常時観測データを用いた道路ネットワークの移動時間分布の推定に関する研究

内田 賢悦[1]・峪龍一[2]・山田雄太[3]・加藤 哲平[4]

[1]正会員　北海道大大学院　工学研究院 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail: uchida@eng.hokudai.ac.jp
[2]学生会員　北海道大学大学院　工学院 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail: ryuichitani@eis.hokudai.ac.jp
[2]学生会員　北海道大学大学院　工学院 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail: s02120233v@eis.hokudai.ac.jp
[3]学生会員　北海道大学大学院　工学院 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail: ieppet@eis.hokudai.ac.jp

本研究では，トラフィックカウンタデータを活用した道路ネットワーク上の経路移動時間分布を推計する簡便な方法を提案する．道路ネットワーク上のリンク交通量は，時間帯別に日々計測可能であると仮定する．ある時間帯に着目した場合，道路ネットワーク上のリンク交通量の平均と分散・共分散は，観測データを所与として定式化される尤度関数を最大化することによって推計できると考えられる．こうして得られるリンク交通量の観測値を用いて，経路移動時間の確率分布を推計する．また、ETC2.0を搭載した車両の存在を仮定すると，経路の移動時間の実測値もいくつか得られると考えられる．そこで，上記で推定される移動時間分布を事前分布，ETC2.0搭載車両から得られる経路移動時間実測値を尤度とし，ベイズ統計を適用することにより，経路移動時間の事後分布を推定する．

Key Words : *liklihood, Bayesian statistics, ETC2.0*

1.　はじめに

道路ネットワーク上のいくつかのリンクには，トラフィックカウンタが設置されており，そうしたリンク上の交通量は日々観測されている．トラフィックカウンタはすべてのリンクには設置されてはいないが，日々観測可能であるため，データ数は多い．一方，近年ETC2.0が導入され，これまでの得ることのが困難であったドライバーが選択した経路やその移動時間も観測できるようになってきた．しかし，得られるデータ数は，いまだその普及率は低いため，少ない．これらのデータは互いに補完する関係にあると考えられ，両方のデータの特徴を踏まえ，それらの利点を最大限に活用することにより，より高い精度で交通状況を推定することが可能になることが期待される．

そこで本研究では，トラフィックカウンタデータとETC2.0から得られる経路移動時間データを活用し，ネットワーク上の経路移動時間の確率分布を推計するフレームワークの提案を行う．具体的には，はじめにネットワーク上の確率的O-D交通量の期待値とその変動係数を未知変数と捉え，観測される交通量に関する尤度関数を交通ネットワークモデルによって記述する．次に，この尤度関数が最大化されるように未知変数を決定する問題を考える．この問題を解くことにより，ネットワーク上の経路移動時間の確率分布が推計される．この確率分布とETC2.0から得られる経路移動時間をそれぞれ事前分布，尤度と捉えることによって，ベイズ統計から経路移動時間の事後分布を推計することを考える．

2.　交通フローのモデル化

(1)　記号

本稿で用いる主な記号は以下に示す通りである．ここで，確率的変数は大文字で表すものとし，その平均については小文字で表すことにする．

A　　ネットワーク上のリンク集合

$\mathrm{A_o}$	ネットワーク上で交通量が観測されているリンクの集合
I	O-D ペアの集合
J_i	O-D ペア i 間の経路集合
δ_{aj}	リンク a が経路 j の一部であれば 1，それ以外は 0 をとる変数
Q_i	O-D ペア i 間の確率的交通需要
F_{ij}	O-D ペア i 間の経路 j の確率的交通量
V_a	リンク a の確率的交通量
V_{ab}	リンク a , b 両方を通過する確率的交通量
p_{ij}	経路選択確率
cv_i	O-D 交通量の変動係数
c_a	交通容量
$\theta(a)$	リンク a に隣接するリンクの集合
$c_{ij}(\mathbf{f})$	O-D ペア i 間の経路 j の一般化費用

(2) 仮定

本研究では以下に示す仮定を設けた．

- ネットワーク上の $|\mathrm{A}|$ 本のリンクの内，$|\mathrm{A_o}|$ 本のリンクにおいて時間交通量が複数回観測されている．
- ネットワーク上の O-D 交通量は，正規分布に従い，その変動係数は O-D ペアによらず一定である．
- ネットワーク上の経路交通量は，O-D 交通量に経路選択確率を乗じたものであり，経路選択確率は（確率的）利用者均衡配分モデルによって表現される．
- ネットワーク上のリンク交通量は，そのリンクを通過する経路交通量の和として表現される．

以上の仮定から，交通量が観測されるリンク交通量は，次元が $|\mathrm{A_o}|$ の多変量正規分布に従うことになる．

(3) 確率的交通フロー

O-D 交通量 Q_i は，平均が $E[Q_i]=q_i$，分散が $\mathrm{var}[Q_i]=(cv\cdot q_i)^2$ の確率分布に従うものとする．ここで cv は変動係数である．経路 $j\in\mathrm{J}_i$ 上の確率的交通量 F_{ij} は，式(1)で与えられる．

$$F_{ij}=p_{ij}\cdot Q_i \quad \forall i\in\mathrm{I},\forall j\in\mathrm{J_i}$$

F_{ij} は平均，分散・共分散がそれぞれが $f_{ij}=p_{ij}\cdot q_i$，$\mathrm{cov}[F_{ij},F_{ik}]=p_{ij}\cdot p_{ik}\cdot\mathrm{var}[Q_i]$ の確率分布に従う．ここで $p_{ij}(j\in\mathrm{J}_i)$ は，（確率的）利用者均衡配分モデルから推計される経路選択確率である．平均経路交通量は，以下の保存則を満たす．

$$\sum_{j\in\mathrm{J}_i} f_{ij}=q_i \quad \forall i\in\mathrm{I} \tag{1}$$

確率的経路交通量の分散は，次式で与えられる．

$$\mathrm{var}[F_{ij}]=\mathrm{var}[p_{ij}\cdot Q_i]=(p_{ij})^2\cdot\mathrm{var}[Q_i]=(cv_i\cdot f_{ij})^2 \quad \forall i\in\mathrm{I},\forall j\in\mathrm{J_i}$$

以下に示すように，経路交通量と O-D 交通量の間には，分散に関する保存則が成立する．

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[Q_i]&=\sum_j\mathrm{var}[F_{ij}]+\sum_{j_1}\sum_{j_2}\mathrm{cov}[F_{ij_1},F_{ij_2}]\\&=(p_{ij})^2\cdot\mathrm{var}[Q_i]+\sum_{j_1}\sum_{j_2\neq j_1}p_{ij_1}\cdot p_{ij_2}\cdot\mathrm{var}[Q_i]\\&=(cv\cdot q_i)^2\cdot\left(\sum_j p_{ij}\right)^2=(cv\cdot q_i)^2\ \forall i\in\mathrm{I}\end{aligned}$$

リンク a 上の交通量 V_a は，次式で与えられる．

$$V_a=\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}_i}\delta_{aj}\cdot F_{ij} \quad \forall a\in\mathrm{A}$$

リンク交通量の平均と分散・共分散の関係は次式で与えられる．

$$v_a=\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}_i}\delta_{aj}\cdot f_{ij}=\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}_i}\delta_{aj}\cdot p_{ij}\cdot q_i \quad \forall a\in\mathrm{A} \tag{2}$$

$$\mathrm{cov}[V_a,V_b]=\mathrm{var}\left[\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}_i}\delta_{aj}\cdot\delta_{bj}\cdot F_{ij}\right] \quad \forall a,b\in\mathrm{A} \tag{3}$$

ここで $\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}_i}\delta_{aj}\cdot\delta_{bj}\cdot F_{ij}$ は 2 本のリンク a，b 両方を通る交通量を表す．以下にリンク交通量の共分散の計算例を示す．

$$V_1=F_1+F_2+F_4 \quad V_2=F_2+F_3+F_4$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[V_1,V_2]&=\mathrm{var}[F_2+F_4]\\&=\mathrm{var}[F_2]+\mathrm{var}[F_4]+2\cdot\mathrm{cov}[F_2,F_4]\end{aligned}$$

(4) 確率的移動時間

本研究では，以下に示す BPR 関数によってリンク移動時間を表す．

$$t_a(v_a)=t_a^0\cdot\left(1+\gamma\cdot\left(\frac{v_a}{c_a}\right)^{\lambda}\right) \quad \forall a\in\mathrm{A}$$

ここで t_a^0 は，自由走行時間，γ と λ はパラメータである．BPR 関数から，リンク移動時間の平均，分散，共分散（$E[t_a(V_a)]$, $\mathrm{var}[t_a(V_a)]$，$\mathrm{cov}[t_a(V_a),t_b(V_b)]$）を計算することができる．計算法の詳細は，内田・加藤[1)]を参照されたい．

以下では，式をわかりやすくするため，$E[t_a(V_a)]$，$\mathrm{var}[t_a(V_a)]$，$\mathrm{cov}[t_a(V_a),t_b(V_b)]$ をそれぞれ $\hat{t}_a(v_a)$，$\sigma_a^2(v_a)$，$\sigma_{ab}(v_{ab};v_a,v_b)$ と表記することにする．

経路 j の移動時間 Ξ_{ij} は以下で与えられる．

$$\Xi_{ij} = \sum_{a \in \mathrm{A}} t_a(V_a) \cdot \delta_{aj} \ \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i$$

その平均と分散は，以下で与えられる．

$$\xi_{ij} = \sum_{a \in \mathrm{A}} \hat{t}_a(v_a) \cdot \delta_{aj} \ \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\left[\Xi_{ij}\right] &= \sum_{a \in \mathrm{A}} \sigma_a^2(v_a) \cdot \delta_{aj} \\ &+ 2 \cdot \sum_{a \in \mathrm{A}} \sum_{b(\neq a) \in \mathrm{A}} \delta_{aj} \cdot \delta_{bj} \cdot \sigma_{ab}(v_{ab}, v_a, v_b) \, \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i \end{aligned} \tag{5}$$

また，経路移動時間の共分散は式(6)で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}\left[\Xi_{ij}, \Xi_{ik}\right] &= \mathrm{cov}\left[\sum_{a \in \mathrm{A}} \delta_{aj} \cdot t_a(V_a), \sum_{b \in \mathrm{A}} \delta_{bj} \cdot t_b(V_b)\right] \\ &= \sum_{a \in \mathrm{A}} \sum_{b \in \mathrm{A}} \delta_{aj} \cdot \delta_{bk} \cdot \sigma_{ab}(v_{ab}, v_a, v_b) \\ &\forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i, \forall k \in \mathrm{J}_i \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，平均経路交通量は，経路移動時間の平均と分散から構成される一般化費用 $c_{ij}(\mathbf{f})$ を評価指標として，（確率的）利用者均衡配分原則から推計される経路選択確率を用いて，以下で示される均衡条件を満たすものとする．

$$f_{ij} = p_{ij}(\mathbf{c}(\mathbf{f})) \cdot q_i \quad \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J_i}$$

where

$$\mathbf{c} = \left(c_{11}(\mathbf{f}), \ldots, c_{i|I||J_{|I|}|}(\mathbf{f})\right)$$

$$\mathbf{f} = \left(f_{11}, \ldots, f_{|I||J_{|I|}|}\right)$$

3. 経路移動時間の推定

(1) トラフィックカウンタデータの活用

今，トラフィックカウンタが設置されているリンクにおいて，k 個（k 日分）の時間交通量観測データがあるとし，それらは以下に示すベクトルで表すことにする．

$$\hat{\mathbf{v}}^l = \left(v_1^l, \ldots, v_{|A_o|}^l\right) \ l = 1, \ldots, k$$

平均 O-D ベクトル $\mathbf{q}$ を以下で定義する．

$$\mathbf{q} = \left(q_1, \ldots, q_{|I|}\right)$$

また，トラフィックカウンタが設置されているリンクの交通量ベクトルを以下で定義する．

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, cv) = \left(V_1, \ldots, V_{|A_o|}\right)$$

$\mathbf{V}(\mathbf{q}, cv)$ は多変量正規分布に従うため，以下のように表現できる．

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, cv) \sim MNN(\mathbf{v}(\mathbf{q}, cv), \mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv))$$

where

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, cv) = \left(v_1, \ldots, v_{|A_o|}\right)$$

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv) = \begin{pmatrix} \mathrm{var}[V_1] & \cdots & \mathrm{cov}\left[V_1, V_{|A_o|}\right] \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathrm{var}\left[V_{|A_o|}\right] \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}(\mathbf{q}, cv)$，$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ は，それらのエレメントがそれぞれ式(2)，式(3)で表されるリンク交通量に関する平均ベクトル，分散・共分散行列である．以上の定式化を用いると，$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ が正則でない場合も計算可能な以下に示す尤度関数を $(\mathbf{q}, cv)$ に関して最大化することによって，リンク交通量を推計することにする（Srivastava and Rosen[2]）．

$$\begin{aligned} \ln \tilde{L} &= -\frac{k \cdot \rho}{2} \cdot \log(2\pi) - \frac{k}{2} \cdot \log\left(\prod_{i=1}^{\rho} \lambda_i\right) \\ &- \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{k} \left(\hat{\mathbf{v}}^l - \mathbf{v}\right) \mathbf{\Sigma}^- \left(\hat{\mathbf{v}}^l - \mathbf{v}\right)^T \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $\lambda_i (i = 1, \ldots, \rho)$ は非負な $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ の固有値であり，$\hat{\mathbf{\Sigma}}^-$ は $\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^-\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}$ を満たす適当な $\mathbf{\Sigma}$ の一般化逆行列である．Moore-Penrose inverse 適用する場合，一般化逆行列は以下で与えられる．

$$\mathbf{\Sigma}^- = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Gamma}$$

ここで $\mathbf{\Gamma}$ は，$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ の固有値ベクトルから構成されるサイズ が $|A_o| \times \rho$ の行列である． $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho)$ はサイズが $\rho \times \rho$ 対角行列である．もし，$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ が正則な場合，Moore-Penrose inverse は $\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{q}, cv)$ と等しくなり，上記の交通量推計問題は，一般的な最尤推定法と一致する．通常の最尤推定法と異なる点は，均衡制約付き尤度最大化問題となっていることである．式(7)に関する詳細は，Uchida[3]を参照されたい．

トラフィックカウンタが設置されているリンクにおいて，交通フローモデルから推計されるリンク交通量の分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{q}, cv)$ は正定値（あるいは正則）とならない場合がある（Uchida[3], Shao etoal. [4]）．そのような場合，Shao et al. [4]では，平均交通量および分散・共分散に関する観測誤差を目的関数に設定し，分散共分散行列が非正則な場合にペナルティ値を目的関数に課して対応している．このように，Shao et al. [4]では，基本的に観測誤差を最小とする目的関数を設定しているため，交通量間の相関の影響が問題に反映されていないことになる．こ

れに対して，本研究では分散・共分散行列の一般化逆行列を用いることにより，交通量間の相関を考慮した上で，分散・共分散行列が非正則となる問題に対応している．

一方，ネットワーク上でトラフィックカウンタが設置されているリンク数が極端に少ない場合，信頼性のあるリンク交通量が推計できないと考えられる．そうした場合には，たとえば，日 O-D 交通量を所与として，その時間変動係数（解析対象とする時間帯の時間変動係数）と O-D 交通量の変動係数を未知変数とする問題設定を行うことが考えられる．その場合，リンク交通量推計問題における未知変数は 2 つとなる．

(2) ETC2.0 データの活用

3 (1)に示した均衡制約付き尤度最大化問題を解くことによって，道路ネットワーク上の経路の移動時間の平均，分散共分散行列は式(4)，式(5)から推計できる．そこで，経路移動時間がそれらをパラメータとする多変量正規分布に従うと仮定する．

一方 ETC2.0 により，ネットワーク内のいくつかの O-D 間の経路移動時間が正確に把握できるようになった．こうしたデータは，サンプル数は現在のところ多くはないが，正確であると考えられる．そこで，トラフィックカウンタデータを用いて推計される経路移動時間の確率分布を事前分布と捉え，ETC2.0 から得られる実測データを尤度として捉えると，ベイズ統計を適用することにより確度が高まった経路移動時間の事後分布が推計できると考えられる．すなわち，少ないデータから効率的に移動時間分布推計の精度向上が図られるものと考えられる．以下では，具体的な計算を考えてみる．

ETC2.0 によって，ネットワーク上の g 本の経路において，それぞれ n 個の経路移動時間が観測されたとする．観測された経路移動時間ベクトルは以下で表現する．

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_l = \left(\xi_1^l, \ldots, \xi_g^l\right) \quad l = 1, \ldots, n$$

トラフィックカウンタデータを用いて推計された経路の移動時間の事前分布は，以下で表される．

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_0 \sim MVN\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0\right)$$

where

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_0 = \left(\Xi_1, \ldots, \Xi_g\right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 = \left(\xi_1, \ldots, \xi_g\right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{var}\left[\Xi_1\right] & \cdots & \mathrm{cov}\left[\Xi_1, \Xi_g\right] \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathrm{var}\left[\Xi_g\right] \end{pmatrix}$$

ここで $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0$ は，それぞれ式(4)および式(5)，式(6)から計算される経路移動時間の平均ベクトルと分散・共分散行列である．

このとき，真の経路移動時間分布の分散・共分散行列が既知であり，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ で与えられるとすると，経路移動時間の事後分布も多変量正規分布に従い，その平均ベクトル，精度行列（分散共分散行列の逆行列）はそれぞれ以下で与えらる [5]．

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_n = \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1} + n \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0^{\,T} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \ldots + \hat{\boldsymbol{\xi}}_n\right)^T\right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1} + n \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$$

上記の関係式は，移動時間が観測されたそれぞれの経路に関しては，観測データ数が 0 のときの経路移動時間は，事前分布に一致し，観測データ数が多くなるにつれ，最尤推定値に収束していくことを示している．一方，移動時間が観測されないそれぞれの経路に関しては，移動時間分布に変化は生じない．

4. まとめ

本研究では，トラフィックカウンタデータと ETC2.0 による経路移動時間データを活用を念頭に置き，ネットワーク上の経路移動時間を推計するフレームワークを提案した．今後はテスト・実測データを用いたモデルの検証を行う必要がある．

IT 技術の進展により，これまで観測できなかった交通データが観測可能となりつつあり，いわゆるビッグデータの有効活用が望まれている．データがいくら豊富に入手できたとしてもそれを適切に解析するツールがなければ，そこから有用な情報を得ることは困難であると考えられる．本研究で示したフレームワークがそうしたツール開発の一助となれば幸いである．

参考文献

1) 内田賢悦，加藤哲平：実務での活用を念頭に置いた移動時間信頼性解析法に関する研究，土木計画学・研究, No.52, CD-ROM.
2) Srivastava, M., and Rosen, D. (2002), Regression models with unknown singular covariance matrix. Linear Algebra and Its Applications, 354, pp. 255-273.
3) Uchida, K. (2015), Travel time reliability estimation model using observed link flows in a road network, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 30 (6), pp.449–463.
4) Shao, H., Lam, W.H.K., Sumalee, A., Chen, A., Hazelton, M.L. (2015), Estimation of mean and covariance of peak hour

origin–destination demands from day-to-day traffic counts, Transportation Research Part B, Volume 68, Pages 52–75.
5) パターン認識と機械学習：ベイズ理論による統計的予測，C. M. ビショップ著，東京：丸善出版.

(?)