

自動車避難計画のための 津波遭遇リスク最小化モデル

片岡 侑美子¹・奥村 誠²・金 進英³

¹正会員 東京都建設部

E-mail: yumiko.kataoka@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学教授 災害科学国際研究所 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, S502b)

E-mail: mokmr@m.tohoku.ac.jp

³非会員 (株) 交通システム研究所 主任研究員 (〒532-0011 大阪市淀川区西中島7-1-20)

E-mail: kim.jinyoung@tss-lab.com

東日本大震災の経験を踏まえ、やむを得ない場合での自動車避難が認可された。それゆえ、今までの徒歩を原則とする津波避難計画の見直しが必要となっている。避難計画の策定に際して、最適な経路や時間を計算できる最適モデルは有用である。本研究では、どの時間帯にどこにどれくらいの車が存在するかを明示的に表現するCell-based モデルをベースとする津波避難最適交通配分モデルを提案する。提案するモデルは、各セルに与えた津波に対する危険度に各単位時間帯の車両数を掛け、その合計である総リスクを最小化する。また、交差点での誘導に関する制約条件を加えたことにより、導入する制御の段階に応じたリスクの減少効果を定量的に計算する方法を開発した。本論文では、市区町村レベルのネットワークへの適用例と双対変数情報の活用方法を示している。

Key Words : *optimal model, evacuation, tsunami, cell-based network*

1. はじめに

「交通の教則」において、自動車を利用した津波避難は禁止されていたが、東日本大震災において徒歩では間に合わない地域からの避難者が多く存在することが明らかになったのを踏まえ、2012年3月にやむを得ない場合での自動車避難が許容された。しかし、2012年12月に起きた三陸沖地震では、多数の避難車両による渋滞が発生し、道路上で動けなくなり、自由な自動車避難の危険性が露呈した。そのため、自治体では自動車避難を認めるとしても、安全かつ確実に避難できる方策を検討する必要がある。

現在までの既存研究の多くは、想定される避難政策が安全な避難を可能にするのかを確認するシミュレーションである。しかし、シミュレーションモデルには、現在の避難インフラの中で地域全体の安全性を最大限確保するための各車両の避難先や経路配分を求める論理は内包されていない。そのためこれらを論理的に計算できる最適化モデルの役割が大きい。最適化モデルは、制約条件下において最も理想的な交通配分を求めるが、現実の社会は理想的な状態とはほど遠いため、実社会への適用性への疑問や非難が少なくない。しかし、情報が伝わらないとか、周囲の意思に引きずられるなどの、理想からの

乖離要因のいくつかは、最適化モデルにおける制約条件として表現することが可能である。

交通工学の立場では、自由な自動車避難は渋滞を多発し避難に悪影響を及ぼすので、渋滞を発生させないように経路指定や信号制御による誘導を行うべきだという指摘がある。このような適切な制御を前提とすれば、最適化モデルを構築する上で、渋滞の存在を無視できるため区間の流入と流出を分けて考える必要がなく、Earliest Arrival Flow (EAF)の考え方をういた簡潔なモデリングが使用できる。

本研究では、津波避難計画の目標は渋滞の防止ではなく、避難者が津波に遭遇するリスクの最小化であると考え、各時刻にどこにどれくらいの車が存在するかを明示的に表現できるCell-basedモデルを基にした、津波避難最適交通配分モデルを提案する。提案するモデルの特徴として、各セルの各車両が被る危険度の時間変化を与えると同時に、他人に追従するという行動や交差点における方向誘導に関する制約条件を加えることにより、より現実的な避難行動の元での状況を計算できることがある。本論文では、小規模な市区町村レベルのネットワークへの適用を通して、モデルの特徴と有用性を確認している。

2. 最適避難モデルの構築

(1) 最適避難モデルの要件

本研究では津波避難計画の策定の初期の段階において、どこに避難場所を設けるべきか、誰がどこに避難すべきか、などが確定していない段階にあると想定する。仮に、現時点で定められている避難場所の駐車場のみを目的地とする代わりに、さらに遠方の高台や道路上のリスクが低い区間に留まる方が地域全体の総リスクを小さくできるのであれば、それらの場所を避難場所に加えるという変更ができる。つまり目的地の構成 (OD) は所与ではなく、これから変更できるという段階を考えている。

本研究では、津波避難において渋滞や混雑の発生そのものは問題ではなく、それらの結果として津波と遭遇する危険性が大きな場所に車両が留まってしまうことが問題であると考え。この時、渋滞・混雑の発生を許すことにより、安全な側へ車両を詰め込むことができ、総リスクをより小さくできる可能性があることに着目する。

そこで、i) 地点ごとの津波遭遇リスクの導入、ii) 渋滞・混雑の表現、iii) 各時刻・地点での移動中・渋滞中の車両数の明示的な把握の3つ条件を満たすCell-based Merchant-Nemhausr (M-N)モデル (Nie, 2011¹⁾) に基づいて、避難時の津波との遭遇リスクを最小化するモデルを構築する。Daganzo²³⁾によるCell Transmission Model (CTM)では、セルごとに流入を表すフロー関数を1つ設けているのに対して、Cell-based M-Nモデルではセルごとに流入と流出の2つのフロー関数を設ける。また、セルとセルの間の接続関係をノードを介して表現する。これらにより、変数の数が多くなるものの、分岐点や合流点における複数のセルに対する制約条件を加える必要がなくなり、定式化が明瞭になる。

(2) Cell-basedモデルの既存研究

セルベースの最適避難交通計画モデルの既存研究は多く存在する。Xie et al.⁴⁾は、交差点における交通流の交差の排除とそれに伴う一方通行化 (コントラフロー) の二つの施策を行った場合の最適避難ネットワークを得るための二段階計画問題を提案した。そこでは目的関数として、総所要時間最小と避難完了時刻最小の二つが使われている。Ben-tal et al.⁵⁾は目的関数にコストを導入したロバスト最適の動的な交通計画問題を提案している。この目的関数は指定した時間までに目的地に着けない車両に対して大きなリスクを与え、制限時間以内であればコストは単一としているため、実質的に所要時間最小化を行っていることとなる。

一般的なセルベースのシステム交通計画モデルでは、フロー関数の制約条件が不等式で表現されているため、多対多 OD のような Multi-commodity 問題においては解の

一意性が保証されないという問題点が指摘されている。また、目的地に向かう次のセルに空きがあるにもかかわらず次の時間までに車両が動かず同じセルに留まるという Holding は、前の道路が空いているのに動かないでいる状態は運転者の通常の行動パターンでは考えにくく、解の実現性が失われている可能性があるとして、問題視されている。

最近では、He et al.(2015)⁶⁾が Earliest Arrival Flow (EAF) を用いた最適動的資源配置問題を提案している。この問題は交通誘導員などの移動可能な資源の最適な配置場所と最適な避難交通流を同時に求める混合整数線形問題である。EAF とは、ある時刻までに目的地に到着する交通量を最大とする流量であり、それが指定した全時間帯を通じて成立しているという条件下での問題を考えるもので、Holding は発生せず、解も一意である。EAF はリンクをセルに分割する必要がないため、CTM より変数が少なくて済む利点がある。Zheng et al.(2013)⁷⁾は、セルのプロパティが時間的に不変な CTM ベースのシステム最適動的な交通配分問題の解に対して同じ目的関数値を与える EAF が存在することを証明し、Holding 問題が回避できることを示している。その証明においては、目的関数のコスト係数が単一であることを前提としている。

目的関数として、時間とともに変化する津波遭遇リスクを考える本研究では、上記のような証明は使えないが、そもそも Holding を問題視する必要が小さい。本研究のモデルでは必ずしも避難場所を目的地として移動する必要がなく、あるセルに対して次にどちらに進むべきかが先験的に決定していないため、「目的地に向かう次のセルが空いている」という Holding の定義が当てはまらない。さらに津波遭遇リスクの最小化を目的とする場合には、Holding が意味のある行動である可能性もある。つまり、リスクの高い (あるいは今後高くなる) 空きのあるセルに車両を移動させるよりも、リスクの低い (あるいは今後低くなる) 地点に留ませた方が全体の津波遭遇リスクが小さくできる可能性がある。

(3) 最適避難モデルの定式化

本研究のモデルの目的は、与えられた避難インフラのもとで実現できる最小リスクを知ることであり、実際に存在する道路ネットワークを簡易に表現できた方が良い。上述のようにCell-based M-Nモデル¹⁾は、セルとセルの間をノードで繋ぎ、流入量を別々の変数をおくことで、交差点における複数のセルの接続関係が簡便に表現できるという特徴があり、それを基本に定式化を行った。

提案するモデルは式(1)-(11)のような線形計画問題であり、セルごとに3つの内生変数を持っている。すなわち、時刻 t にセル a から流出・セル a に流入する車両数をそれぞれ v_t^a, u_t^a とし、時刻 t にセル a から流出せずに時刻

$t + 1$ まで留まる車両数の p_t^a とする。

$$\min_{\{v,p,u\}} \sum_{t=1}^T \sum_{a \in A} R_t^a \cdot \eta(p_t^a + v_t^a) \quad (1)$$

$$p_t^a + u_t^a = p_{t+1}^a + v_{t+1}^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in \{A | (A_S \cup A_R)\} \quad (2)$$

$$p_t^a + u_t^a = p_{t+1}^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A_S \quad (3)$$

$$p_t^a = p_{t+1}^a + v_{t+1}^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A_R \quad (4)$$

$$\sum_{a \in O(i)} u_t^a = \sum_{a \in I(i)} v_t^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A, \forall i \in N \quad (5)$$

$$u_t^a \leq \delta^a (H^a - p_t^a - v_t^a) \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A \quad (6)$$

$$v_t^a \leq C^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \forall a \in A \quad (7)$$

$$u_t^a \leq C^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A \quad (8)$$

$$v_0^a + p_0^a = D^a \geq 0 \text{ (given)} \quad \forall a \in A_R \quad (9)$$

$$0 \leq u_t^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A \quad (10)$$

$$0 \leq v_t^a, p_t^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \forall a \in A \quad (11)$$

A は全てのセルの集合, A_R は起点セルの集合, A_S は避難場所セルの集合, N はノードの集合, $I(i)$, $O(i)$ はそれぞれノード i の上流側, 下流側で繋がっているセルの集合, C^a はセル a の流入可能最大車両数である。

式(1)で目的関数としている総リスクは, 各時刻に各場所に存在する人数とその時刻における津波遭遇リスクを掛けた値の全時刻 (T) での総和である。時刻 t にセル a にいる津波遭遇リスクは R_t^a として時刻毎に外生的に与える。 $(p_t^a + v_t^a)$ はセル a に時刻 t に存在する車両数であり, 一台当りの平均乗車人数 η を乗ずると人数となる。

式(2)-(5)は交通量保存則であり, 式(6)はセル a への流入台数に関する制約である。すなわちセル a で収容可能な最大車両数 (収容容量 H^a) の中でまだ使われていない容量に比例して流入できることを表す。 δ^a は渋滞流の密度波速度を自由流の密度波速度で割った定数である。

式(7), (8)は流入・流出量の容量の制約, 式(9)は初期条件を示しており, D^a は起点セルの避難車両数である。式(10), (11)は内生変数の非負制約である。

セル間の移動交通量は前後のセルの交通量で決まるが本モデルでは上流側のセルにあった台数しか流出できないことを式(2)-(4)と非負制約で, 下流側のセルの空き容量までしか流入できないことを式(6)と非負制約で表している。滞在車両の p_t^a が大きくなるとセルの収容容量制限によってセル a に流入できる車両が減少する。これが上流セルの流出車両に影響し, 上流側の滞在車両数を増加させる。このようにして, 渋滞と混雑が上流に伝播する現象を表現している。

先述したように, 本モデルでは外生的に OD を与えていない。通常時の交通は目的地で行う活動に対する派生需要とされるが, 津波避難時には津波の遭遇リスクが低

い場所に移動すること自体が目的であり, どこから来た車両をどこに向かわせるかという OD は, 求められた解に合わせるように事後的に指定すればよい。セルベースモデルでは多対多 OD が与えられた場合は multi-commodity として扱う必要があり, 流入時の混合の順序や比率と流出時のそれらが一致しなければ, 実際にそのような交通流が実現できないという問題が指摘されている。本モデルは OD を外生的に与えないため, Single-commodity として扱うことができ, 上記の問題を回避することができる。

(4) 方向指定施策を考慮するための拡張

本モデルは各車両が最適なルートを取ることを仮定しているため, 実際の状況下での実現性が保証できないという問題がある。このとき, 交差点で道路標識や看板を立てて一方のみを避難車両を誘導できれば, 実現性が高くなると考える。

このような条件下での最適解を得るため, 図1のように交差点からの車両が流入できるセルを1つに限定するバイナリ変数 ε^a をおき, 制約条件式(12)-(14)を最適避難モデル (式(1)-(11)) に加えて, 最適避難方向指定の変数 ε^a についても最適化することにより, 「方向指定あり」のモデルに拡張できる。

$$u_t^a \leq L \varepsilon^a \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\}, \forall a \in A \quad (12)$$

$$\sum_{a \in O(i)} \varepsilon^a \leq 1 \quad \forall a \in A \quad (13)$$

$$\varepsilon^a = \{0,1\} \quad \forall a \in A \quad (14)$$

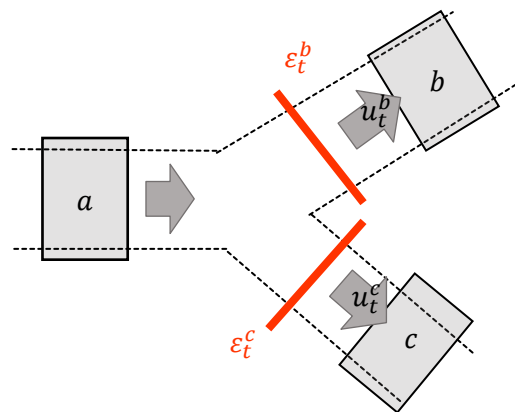


図1 交差点における制約条件

3. 実用レベルのネットワークへの適用

(1) 対象地域のデータ設定

宮城県亶理郡亶理町を対象とし, 同町の津波避難計画⁹⁾を基に必要値を設定した。本研究では単位時刻を2分,

自由流速度を 30km/h とし、避難経路となる道路を最大 1km のセルに区切る。9 個の起点セル、4 個の避難場所セルを含めたセルの総数は 256 個である。収容容量 H^a はセルの長さを平均車頭間隔 (5m と設定) で割り小数点以下を切り捨てた値とした。フローの容量 C^a (単位: 台/分) は一般的なシミュレーションで用いられている道路種別毎の値を参考に、国道を 66, 都道府県道を 60, その他道路を 41 とした。起点セルのフロー容量・収容容量は共に無限大, 避難場所セルのフロー容量は 60, 収容容量は各避難場所の駐車容量を与え, 4 カ所の合計は 2251 台である。避難人口の総和は 3389 人, 全員が避難場所セルに避難するには平均 1.51 人以上の乗車が不可欠となる。

津波遭遇リスク R_t^a は, 時間が経過するほど津波が迫ることを表現する時間リスクと, 海に近いほど潜在的なリスクが大きいことを表現する距離リスクの積として与えた。具体的には津波避難計画⁸⁾を参考として式(15)のようなロジスティック曲線により与えた。また, 避難場所セルの距離リスクをゼロとおき, 時刻にかかわらず安全であると仮定した。

$$\begin{aligned}
 \text{津波遭遇リスク} &= \text{時間リスク}(t) \times \text{距離リスク}(x) \\
 &= \frac{1}{1 + e^{-0.2(t-23)}} \times \frac{1}{1 + e^{-(x-7)}} \quad (15)
 \end{aligned}$$

(2) 従来の計画モデルとの比較

まず, 従来の最適避難交通計画モデルと本研究のモデルとの違いを確認しておく。最終時刻 (T) の設定がもたらす影響を除去するため, すべての避難車両がいずれかの避難場所に収容されるという条件として

$$\sum_{a \in A_S} p_t^a = \sum_{a \in A_R} D_0^a \quad (16)$$

を付加しておく。

本研究の目的関数の津波遭遇リスクについて, 起点セルと道路上セルの値を1, 避難場所セルの値を0と置けば, 津波遭遇リスクの値は全車両の総移動時間となるので, Ben-tal et al.⁹⁾と同様の総所要時間最小化を解くことができる。そこで目的関数として, 本来の津波遭遇リスクと, 総所要時間の2つのケースを考える。

次に, 道路上セルにおける渋滞の発生を認めないという状況を考えるため, 滞在車両の p_t^a について

$$p_t^a = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \forall a \in A|A_S \quad (17)$$

という制約を加えるケースを考える。

以上の目的関数と渋滞の有無の組み合わせによる4つのケースについて, 平均乗車人数1.625に対する津波遭遇リスクと総所要時間の計算値を表1に示す。

これより, 津波遭遇リスクを最小化する本研究のモデルでは, 総所要時間は若干大きいものの5%の増加にとど

表1. 目的関数と待ち行列許容の影響

目的関数	待ち行列	総リスク(比)	総所要時間(比)		
総リスク最小	あり	1434	1	35570	1.05
	なし	1441	1	35169	1.04
総所要時間最小	あり	2553	1.78	33872	1.00
	なし	2604	1.82	33872	1.00

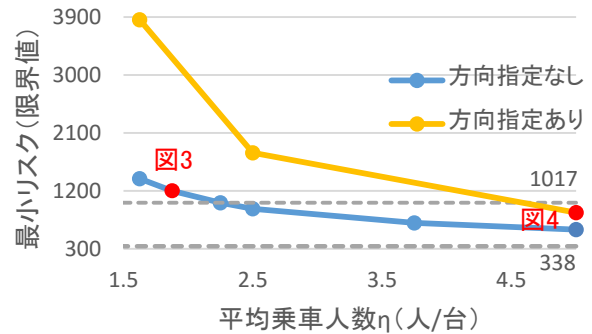


図2 平均乗車人数ごとの最小リスク

まっている。従来の研究で行われてきた総所要時間最小化による解の津波遭遇リスクの値は, 本研究のモデルの1.78~1.82倍という大きい値となっている。またこの地域では, 待ち行列を許容するかどうかの影響はあまり大きくないことがわかる。なお, 総所要時間最小化においては, 待ち行列を認めない場合でも同じ目的関数値が得られるという性質が実際に成立していることを確認できた。

(3) 平均乗車人員の影響

再び式(15)(16)を取り除いて, 平均乗車人員を変化させながら, 最適避難モデル (方向指定なし) と最適方向指定を加えたモデル (方向指定あり) から得た最小リスクを図2に示した。

「方向指定あり」の方が制約条件を加えているため, 最小リスクの値は大きい。いずれのモデルでも, 平均乗車人数が大きいほど車両数が小さく, 最小リスクが小さくなるのがわかる。これは, 平均乗車人数が小さくなる, つまり避難車両が大きくなるにつれて, 混雑や渋滞が発生しやすくなり, より多くの人がリスクの高い地域に留まる必要が生じるからである。

(4) 最適避難方法の具体例

方向指定なし・平均乗車人数が 1.625 の場合の計算結果の一例として, t=14 時点のセルごとの存在車両数を図3に示した。このケースでは, 後続の車両の避難を早めるため, 避難場所セルを通り過ぎてさらに遠方に向かう車両が存在し, この時点でも山側のセルに車両が集中している。t=26 以降では避難車両は動かなくなるが, 全ての車両が避難場所セルに収容されず, 297 台は図3左上

のセルに滞留したままになった。これは、一旦左上のセルに行くのと、再びリスクの大きいセルを通り避難場所セルに向かうよりも、留まり続けた方が総リスクを小さくできるからである。

一方、方向指定・平均乗車人数が5の場合の計算結果として、避難に使われた道路セルを図4に示した。方向指定により一旦避難場所に接続する交差点に到着した車両は必ず避難場所に入場することになるため、図3で見られたような山側の道路への自動車の流入は見られない。また、必ずしも避難場所に最短距離で向かう道路が使われているとは限らず、むしろ通過すべきセル数が少ない最短時間の経路が選ばれている。また避難に使用するセルを限定できるので、橋梁などの地震による被害の可能性が高い場所を使わないという条件下でのルート選定や、限られた財源下での耐震補強場所の選定に有用な情報を提供できる。

(5) 双対変数の有用性

本モデルは線形計画法の問題として定式化されているため、最適解における双対変数の値は、当該の制約の緩和がもたらす目的関数の改善の有無を示している。すなわち、双対変数が値を持つならその制約条件を緩和することで目的関数の値が改善し、双対変数がゼロであればその制約条件を緩和しても目的関数の改善には影響を及ぼさない。そこで、制約条件(4)-(6)の双対変数をみることで、道路ネットワーク上のどのセルの容量が目的関数の改善に影響を持つ可能性があるのか調べることができる。ただし、本モデルでは時刻ごとに容量制約をおいているため、特定の時刻において双対変数が他の双対変数に比べて大きな値を持っていたとしても、避難時間全体でみてそのセルの容量を改善することの効果は、他のセルの改善による効果に比べて大きいとは限らない。そこで、双対変数の値の大きさよりも双対変数がゼロではない回数に着目した方が有用な情報が得られると考えた。

$$(6) u_t^a \leq \delta(H^a - p_t^a - v_t^a)$$

$$(7) v_t^a \leq C^a$$

$$(8) u_t^a \leq C^a$$

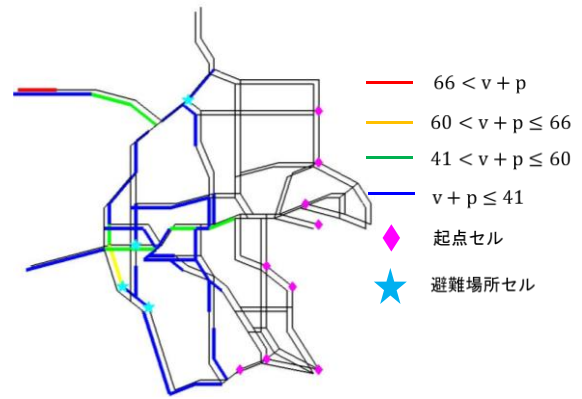


図3 平均乗車人数 1.625 人 (t=14)



図4 方向指定あり・η=5で使用されたセル

図5に、各制約条件の双対変数がゼロではない値を取った回数を示す。1~10回を青色、11~20回を緑色で示した。容量制約が効いているセル道路はネットワークの中央部分に多いことがわかる。双対変数が値を持つ回数は大半のセルで10回以下であり、t=26という避難完了時刻までの全時刻を通じて双対変数に値をもつセルは存在しなかった。逆に、値を持っていない双対変数をみることによって現在のインフラの状態からは改善する必要のないセルを知ることができる。つまり、図5の左下や沿岸部の



図5 双対変数がゼロ以外の値を持った回数

道路は、改善の必要はない。

なお、ある最適解において双対変数の値を持たないものの、あるセルを改善した状況でもう一度最適化問題を解き直すと新たにゼロでない値をもつ可能性がある。そこで本最適避難モデルを用いてセルの容量設定の変更と双対変数の値の有無を繰り返し試みることで、セルの改善という施策を行うことによる、当道路ネットワークの限界値の効率的な改善順序を探索していくことができる。

4. 結論

本研究では、津波に対するリスクを最小化する避難交通配分モデルを計算が容易な線形計画法の問題として定式化し、交差点における進行方向の限定を行う場合の拡張方法を示した。実際に市町村レベルのネットワークに適用できることを示すとともに、インフラ改善に対して双対変数の情報を活用する方法を示した。

本研究のモデルは線形計画法で定式化されており、既存避難インフラの限界値や当該の道路ネットワークの改善方法を最適化する混合整数計画モデルに拡張することも容易である。今後は、これらのモデルを用いた津波避難計画策定方法の確立のために研究を継続することが望まれる。

参考文献

- 1) Nie, Yu Marco. : A cell-based Merchant–Nemhauser model for the system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological* 45.2 (2011): 329-342.
- 2) Daganzo, C. F. : The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological* 28.4 (1994): 269-287.
- 3) Daganzo, C. F. : The cell transmission model, part II: network traffic, *Transportation Research Part B: Methodological* 29.2 (1995): 79-93.
- 4) Xie, Chi, Dung-Ying Lin, and S. Travis Waller. "A dynamic evacuation network optimization problem with lane reversal and crossing elimination strategies." *Transportation research part E: logistics and transportation review* 46.3, pp.295-316, 2011
- 5) Ben-Tal, Aharon, et al. "Robust optimization for emergency logistics planning: Risk mitigation in humanitarian relief supply chains." *Transportation research part B: methodological* 45.8, pp.1177-1189, 2011
- 6) He, Xiaozheng, Hong Zheng, and Srinivas Peeta. "Model and a solution algorithm for the dynamic resource allocation problem for large-scale transportation network evacuation." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* (2015).
- 7) Zheng, Hong, Yi-Chang Chiu, and Pitu B. Mirchandani. "On the system optimum dynamic traffic assignment and earliest arrival flow problems." *Transportation Science* 49.1 (2013): 13-27.
- 8) 宮城県亶理郡亶理町：“亶理町 津波避難計画（平成 26 年 2 月）”，亶理町 HP，2015.7

(2016.4.21 受付)

AUTOMOBILE TSUNAMI EVACUATION MODEL TO MINIMIZE THE RISK OF BEING CAUGHT BY TSUNAMI

Yumiko KATAOKA, Makoto OKUMURA and Jinyoung KIM

Evacuation using a car got allowed if it is needed after the 2011 Great East Japan Earthquake. Each local government have to renew its evacuation plan with consideration of car usage.

This study proposes an automobile tsunami evacuation model to minimize the risk of being caught by tsunami. This linear programming model explicitly describes locations of automobiles at each time in the framework of cell-based traffic model. It will estimate the minimum risk value realized by the present infrastructure such as roads and shelters, and show possible improvements efficient to decrease the risk, based on the dual variables.