がトリップ完了流率に与える影響

ここでは, 前節でおいた仮定 2 を緩めることで, 動的な交通条件がトリップ完了流率に与える影響を考察する. より具体的には, 渋滞パターン \mathbf{x} は変化しないが, OD 交通需要および車両存在台数は変化する (以下の仮定が成立している) 状況を考える.

仮定 3. 渋滞パターン \mathbf{x} (時刻 t 開始) から異なる渋滞パターン \mathbf{x}' (時刻 $t + \Delta t$ 開始) への変化が (OD 旅行時間に比べて) 緩やかである: $\Delta t > \max_d \cdot C_{od}^*(t)$.

仮定 4. 仮定 3 が成立しているとき, 各終点について, $\tau_d(s) = t$, $\tau_d(s + \Delta s) = t + \Delta t$ を満たす $s \sim s + \Delta s$ の間に起点を出発する平均 OD 交通流率を $\bar{Q}_{od}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \dot{Q}_{od}^s ds$, $\bar{\tau}_i^s$ の平均値を $\bar{\tau}_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \bar{\tau}_i^s ds$, それらをすべてのノードについて並べたベクトルを $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ と書く. このとき, 次の関係式が近似的に成立する.

$$(\mathbf{AMA}^T) \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \quad (38)$$

仮定 3, 仮定 4 は, 渋滞パターンの変化が緩やかであるとき, DUE 状態で \dot{Q}^s と $\bar{\tau}^s$ の間に成立すべき関係式

(17) がそれらの平均値について近似的に成立することを要求している. 式 (38) が (一般に) 近似となる理由は, 終点への到着時刻 $t \sim t + \Delta t$ を基準と考える際に, それに対応する起点からの出発時刻 $s \sim s + \Delta s$ (あるいは OD 間旅行時間) は, 一般に終点毎に異なるためである (逆に, 式 (17) は起点からの出発時刻 s を基準として記述されていた). ただし, $t \sim t + \Delta t$ で渋滞パターンは変化しないため, 式 (17) の係数行列 \mathbf{AMA}^T は変化しない, かつ, 式 (17) は線形であるため, 各 OD 間の旅行時間が等しい場合には (あるいは, 終点が 1 つの場合), 平均値についても式 (17) が厳密に成立する. 従って, 仮定 4 はリーズナブルな仮定であると言えよう.

以上の準備の下, 動的な条件下における平均トリップ完了流率 $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \equiv [\bar{g}_d(\mathbf{x})]_{vd}$, $\bar{g}_d(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g_d(\tau_d(s)) dt$ は, 次のように評価される.

命題 2. 1 起点多終点ネットワークにおいて渋滞パターン \mathbf{x} が与えられ, 仮定 1, 仮定 3, 仮定 4 が満たされているとする. このとき, 動的な交通条件下における終点別の平均トリップ完了流率 $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ は以下の解析式で近似される:

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{-1} \{ \mathbf{V}_{dd} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d(\mathbf{x}) - (\mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d(\mathbf{x}) - \delta_i] + \delta_d) \} \quad (39)$$

where $\mathbf{T} \equiv \text{diag}[\dots, \bar{\tau}_d(\mathbf{x}), \dots]$.

証明. 仮定 4 より, 式 (17) が $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{x})$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ について近似的に成立する:

$$\bar{\mathbf{Q}}_d(\mathbf{x}) \approx \mathbf{V}_{dd} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d(\mathbf{x}) - (\mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d(\mathbf{x}) - \delta_i] + \delta_d). \quad (40)$$

また, 以下の関係式:

$$\bar{g}_d(\mathbf{x}) = \frac{D_d(t + \Delta t) - D_d(t)}{\Delta t} = \frac{Q_{od}(s + \Delta s) - Q_{od}(s)}{\Delta t} = \frac{\int_s^{s+\Delta s} \dot{Q}_{od}^s ds}{\int_s^{s+\Delta s} \bar{\tau}_d^s ds} = \frac{\bar{Q}_{od}(\mathbf{x})}{\bar{\tau}_d(\mathbf{x})} \quad (41)$$

に上記の近似式を代入すれば (i.e., 起点での OD 交通流率を終点での流出率に変換すれば), 式 (39) が得られる. (証明終)

式 (39) は, 定常状態とは異なり, 平均トリップ完了率を評価するために $\bar{\boldsymbol{\tau}}_d(\mathbf{x})$ の情報が必要であることを示している. $\bar{\tau}_d(\mathbf{x})$ は,

$$\bar{\tau}_d(\mathbf{x}) = 1 + \frac{C_{od}^*(\tau_d(s + \Delta s)) - C_{od}^*(\tau_d(s))}{(s + \Delta s) - s} = \frac{\Delta t}{\Delta s} \quad (42)$$

という関係が成り立ち, 渋滞パターン \mathbf{x} が実現している時間帯での均衡 OD 旅行時間の変化率を表している. つまり, 現実には, プローブ車両等によって計測されるものである. また, 動的な交通条件下のネットワー

ク全体の平均トリップ完了流率 $\bar{G}(\mathbf{x})$ は,

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{x}) &= \mathbf{1}^T \mathbf{T}^{-1} \{ \mathbf{V}_{dd} \bar{\tau}_d - (\mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \bar{\tau}_d - \delta_i] + \delta_d) \} \\ &= \sum_{d \in N_d} \left\{ \sum_{k \in I(d)} \mu_{kd} - \sum_{d' \in \{O(d) \cap N_d\}} \mu_{dd'} \bar{\tau}_{d'} / \bar{\tau}_d \right. \\ &\quad \left. - \left[\sum_{k \in \{O(d) \cap N_i\}} \mu_{dk} \bar{\tau}_k / \bar{\tau}_d + \mu_{do} / \bar{\tau}_d \right] \right\}. \quad (43) \end{aligned}$$

と表すことができる。

より詳しく定常状態と動的条件下のトリップ完了流率の関係を考えてみよう。定常状態のトリップ完了流率 $G(\mathbf{x})$ から動的な交通条件下の平均トリップ完了流率 $\bar{G}(\mathbf{x})$ を差し引くと,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) - \bar{G}(\mathbf{x}) &= \sum_{d \in N_d} \left(\sum_{d' \in \{O(d) \cap N_d\}} \mu_{dd'} (\bar{\tau}_{d'} / \bar{\tau}_d - 1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \{O(d) \cap N_i\}} \mu_{dk} (\bar{\tau}_k / \bar{\tau}_d - \bar{\tau}_k) + \mu_{do} (\bar{\tau}_o / \bar{\tau}_d - 1) \right). \quad (44) \end{aligned}$$

ここで, $\bar{\tau}_o = 1$ を用いた。この式 (44) から, 両者の乖離は各終点ノードからの流出フローに関する部分であり, 流入フローについては差がないことがわかる。また, この式 (44) からは厳密にその正負を判定することができないが, 下記のように全体的な傾向は読み取ることができる。

まず, 式 (4), (11) より, $\bar{\tau}_j / \bar{\tau}_i$ はリンク (i, j) の容量に対する (平均) 流入交通流率の比 (= 流入交通流率 / 容量) を表しており, リンクの存在台数が増加しているとき, この値が 1 より大きくなるのがわかる。従って, ネットワークの車両存在台数が増加しているとき, 式 (44) の各項の該当部分の多くは $\bar{\tau}_j / \bar{\tau}_i > 1$ となる。一方, 定常状態においてはネットワーク全体の車両存在台数を不変と仮定しているため, 第二項の $\bar{\tau}_k$ (= $\bar{\tau}_k / \bar{\tau}_d$) は, 全リンクの平均としては $\bar{\tau}_k \approx 1$ が成り立っていないなければならない。つまり, 定常状態における解析式 (37) は, ネットワークの車両存在台数 (より正確には, 異なる終点の間の車両存在台数) が増加している局面においては, トリップ完了流率を実際 (動的な条件下) より過大評価する傾向にある (車両存在台数が減少している局面では過小評価する傾向にある) と言える。

4. トリップ完了流率の低下条件

本章では, トリップ完了流率の解析式 (37) の感度分析を行なうことにより, トリップ完了流率の低下メカニズムについて考察を行なう。まず, (1) では, 縮約ネットワーク上のリンクの容量パターン $\boldsymbol{\mu} \equiv [\dots, \mu_{ij}, \dots]^T$ についての感度式を導出する。(2) では, 渋滞の延伸によるリンク容量 (捌け量) の低下によりネットワーク全体のトリップ完了流率が低下する条件を特定する。(3)

では, 特定した条件が生じうる典型的な状況を具体的に示し, トリップ完了流率の低下メカニズムを考察する。

(1) 感度分析

いま, 容量パターン $\boldsymbol{\mu} \equiv [\dots, \mu_{ij}, \dots]^T$ を対角要素に持つ容量行列を $\mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})$ とし, その他の行列/ベクトルも $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$, $\dot{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu})$ と表現する (\mathbf{x} は省略する)。そして, 容量パターン $\boldsymbol{\mu}$ における $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ と, 容量パターン $\boldsymbol{\mu}' \equiv \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}$ における $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu} + \Delta)$ を比較する。

まず, 式 (31) から, 二つの容量パターンについて通過ノードに関して以下の式が成り立つ:

$$\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{V}_{ii}(\boldsymbol{\mu}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{id}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{1} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu}) &= [\mathbf{V}_{ii}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})] \dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad + [\mathbf{V}_{id}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})] \mathbf{1} \quad (46) \end{aligned}$$

ここでは $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$ と $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu})$ が $\boldsymbol{\mu}$ について線形であるという性質を用いた: $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}') = \mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}(\Delta\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu}') = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\delta}(\Delta\boldsymbol{\mu})$ 。次に, 式 (46) から式 (45) を差し引くことで, 以下の式を得る (ただし, 以降の式では $\boldsymbol{\mu}$ は省略した):

$$\begin{aligned} [\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') - \dot{\boldsymbol{\tau}}_i] &= -(\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad + \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})]. \quad (47) \end{aligned}$$

また, 終点ノードについても同様に, 容量パターン変化前後の式 (39) の辺々を差し引き, 式 (47) を代入することで, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}') - \mathbf{g} &= \mathbf{V}_{dd}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_d(\Delta\boldsymbol{\mu}) \\ &\quad + \mathbf{V}_{di}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})] \quad (48) \end{aligned}$$

最後に, $\Delta\boldsymbol{\mu} = [0, \dots, 0, \Delta\mu_{kl}, 0, \dots, 0]^T$ の場合を考える。式 (48) の両辺に $\mathbf{1}^T$ をかけ, $\Delta\mu_{kl}$ で割り, 極限 $\Delta\mu_{kl} \rightarrow 0$ をとることにより, リンク (k, l) の容量変化に関するトリップ完了流率の感度式 $\partial G(\mathbf{x}) / \partial \mu_{kl}$ は, 次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{kl}} &= \mathbf{1}^T \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}_{dd}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_d(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{V}_{di}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i \\ &\quad \left. - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \right] \right\} \quad (49) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{ab}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} &\equiv \lim_{\mu_{kl} \rightarrow 0} \mathbf{A}_a \mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \mathbf{A}_b^T / \Delta\mu_{kl} = \mathbf{A}_a \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_b^T \\ \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_a(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} &\equiv \lim_{\mu_{kl} \rightarrow 0} \boldsymbol{\delta}_a(\Delta\boldsymbol{\mu}) / \Delta\mu_{kl} = \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

ただし, $a, b \in \{i, d\}$ 。また, \mathbf{I}_{kl} はリンク (k, l) に対応する対角要素のみ 1, それ以外の要素は 0 となる $|L_R| \times |L_R|$ 行列, \mathbf{e}_k はノード k に対応する要素のみ 1 となる単位ベクトルである。また, k が起点のとき, $\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ とす

る。式 (49) は、その第一項が解析式 (37) の第一項の感度を表しており、それ以外の項は解析式 (37) の第二項の感度を表している。

(2) トリップ完了流率の低下条件

前節で導出した感度式 (49) を用いて、(縮約ネットワークの) あるリンク容量が低下した際に、トリップ完了流率が低下する条件を特定する。ここで想定するリンク容量の低下要因は、下流側リンクからの渋滞の延伸による上流リンクの捌け量の低下 (i.e., 先詰まり) である。なお、感度分析では、渋滞延伸前後の渋滞パターン \mathbf{x} の変化はないものとする⁴。

感度式 (49) を、その上下流ノードの種類 (i.e., 起点、終点、通過ノード) で分類されるリンクタイプ別に解析することにより、以下の命題が成立する (証明は付録 I を参照)。

命題 3. 1 起点多終点ネットワークにおいて渋滞パターン \mathbf{x} が与えられ、仮定 1, 仮定 2 が満たされているとする。このとき、リンク (k, l) の容量低下により、トリップ完了流率が低下する必要十分条件は、上下流ノード k, l の種類別に以下のように与えられる：

- a) k が起点ノード、かつ、 l が終点ノード。
- b) k, l が終点ノード以外であり、以下の条件式を満たす。

$$-\mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{e}_l - \mathbf{e}_k] > 0. \quad (50)$$

または、 k が終点ノード、かつ、 l が通過ノードであり、以下の条件式を満たす。

$$-(1 + \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k) > 0. \quad (51)$$

- c) k が通過ノード、かつ、 l が終点ノードであり、以下の条件式を満たす

$$1 + \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k > 0. \quad (52)$$

命題 3 における三つの条件の違いは、リンク容量が低下した際に変化するトリップ完了流率 (37) の項の違いに対応している。より具体的には、容量低下するリンクの縮約ネットワーク上の位置と解析式の変化は以下のように整理される (それらを図示した図-4 も参照)。

命題 3-a) を満たすリンクの容量低下は、式 (37) の第一項の低下、すなわち終点へ流入するフローの低下をもたらす。図-4-a の縮約ネットワーク上では、終点 d に流入するリンクがこの条件に該当する。

命題 3-b) の式 (50) を満たすリンクの容量低下は、式 (37) の第二項の増加、すなわち終点から通過ノードへ流

出するフロー (i.e., 通過交通) の増加をもたらす。図-4-b の縮約ネットワーク上では、その通過ノードに到達するフローは、終点ノード d を経由する経路とそうでない経路を通ることが可能である。このうち、終点ノードを経由しない経路上のリンクがこの条件に該当する。一方、式 (51) を満たすリンクの容量低下も、式 (37) の第二項の増加に対応するものである。この条件は、(行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ の要素を書き下すことができないため) 一般的に排除することが難しいが、物理的・利用者の行動原理的には生じ得ないと考えられる。つまり、条件 (51) は、上記とは逆に、図-4-b の (終点ノード d を経由する経路上の) 終点ノード d から流出するリンクの容量低下により終点ノード d の通過交通が増加することを意味しているが、このような現象が生じるとは考えづらい。

命題 3-c) を満たすリンクの容量低下は、式 (37) の第一項と第二項の低下、すなわち終点ノードへの流入フローの低下、および、終点ノードから通過ノードへ流出するフローの低下を意味している。図-4-c の縮約ネットワーク上では、終点 d に流入するリンク容量の低下が生じる一方で、その終点 d を経由して終点 d' に向かう通過交通も減少する。ここで、式 (52) が満たされる場合は、前者が大きくなるためトリップ完了流率が低下することになる。

なお、図-4 は、命題 3 の各条件式を満たす、最小構成要素の縮約ネットワークである。従って、より複雑な縮約ネットワークであっても、あるいは、オリジナルのネットワークにおける渋滞パターンが一見複雑であっても、トリップ完了流率が低下する場合には、図-4 に示した構造が縮約ネットワークの部分ネットワークとして発現する。次節では、図-4 の構造が縮約ネットワークとして発現するオリジナル・ネットワークの典型例を示し、より具体的にトリップ完了流率の低下メカニズム、および、トリップ完了流率の低下が発生する状況について考察していく。

(3) トリップ完了流率の低下メカニズム

a) 終点のブロッキングによる低下

ほぼ縮約ネットワークと同型であるが、図-5-a に、命題 3-a) を満たすリンク (o, d) を含むオリジナル・ネットワークの例を示す。ネットワーク上のリンク (d, j) の渋滞がリンク (o, d) に延伸し、リンク容量 (捌け量) が低下していくとしよう。このとき、より下流側の終点 (i.e., 終点ノード d') に向かうリンクの渋滞延伸が上流側の終点 d に向かう交通流をブロックするために、トリップ完了流率の低下が発生する。このような状況は、例えば高速道路であれば、オフ・ランプ直下流にボトルネックがあるような場合によく生じると考えられる。

⁴ リンク交通量が、一定の集計間隔で観測されているとすると、その集計間隔内のすべて時間が渋滞延伸の影響を受けるまでに一定のラグがある。その意味では、本研究の感度分析は渋滞延伸後の渋滞パターン \mathbf{x} に適用していると解釈することもできる。

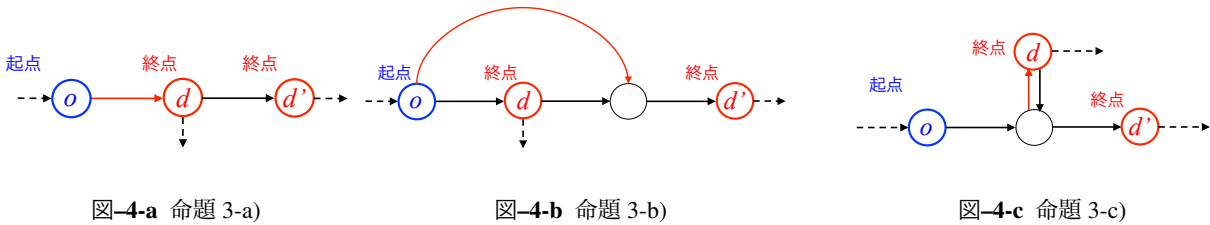


図-4 命題 3 の各条件式を満たすリンク (赤実線) を含む縮約ネットワーク

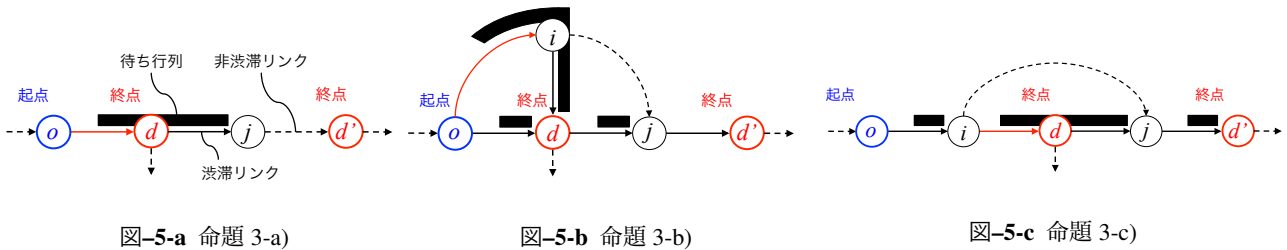


図-5 命題 3 の各条件式を満たすリンク (赤実線) を含むオリジナル・ネットワーク

b) 経路選択 (通過交通量) の変化による低下

図-5-b に命題 3-b) の条件式 (50) を満たす, リンク (o, i) を含むオリジナル・ネットワークの典型例を示す. このネットワークでは, 終点ノード d' に向かう利用者が, 終点ノード d を経由する経路とそうでない経路を使用しうる. 前節と同様に, リンク (d, i) の渋滞がリンク (o, i) に延伸しリンク容量が低下したとすると, 終点を d' とする利用者の経路選択が変化し, 終点 d を経由する経路をより多く利用するようになる. しかし, 終点 d に流入するリンク (o, d) の容量は変わっていないため, 一定の容量を異なる終点に向かう利用者同士が分け合うという状況にある. そして, 終点 d に流入するフローのうち, 終点を通過するフロー (通過交通) が増加し, トリップ完了流率が低下する. これは, 市街地を迂回するバイパスが, 混雑によりその機能を果たせなくなっている状況であると解釈できる.

c) 経路選択によるブロッキング現象の緩和

図-5-c に命題 3-c) の条件式を満たす, リンク (i, d) を含むオリジナル・ネットワークの例を示す. これは, 上記 a) のブロッキングによるトリップ完了流率の低下が, 経路選択により緩和されている状況である. いま, リンク (d, j) の渋滞がリンク (i, d) に延伸したとしよう. このとき, 下流ボトルネックから延伸する渋滞のブロッキングにより終点 d への流入フローが減少する. しかし, 同時に終点 d' に向かう利用者の経路選択が変化し, 終点 d を通過しない経路がより利用されるようになるため, 終点 d の通過交通も減少する. ただし, 条件式 (52) が満たされている場合, ブロッキングによるトリップ完了流率の低下が経路選択の影響によるトリップ完

了流率の増加を上回っているため, 結果的にトリップ完了流率は低下する. これは, バイパスが本来の機能を果たしているものの, その利便性が十分ではない状況であると解釈することができる.

5. 数値計算例

本章では, 動的な OD 需要パターンに従って実現した DUE 状態における NEF と, 提案手法により解析的に評価した NEF を比較することにより, 提案手法の妥当性を確認する. まず (1) では, 数値計算における設定と, DUE 状態の数値計算法を説明する. (2) では, 時々刻々の実現した渋滞パターンに提案手法を適用することで解析的に導出される理論値と実現値の比較を行なう. また, トリップ完了流率が低下する際に, 前章で示したメカニズムが働いていることを確認する.

(1) 数値計算設定

図-6 に, 本章で取り扱う 1 起点多終点ネットワークを示す. 起点はノード 0 であり, 終点ノードの集合は $N_d = \{10, 11, 13, 14, 19, 20, 21, 24\}$ である. これら終点は起点からの距離に応じて, 次の 3 つの終点群に区分する: $N_{d1} = \{10, 11, 13, 14\}, N_{d2} = \{19, 20, 21\}, N_{d3} = \{24\}$. ネットワーク上の各リンクは, リンク終端のボトルネック部とボトルネック以外の区間から構成されており, 台形型の Fundamental Diagram (FD) を持つ (図-7). 図中の括弧書きの数字は, それぞれ自由旅行時間 [sec], ボトルネック容量 μ_b [veh/sec] を示しており, ボトルネック以外の区間における交通容量 μ_l は 4 [veh/sec] とする. 数値実験を開始してから t 秒後のネットワークへの総

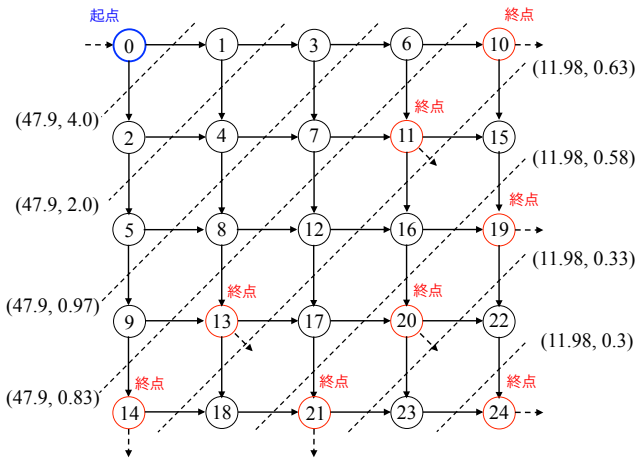


図-6 1 起点多終点ネットワーク

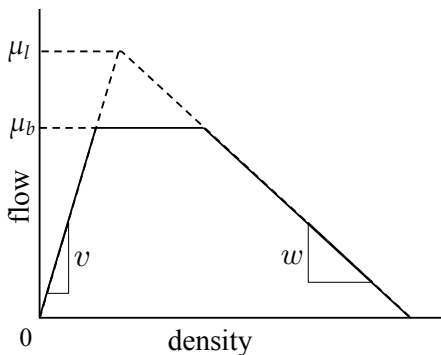


図-7 台形型の Fundamental Diagram

流入交通流率は以下のように与えている。

$$\sum_d dQ_{od}(t)/dt = \begin{cases} 2 + \frac{1}{600}t & t < 1800 \\ 5 & 1800 \leq t < 3900 \\ 5 - \frac{1}{600}(t - 3900) & 3900 \leq t < 5700 \end{cases}$$

また、各終点群に向かう利用者の比率は、 $N_{d1} : N_{d2} : N_{d3} = 1 : 2 : 2$ と設定した。DUE 状態におけるネットワーク全体の車両存在台数とトリップ完了流率は、すべての需要が流入するまで 3 分間隔で集計され、各時間帯における平均値を実現値とする。なお、各リンクの渋滞の有無 (i.e., 渋滞パターンおよびリンク容量値) についても、3 分間集計されたリンク交通量から判定をし、解析式へのインプットとしている。

本研究では、井料²⁸⁾によって提案された手法により、DUE 配分を行う。この方法は、離散化された車両のうち、“最早未配分車両” (i.e., 当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が、他のどの車両の流入時刻よりも遅くない) を 1 台ずつ最短経路に配分するものである。すなわち、最早未配分車両を順次最短経路に配分することにより、後から配分される車両は前に配分された車両を追い越すことはなく (i.e., ある車両の軌跡が、それ以降の車両の軌跡に影響されない)、どの車両も事後的な最短経路を走っている状態が達成される。

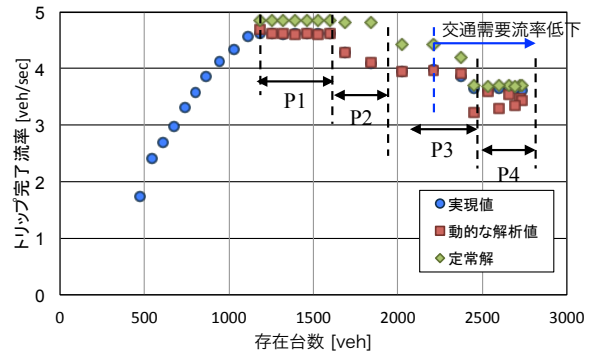


図-8 NEF の実現値と理論値

本研究で取り扱う 1 起点多終点ネットワークにおいては、与えられた OD 需要をネットワークへの流入時刻が早い順に 1 台ずつ最短経路に配分していけば、ヒューリスティックな計算をすることなく、DUE の均衡解を求めることができる。

また、この手法では渋滞延伸を考慮した様々な交通流モデルを採用することが出来るが、本研究では Newell の追従モデル²⁹⁾を採用している。このモデルでは、追従状態にある車両 n の軌跡は、直近の車両 $n-1$ の軌跡を (地点の容量 μ の関数である) 最小車頭距離 $d(\mu)$ と最少車頭時間 $\tau(\mu)$ だけシフトしたものと計算される。より具体的には、車両 n の時刻 t における位置 x_n は、FD の自由旅行速度 (前進波速度) を v 、後進波の速度を w としたとき、

$$x_n(t) = \min\{x_{n-1}(t - \tau(\mu)) - d(\mu), x_n(t - 1) + v\} \quad (53)$$

$$\text{where } d(\mu) = \frac{wv}{\mu(w-v)}, \quad \tau(\mu) = -\frac{v}{\mu(w-v)}$$

と与えられる。ここでは、最適速度を $v = 16.7[\text{m/sec}]$ 、後進波の速度を $w = 8.33[\text{m/sec}]$ としている。

(2) 数値計算結果

図-8 に、車両存在台数に対するトリップ完了率の実現値 (NEF) と、時々刻々に発現した渋滞パターンに対して解析式を適用することで導出した理論値の推移を示す。なお、理論値は動的な交通条件下のもの、定常状態下のものを両方示している。図中の P1 ~ P4 は、図-10 に示した渋滞パターンが実現している車両存在台数の範囲を示している。

この図からまずわかることは、動的な交通条件下のトリップ完了率の理論値が実現値にほぼ一致していることである。ただし、P4 において車両存在台数が減少しているときには、実現値と理論値の乖離が見られる。これは、この時間帯において、式 (38) による近似の誤差が大きくなるためであると考えられる。より具体的には、OD 旅行時間がそれぞれの終点群で異なることに加え (この点は P1 ~ P3 でも同様)、起点における

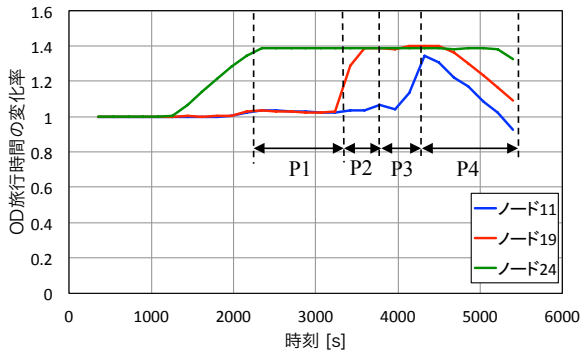


図-9 各終点ノードへの旅行時間変化率

流入交通流率が減少しているため、式 (38) による近似誤差が大きくなる。逆に、P1 ~ P3 は流入交通流率が一定であるため、式 (38) による近似誤差が小さい。つまり、ネットワークへの流入交通流率の変化が十分緩やかであれば、式 (43) は DUE 状態で実現するトリップ完了率のよい近似を与えることがわかる。

次に、定常状態下のトリップ完了率の理論値を見ると、渋滞パターンの遷移 (P2 および P3) に伴い低下しているものの、トリップ完了率を過大評価していることがわかる。これは、3.(3) でも考察した通り、ネットワーク内の (より正確には異なる終点群の間の) 車両存在台数が増加しているためである。このことを、より具体的にみるために、図-9 に各終点ノードへの旅行時間の変化率 $\bar{\tau}_d$ の時間推移を示す。異なる終点間の旅行時間の変化率の違いは、その終点間で待ち時間あるいは待ち行列が増加・減少していることを意味している。

この図をみると、P1 が実現している時間帯では、最も下流の終点への旅行時間の増加率のみが高く、終点群 N_{d2} と N_{d3} の間で車両存在台数が増加している。従って、定常状態を仮定したトリップ完了率はやや過大評価気味である。P2 の時間帯になると、 N_{d2} への旅行時間の増加率も上昇しており、P2 から P3 にかけて終点群 N_{d1} と N_{d2} の間の車両存在台数が増加している。従って、ここでも定常状態下のトリップ完了率は過大であり、 N_{d2} への旅行時間の増加率の上昇が急激であるため、その乖離も大きい。一方、P4 になると、最も上流の終点群 N_{d1} への旅行時間の増加率も上昇し (起点と終点群 N_{d1} の間の車両存在台数の増加) 終わり、終点群 N_{d1} の上流側から車両存在台数が減少している。そして、この P4 の時間帯では、異なる終点群の間での車両存在台数の増減は小さいため、定常状態下のトリップ完了率と実現値の乖離は小さくなる。

続いて、トリップ完了率が低下する (NEF の渋滞領域が発現する) 原因を渋滞パターンから考察している。図-10 は、先にも述べたように、P1 ~ P4 に対応する渋滞パターンである。また、図-11 に、P1 ~ P4 に

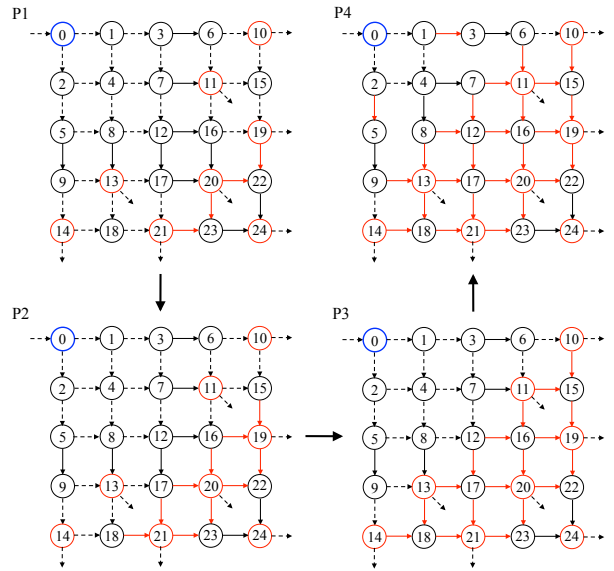


図-10 渋滞パターンの進展 (実線：渋滞リンク，点線：非渋滞リンク，赤線：渋滞延伸で容量が変化したリンク)

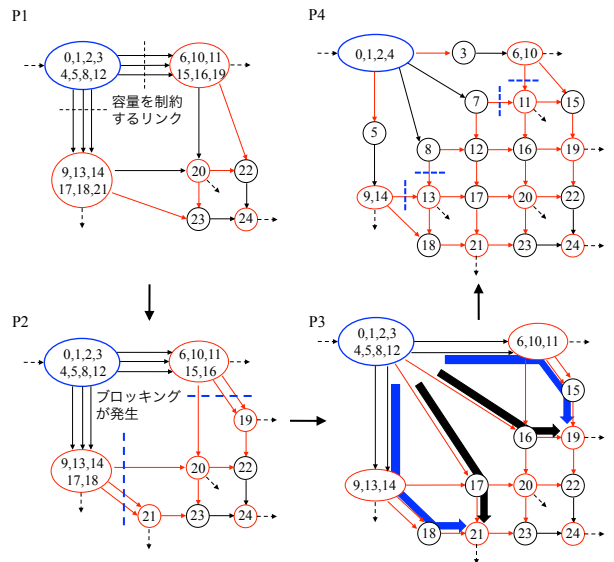


図-11 縮約ネットワークの進展

対応する縮約ネットワークを示す。まず、これらの図からわかるように、この数値計算例では、終点ノード 24 に接続するリンクを起点とする渋滞がネットワーク全体に延伸していき、渋滞・容量パターンが変化している。次に、トリップ完了率が低下している P2 ~ P4 の縮約ネットワークをみると、いずれのパターンでも、前章で示したトリップ完了率の低下メカニズムが発現していることが確認することができる。より具体的には、P2 および P4 では、終点ノードに流入するリンク (図中青点線で示したリンク) に待ち行列が延伸するブロッキングが発生していることが分かる。一方、P3 では、終点ノード {19,21} に対して、他の終点ノードを経由する経路 (図中青矢印) と経由しない経路 (図中黒

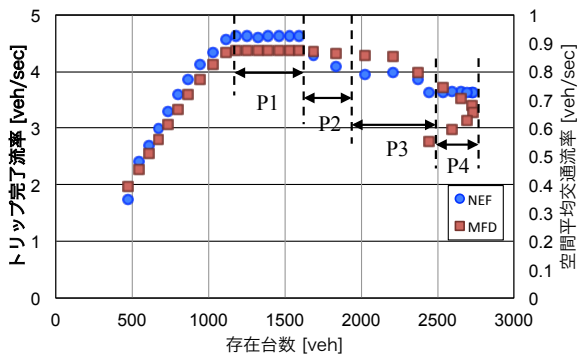


図-12 NEF と MFD の比較

矢印) が存在しており、終点ノード {19,21}, また、より下流に位置する終点ノード 24 に向かう利用者と、終点群 {6,9,10,11,13,14} でトリップを完了する利用者として限られたリンクの容量を分け合う状況になっている。そしてさらに、図中の黒矢印の経路のリンクまで渋滞が延伸したことで、経路選択が変わり、トリップ完了率の低下が発生したことが分かる。

最後に、前章で示した結果が MFD の渋滞領域の発現メカニズムとしても妥当であることを確認するために、MFD (車両存在台数と空間平均交通流率の関係) の挙動についても見ておこう。ここで、MFD の空間平均交通流率は、Edie の定義³⁰⁾に従って計算した各リンクの交通量を、リンク長で重み付け平均して求めた。図-12 に NEF と MFD の実現値を示す。この図より、MFD が NEF の傾向をおおむね捉えていることがわかる。ただし、P2 ~ P3 では、その変化が NEF に比べて鈍っている。これは、トリップ完了率 (交通処理量) の低下が直接反映される NEF と異なり、MFD はトリップ完了率に直接関係ないリンクも含むネットワーク全体のリンク交通量の平均値を表しているためである。また、P4 における車両存在台数の減少局面では、NEF は低下しないにも関わらず、MFD は低下している。これも同様に、トリップ完了率には関係ないリンク交通量減少の影響である。つまり、MFD によりネットワークの交通性能を推し量ることは可能であるが、MFD を NEF の代替として利用する (トリップ完了率を推定する) 際には、以上のような傾向に注意が必要であると言えよう。

6. おわりに

本研究は、1 起点多終点ネットワークを対象に、渋滞パターンに基づく MFD の解析法を提案した。より具体的には、渋滞パターンを与件とした DUE 配分の逆問題を考え、定常状態および動的な交通条件下のトリップ完了率の解析式を導出した。また、この解析式の

感度分析により、渋滞延伸によるトリップ完了率の低下条件およびそのメカニズムを考察した。その結果、(i) トリップ完了率が、縮約ネットワーク構造、OD 分布、および、OD 旅行時間の変化率により特徴づけられること、(ii) トリップ完了率の低下が、延伸した渋滞による終点流入フローのブロッキング、および、終点流入リンク容量に占める通過交通量の増加により引き起こされること、が理論的に明らかになった。

本稿では、1 起点多終点ネットワークにおけるトリップ完了率の低下メカニズムを明らかにしたが、このメカニズム自体は、より一般的な多起点多終点の OD 分布を想定しても発現しうるものである。また、DUE の仮定を緩め、利用者の異質性や観測の不完全性を考慮したより現実的な経路選択モデルでも定性的には同様の結論が得られると考えられる。また、以上のような解析は、多起点 1 終点ネットワークについても同様に行うことができる。実際、佐津川・和田³¹⁾では、定常状態下のトリップ完了率を解析的に導いている。ただし、本稿で示したようなトリップ完了率の低下メカニズムは、多起点 1 終点ネットワークでは働かないことが、いくつかの例や数値計算により示唆されている³²⁾。これは、多起点 1 終点ネットワークでは、上記(ii)で述べたような異なる終点を持つフローの相互作用が働かないためであると思われるが、本稿のような感度分析により、理論的にその特性を明らかにすることも可能であろう。

今後の重要な課題としては、交通制御 (e.g., 信号制御, ランプ・メタリング) と MFD 形状の関係を理論的に明らかにしていくことが挙げられる。交通制御ロジックの多くは、局所的な基準に基づきネットワーク上の渋滞パターンやその容量を制御するものであるが、その結果としてネットワーク全体としては状態が悪化する。しかし、こうした交通制御とネットワーク性能の関係を一般的に議論するためには、均衡制約付き最適化問題など非凸問題を扱う必要がある。提案手法は、この関係を (渋滞パターンを与件とする意味で) 局所的に、しかし、簡便かつ解析的に与える手法とも解釈することができるため、ネットワーク性能の低下を回避する制御ロジックの構築の基礎として有用であると考えられる。

より挑戦的な課題としては、多起点多終点ネットワークに対して、提案した解析手法を拡張することが挙げられる。多起点多終点ネットワークの一般的な DUE 配分手法が確立していない現状では、その拡張の方向性も自明ではないが、1 つの方向性としては、多起点多終点のフロー・パターンを起点別に分解する (cyclic decomposition の考え方に基づく) アプローチが考えられる。ただし、非線形の FIFO 制約を考慮して、フローをどう適切に起

点別に分解すべきか、あるいは、重ね合わせるべきか、など解決すべき課題も多い。従って、その拡張の詳細については、改めて別の機会に報告したい。

謝辞： 本研究は、日本学術振興会・科学研究費補助金・若手研究(B) (課題番号：26820207)、基盤研究(B) (課題番号：15H04053) を受けた研究の一部である。ここに記し、感謝の意を表します。

付録 I 命題 3 の証明

リンクの上下流ノードの種類別に、トリップ完了流率に関する感度式 (49) を具体的に計算する。

1. リンク (d, d') ($d, d' \in N_d$) のとき、式 (49) の第一項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{dd'}} = \mathbf{1}^T \mathbf{A}_d \mathbf{I}_{dd'} \mathbf{A}_{d'}^T = 1 - 1 = 0. \quad (\text{I.1})$$

2. リンク (o, d) のとき、式 (49) の第一項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{od}} = \mathbf{1}^T \mathbf{A}_d \mathbf{I}_{od} \mathbf{A}_{d-}^T = 1 > 0. \quad (\text{I.2})$$

3. リンク (d, o) のとき、式 (49) の第二項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{do}} = -\mathbf{1}^T \mathbf{e}_d = -1 < 0. \quad (\text{I.3})$$

4. リンク (o, k) ($k \in N_i$) のとき、式 (49) の第四項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{ok}} = -\mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k \hat{t}_k. \quad (\text{I.4})$$

ここで、 \mathbf{V}_{di} の要素は全て 0 以下であり、かつ、 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は非負行列 (証明は付録 II を参照) であるため、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{ok}} \geq 0. \quad (\text{I.5})$$

5. リンク (k, o) のとき、式 (49) の第五項以外は 0 となり、上記と同様の論理により、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{ko}} = \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k \leq 0. \quad (\text{I.6})$$

6. リンク (k, d) のとき、式 (49) の第一項、第五項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{kd}} = 1 + \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k. \quad (\text{I.7})$$

7. リンク (d, k) のとき、式 (49) の第三項、第四項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{dk}} = -\hat{t}_k \left[1 + \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k \right]. \quad (\text{I.8})$$

なお、(I.8) は (I.7) に負の値を掛けたものであり、これらの正負は互いに異なる。

8. リンク (k, l) ($k, l \in N_i$) のとき、式 (49) の第三項、第四項以外は 0 となり、

$$\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mu_{kl}} = -\mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{e}_l - \mathbf{e}_k] \hat{t}_l. \quad (\text{I.9})$$

以上の感度が正のとき、リンク容量の低下によりトリップ完了流率が低下する。つまり、上記 2. が命題 3 の a) に対応しており、4. および 7. が命題 3 の b)、6. が命題 3 の c) に対応する。(証明終)

付録 II 逆行列 \mathbf{V}_{ii}^{-1} の非負性の証明

通過ノードへの流出入リンクの容量を要素に持つ行列 \mathbf{V}_{ii} の逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ が、非負行列であることを示す。

まず、ある非特異 (正則) な行列 \mathbf{B} の逆行列 $(\mathbf{B})^{-1}$ が非負行列であるためには、行列 \mathbf{B} が \mathbf{M} -行列であればよい。 \mathbf{M} -行列とは、全ての固有値の実部が正である \mathbf{Z} -行列のことであり、 \mathbf{Z} -行列とは全ての非対角成分が 0 以下である行列である。すなわち \mathbf{Z} -行列は以下を満たす。

$$\mathbf{Z} = (z_{ij}); z_{ij} \leq 0, i \neq j \quad (\text{II.1})$$

ここで、 \mathbf{V}_{ii} は、ある行 i について対角成分にノード i への流入リンクの容量、非対角成分にノード i から他の通過ノードへの流出リンクの容量をもつ行列である。すなわち \mathbf{V}_{ii} の非対角成分は 0 以下であり、定義より \mathbf{V}_{ii} は \mathbf{Z} -行列である。

以上の条件より、 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ が非負行列であるためには、 \mathbf{M} -行列であること、すなわち \mathbf{V}_{ii} の固有値が正であれば良い。この固有値を解析的に表すことはできないが、ゲルシュゴリンの定理を用いることによりその範囲を求めることができる。

定理 1. (ゲルシュゴリンの定理) $n \times n$ の複素行列 \mathbf{B} の各成分を b_{ij} とする。また、各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して、

$$R_i = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$$

を第 i 行の非対角成分の絶対和とする。そして、 b_{ii} を中心とする半径 R_i の閉円板 (b_{ii}, R_i) をゲルシュゴリンの円板という。このとき、行列 \mathbf{B} の任意の固有値は、少なくとも 1 つのゲルシュゴリンの円板上にある。

以上のゲルシュゴリンの定理より、全ての行において以下が成り立つとき、固有値は必ず 0 以上となる。

$$b_{ii} - R_i = b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{II.2})$$

\mathbf{V}_{ii} の i 行はあるノードへの流入と流出を表すものであり、流出リンクが渋滞している以上、流入リンク容量の総和 (b_{ii} に相当) が流出リンク容量の総和 ($\sum_{j \neq i} |b_{ij}|$ に相当) より小さいことはない。よって、全ての行について式 (II.2) が成り立っており、 \mathbf{V}_{ii} の全ての固有値は 0 以上である。更に \mathbf{V}_{ii} は正則行列であるため、固有値に 0 を持つことはない。

以上より \mathbf{V}_{ii} の全ての固有値は正であるため、 \mathbf{V}_{ii} は非特異な M -行列である。非特異な M -行列の逆行列は非負行列になるため、 \mathbf{V}_{ii} の逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は非負行列である。(証明終)

参考文献

- 1) Daganzo, C. F.: Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B*, Vol.41, No.1, pp.49–62, 2007.
- 2) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Macroscopic modeling of traffic in cities, *Proceedings of the Transportation Research Board 86th Annual Meeting*, 2007.
- 3) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings, *Transportation Research Part B*, Vol.42, No.9, pp.759–770, 2008.
- 4) Wang, P., Wada, K., Akamatsu, T., and Hara, Y.: An empirical analysis of macroscopic fundamental diagrams for Sendai road networks, *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol.21, No.1, pp.49–61, 2015.
- 5) Godfrey, J. W.: The mechanism of a road network, *Traffic Engineering and Control*, Vol.11, pp.323–327, 1969.
- 6) Herman, R. and Prigogine, I.: A two-fluid approach to town traffic, *Science*, Vol.204, No.4389, pp.148–151, 1979.
- 7) Ardekani, S. and Herman, R.: Urban network-wide traffic variables and their relations, *Transportation Science*, Vol.21, No.1, pp.1–16, 1987.
- 8) Mahmassani, H., Williams, J., and Herman, R.: Performance of urban traffic networks, *Proceedings of the 10th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by N. Gartner and N. Wilson), pp. 1–20, Amsterdam, The Netherlands, 1987, Elsevier.
- 9) Yoshii, T., Yonezawa, Y., and Kitamura, R.: Evaluation of an area metering control method using the macroscopic fundamental diagram, *Proceedings of the 12th World Conference of Transport Research*, 2010.
- 10) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.3, pp.605–617, 2011.
- 11) 王鵬飛・赤松隆・和田健太郎: Macroscopic Fundamental Diagram における渋滞領域発生メカニズムに関する実証研究, 土木計画学研究・講演集, Vol. 51, pp. 156 (CD-ROM), 2015.
- 12) Mazloumian, A., Geroliminis, N., and Helbing, D.: The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity., *Philosophical Transactions of Royal Society A*, Vol.368, No.1928, pp.4627–47, 2010.
- 13) Daganzo, C. F., Gayah, V. V., and Gonzales, E. J.: Macroscopic relations of urban traffic variables: Bifurcations, multivaluedness and instability, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.1, pp.278–288, 2011.
- 14) Knoop, V. L. and Hoogendoorn, S. P.: Empirics of a generalized macroscopic fundamental diagram, *Transportation Research Record*, Vol.2422, No.14, pp.1–11, 2013.
- 15) 王鵬飛・和田健太郎・赤松隆・杉田正俊・名古屋利一・鷲見浩: 長期間観測データを用いた Macroscopic Fundamental Diagram の特徴づけ: 仙台市および京都市におけるケース・スタディ, 交通工学論文集, 2016 (accepted).
- 16) de Jong, D.: The effect of network structure and signal settings on the macroscopic fundamental diagram, Master's thesis, Delft University of Technology, 2012.
- 17) Leclercq, L. and Geroliminis, N.: Estimating MFDs in simple networks with route choice, *Transportation Research Part B*, Vol.57, pp.468–484, 2013 (In: *Proceedings of the 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by S. P. Hoogendoorn et al.), Delft, pp.960–979, 2013.).
- 18) Leclercq, L., Parzani, C., Knoop, V. L., Amourette, J., and Hoogendoorn, S. P.: Macroscopic traffic dynamics with heterogeneous route patterns, *Transportation Research Part C*, Vol.59, pp.292–307, 2015 (In: *Proceedings of the 21st International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by M. Kuwahara et al.), Kobe, pp.631–650, 2015.).
- 19) 赤松隆・桑原雅夫: ネットワーク接続行列のランクについて, 土木学会論文集 IV, Vol.17, No.449, pp.223–226, 1992.
- 20) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Berkeley, 1993, Elsevier.
- 21) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B*, Vol.81, pp.808–829, 2015 (In: *Proceedings of the 21st International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by M. Kuwahara et al.), Kobe, pp.474–498, 2015.).
- 22) 赤松隆・桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 OD ペアの場合, 土木学会論文集 IV, Vol.23, No.488, pp.21–30, 1994.
- 23) 赤松隆・高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと OD 構造の関係に関する理論的考察, 土木学会論文集 IV, Vol.43, No.618, pp.39–51, 1999.
- 24) Akamatsu, T. and Kuwahara, M.: A capacity increasing paradox for a dynamic traffic assignment with departure time choice, *Proceedings of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by A. Ceder), pp. 301–324, Jerusalem, 1999, Pergamon.
- 25) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
- 26) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks, *Transportation Science*, Vol.37, No.2, pp.123–138, 2003.
- 27) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes: Analysis of non-saturated networks, Working Paper, Tohoku University., 2003.
- 28) 井科隆雅: 車両を離散化した動的交通量配分問題の nash 均衡解の解法, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
- 29) Newell, G.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.
- 30) Edie, L. C.: Discussion of traffic stream measurements and definitions, *Proceedings of the 2nd International Symposium on the Theory of Traffic Flow*, (Ed. by J. Almond), pp. 139–154, Paris, 1963, OECD.
- 31) 佐津川功季・和田健太郎: 多起点 1 終点ネットワークにおける巨視的な交通性能解析, 交通工学発表会論文集, Vol. 35, pp. 299–306, 2015.
- 32) Satsukawa, K. and Wada, K.: Effect of origin-destination structures on network performance: Some simple examples, *Proceedings of the 20th International Conference of Hong Kong Society for Transportation Studies*, pp. 526–534, 2015.

(2016. 5. 5 受付)

TRAFFIC PERFORMANCE ANALYSIS OF ROAD NETWORK BASED ON DYNAMIC USER EQUILIBRIUM

Kentaro WADA and Kouki SATSUKAWA

This paper clarifies the relationship between a Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) and congestion patterns on a general network with one-to-many OD pairs. Specifically, we formulate a new inverse problem of the dynamic user equilibrium assignment problem for a given congestion pattern. The proposed problem is formulated as a system of linear equations; by solving this, we can derive an analytical formula of a trip completion rate consistent with the congestion pattern. Through a sensitivity analysis of this formula, we identify the types of congestion patterns that cause the decreasing of a trip completion rate (the mechanism of a decreasing branch of MFDs).