

入力データの確率変動を考慮した交通状態推定 -Variational Theory に基づいた解析と検証-

高安 杏奈¹・原 祐輔²・和田 健太郎³・桑原 雅夫⁴

¹非会員 東北大学大学院情報科学研究科 博士課程前期 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: takayasu@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院助教 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: hara@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 135-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

⁴正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: kuwahara@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は、Kinematic Wave に従う交通状態が、入力データの変動によってどのような影響を受けるのかを Variational Theory に従って確率的に考察したものである。入力データの変動としては、運転挙動のばらつきによる変動と対象区間の端末交通量の変動の 2 種類を考慮し、それらが任意の地点と時刻における交通状態に与える影響を分析した。とくに、端末交通量の変動は、その影響が累積して交通状態を変化させるので、それを考慮した近似計算を行って交通状態の変動を求めた。近似計算結果を交通流シミュレーションによる交通状態の変動と比較した結果、良い精度で交通状態の変動を表せることを確認した。

Key Words : stochastic traffic flow, variational theory, kinematic wave theory

1. はじめに

近年、交通制御システムの向上を目的として、車両感知器やプローブカーによるデータ取得技術が発展し、それらのデータを用いた交通状態推定法が緻密化してきている。特に Daganzo¹⁾²⁾によって提案された Variational Theory(VT) では交通流解析に用いられる Kinematic Wave 理論を Fundamental Diagram(FD) を敷き詰めた Time-Space 図上の最短経路探索問題へと帰着させることによって任意のノードの累積交通量を計算した。また、Mehran³⁾は VT を用いて感知器データやプローブデータ、信号現示データを入力データとして対象区間の途中からの交通流出入を考慮した車両軌跡推定手法を提案した。しかし、これらの既往研究ではドライバーの運転挙動のばらつきや対象区間の端末交通量といった入力条件の確率変動を考慮していない。実際の交通流は非線形な現象であるため入力データの小さな確率変動が結果に大きな影響を与える可能性があり、より現実に適した交通制御への応用を考えると、確率的要素を考慮してボトルネック位置などの詳細かつ解析的な交通状態把握手法が必要である。そこで、本研究では信号交差点を含む道路区間において、入力データの確率変動が交通状態に与える影響を解析的に明らかにする。

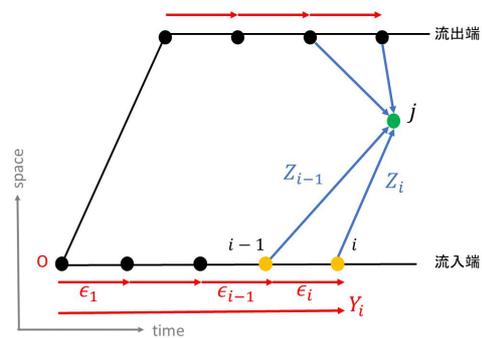


図-1 本研究のネットワーク

2. 誤差の確率変動による交通状態変動

(1) 累積交通量の導出

VT によるとネットワーク内部の任意の終点の累積交通量は原点から終点まで行くときの全ての Boundary ノード経由の経路のうちの最短経路費用として求められる。よって本研究では図 1 の原点 o から終点ノード j までの全経路のうちの確率変動する最短経路費用の期待値を計算する。

(2) 入力データの変動の考慮

VT の入力データの変動として、需要変動や車両感知器の検知誤差による対象区間の端末交通量の変動と運転挙動のばらつきや FD の線形近似に起因する誤差によ

る対象区間内部の累積交通量の変動が考えられる。これらの変動を考慮する上で、それぞれの変動の特徴に応じて、図 1 において赤線で示したネットワークにおける Boundary ノードの変動と青線で示した内部ノードの変動にわけて考える。

a) Boundary の変動

需要変動や検知誤差による対象区間の端末交通量の変動はネットワーク上の Boundary における変動として考えられ、時間軸を等間隔の微小区間に離散化して Time-Space 図上の時刻 $t = 0$ 、位置 $x = 0$ の Boundary 上の原点 o から Boundary ノード i までの最短経路コスト Y_i の変動として扱える。また、需要変動や検知誤差は過去の変動が累積して次の変動に影響を与えることを考慮するために、時間あたりの単位交通量として原点 o から各 Boundary ノードをコスト ϵ_i の単位ダミーリンクで結ぶと Y_i は ϵ_i の和として表わすことが出来る。

単位交通量 ϵ_i を independent identical distribution(iid) で期待値 μ_{ϵ_i} 、分散 $\sigma_{\epsilon_i}^2$ の正規分布に従うと仮定する。

$$\epsilon_i \sim iid \quad N(\mu_{\epsilon_i}, \sigma_{\epsilon_i}^2) \quad (1)$$

正規分布の加法性により対象区間の Boundary ノードにおける累積交通量 Y_i は次のような確率分布で表わせる。

$$Y_i = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_i \sim iid \quad N(\mu_{Y_i}, \sigma_{Y_i}^2) \quad (2)$$

ただし、

$$\mu_{Y_i} = \sum \mu_{\epsilon_i} \quad (3)$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sum \sigma_{\epsilon_i}^2 \quad (4)$$

とする。

b) ネットワーク内部の変動

運転挙動のばらつきなどの対象区間内部の累積交通量の変動はネットワーク内部の変動として考えられ、Boundary ノード i からネットワーク内部の終点ノード j までの最短経路コスト Z_i の変動として扱える。

また、Forward wave と Backward wave が線形で表わされる FD を仮定すると、式 (5) が言える。

このとき、 t と x はそれぞれのノードの時間と位置を表わし、 $t_j - t_i$ は観測者が FD に従って移動する場合の時間差を表わす。この際、信号赤時間によって強制的に停止している間の時間差は 0 として考える。

$$Z_i = q_{max}^i(t_j - t_i) - k_c^i(x_j - x_i) \sim iid \quad N(\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}^2) \quad (5)$$

ただし

$$q_{max}^i = \text{Boundary ノード } i \text{ 経由の経路における最大交通流率} \\ \sim N(\mu_q, \sigma_q^2) \quad (6)$$

$$k_c^i = \text{Boundary ノード } i \text{ 経由の経路におけるクリティカル交通密度} \\ \sim N(\mu_k, \sigma_k^2) \quad (7)$$

$$Z_i = \text{Boundary ノード } i \text{ から終点ノードまでの経路コスト} \\ \sim N(\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}^2) \quad (8)$$

$$\mu_{Z_i} = (t_j - t_i)\mu_q - (x_j - x_i)\mu_k \quad (9)$$

$$\sigma_{Z_i}^2 = (t_j - t_i)^2\sigma_q^2 - (x_j - x_i)^2\sigma_k^2 \quad (10)$$

とする。この式における仮定は、Boundary ノード i 経由の最大交通流率 q_{max}^i 、クリティカル交通密度 k_c^i は確率分布するが、それぞれ他の Boundary ノード経由の q_{max}^j 、 k_c^j とは独立に分布し、それらはみな同じ正規分布 $N(\mu_q, \sigma_q^2)$ 、 $N(\mu_k, \sigma_k^2)$ をとるというものである。

c) 求める累積交通量

本研究では Y_i と Z_i が確率変動するときに、終点ノード j の累積交通量 U_i の期待値と標準偏差を求めることで、入力データの変動による交通状態の変動を解析する。

ここで、Boundary ノード i を通って原点 o から終点 j まで行く経路の累積交通量 U_i は次式のように表わせる。この際、Boundary ノード i 経由の経路コストという意味で煩雑さを避けるために終点ノード j を省略する。

$$U_i = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_i + Z_i = Y_i + Z_i \quad (11)$$

よって、全ての経路コストの最小値分布は次のように書ける。

$$\Pr(\min PathCost > n) \\ = \Pr(U_0 > n, U_1 > n, \dots, U_i > n) \\ = \Pr(Y_0 + Z_0 > n, Y_1 + Z_1 > n, \dots, Y_i + Z_i > n) \quad (12)$$

しかし、 Y_0, Y_1, \dots, Y_i には互いの確率変動に相関があるため、式 (12) の確率を厳密に解析的に求めることが困難である。そこで、本研究では次節で紹介する Clark 近似法を用いて終点ノード j における経路コストの期待値と分散の近似解を導出する。

(3) 解析手法

Boundary とネットワーク内部の両方の変動を考える場合は、Clark 近似法を用いることで累積交通量の期待値と標準偏差を求めることができる。

また、ネットワーク内部の変動を考慮しない場合は Consistency Condition が満たされるので最短経路が通過する可能性のある Boundary ノードの候補点を絞って計算することが出来る。

a) Clark 近似法

Clark 近似法は Clark⁴⁾によって提案された近似計算法であり、二つの多変量正規分布に従う確率変数の最大値を新たな多変量正規分布に従う確率変数として近似するという手法である。この近似法は Horowitz ら⁶⁾によって Probit モデルの近似計算に応用されていたが、最近白井ら⁷⁾が VT の確率変動解析にも応用している。

(U_i が多変量正規分布であることは付録に示した。)

Clark は多変量正規分布に従う U_1, U_2 を考えるとき、確率変数 $\max(U_2, U_1)$ の 1 次, 2 次モーメント $v_{V_{12}}, v_{\sigma_{12}}$ が式 (13) と式 (14) のように求まることを示した。

$$v_{V_{12}} = V_1\Phi(\gamma) + V_2\Phi(-\gamma) + a\phi(\gamma) \quad (13)$$

$$v_{\sigma_{12}} = (V_1^2 + \sigma_1^2)\Phi(\gamma) + (V_2^2 + \sigma_2^2)\Phi(-\gamma) + (V_1 + V_2)a\phi(\gamma) \quad (14)$$

ただし、

$$\phi(\gamma) = (2\pi)^{-(1/2)}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \quad (15)$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} \phi(t)dt \quad (16)$$

$$a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{V_1 - V_2}{a} \quad (18)$$

とする。なお、相関係数 $\rho_{i,i-k}$ の求め方は付録に記した。

以上を用いることで $\max(U_2, U_1)$ は次の正規分布で近似することができる。

$$\max(U_2, U_1) \sim N(v_{V_{12}}, v_{\sigma_{12}} - v_{V_{12}}^2) \quad (19)$$

また、Clark (1961) より相関係数 $\rho[U_3, \max(U_2, U_1)]$ が以下のように求まる。

$$\rho[U_3, \max(U_2, U_1)] = \frac{\sigma_1\rho_{13}\Phi(\gamma) + \sigma_2\rho_{23}\Phi(-\gamma)}{(v_{\sigma_{12}} - v_{V_{12}}^2)^{1/2}} \quad (20)$$

これを用いて、式 (15)~式 (18) を繰り返すことで、 $\max(U_3, \max(U_2, U_1))$ の 1 次モーメント $v_{V_{123}}$ と 2 次モーメント $v_{\sigma_{123}}$ が式 (13) 式 (14) と同様に求まる。よって、 $\rho[U_2, U_1]$ が分かれば、 $\max(U_2, U_1)$ の期待値と分散が計算でき、 $\rho[U_3, \max(U_2, U_1)]$ が分かれば $\max(U_3, U_2, U_1) = \max[U_3, \max(U_2, U_1)]$ が計算できるので、 $\rho[U_i, \max(U_2, U_1)]$ を全ての i について求めておく。

また、既に求まっている $\rho[U_i, U_3]$,

$$\rho[U_i, \max(U_2, U_1)] \text{ より } \rho[U_i, \max(U_3, U_2, U_1)] = \rho[U_i, \max[U_3, \max(U_2, U_1)]] \text{ を全ての } i \text{ について求めておく。}$$

$\rho[U_3, U_2, U_1]$ が分かれば $\max(U_3, U_2, U_1)$ の期待値と分散が計算でき、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \max(U_3, U_2, U_1) &= \max(U_3, \max(U_2, U_1)) \\ &\sim N(v_{V_{123}}, v_{\sigma_{123}} - v_{V_{123}}^2) \end{aligned} \quad (21)$$

これを U_i まで繰り返すことで、 $\max(U_1, U_2, \dots, U_i)$ の期待値を求めることができる。よって求める累積交通量 n の期待値は次式のように書ける。

$$E[n] = E[\min(U_1, U_2, \dots, U_i)] \quad (22)$$

b) 候補点の決め方

ネットワーク内部の変動を考慮せず、Boundary の変動として需要変動を考慮する際の Boundary ノードの候補点は以下のようにして表わせる。まず、対象区間の交通量の Consistency Condition は式 (23) のように表わすことができ、時刻 $t_i - t_{i-1}$ の間には、FD で定義される最大交通流率 q_{max} よりも大きい通過交通量はないことを意味する。このとき、 q_{max} は全てのノードにおいて同じなのでサフィックス i は省略している。

$$Y_i - Y_{i-1} \leq q_{max}(t_i - t_{i-1}), \quad \forall i \quad (23)$$

一方、ノード i 経由のコストがノード $i-1$ 経由のコストよりも小さくなる条件は、流入と流出の Boundary ノードに空間位置の変化がないので式 (5) を用いると次のようになる。

$$Y_i - Y_{i-1} \leq Z_{i-1} - Z_i = q_{max}(t_i - t_{i-1}) \quad (24)$$

したがって、信号が無い場合には Consistency Condition は自動的に満足され、候補点は終点ノードに到達できる最も時刻の遅い Boundary ノードの二つに絞られる。

しかし、信号がある場合、 $t_j - t_i$ から信号で停止する時間を差し引く必要があるため、 Z_i は図 2 のように単調減少にならないので、候補点がいくつか見つかる。図 2 において、 Z_i の値が変化しないところは、Boundary ノード i から終点ノードまでの経路が信号赤時間で待つ時間を含んでいることを示しており、信号赤時間で待っている時間は経路コストが変化しないために Z_i が変化しない。一方、 Y_i は単調増加するので、 Z_i が変化しないところは、最短経路にはなりえないことがわかる。このことと、式 (24) の条件を考慮すれば、図 2 において、 U_i の経路コストの各局小値が候補点となる。

しかし、検知誤差を考慮する場合は Consistency Condition は保証されないのので、上記の様な候補点に絞った解析ではなく、全ての Boundary ノード経由の経路コストの最小値の計算が必要となる。

(4) 交通流率の変動の分析手法

交通流率の変動は提案手法によって求められた累積交通量の期待値と分散から以下のようにして導出する

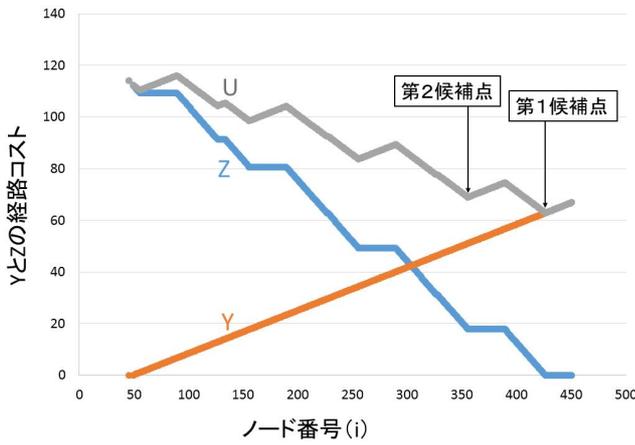


図-2 Y と Z の経路コストの変動

ことができる。

ノード j での累積交通量を N_j , 同じ位置における時間 Δt 後のノード $j+1$ での累積交通量を N_{j+1} とするとそれぞれ以下のような正規分布に従うとする。(前節の Clark 近似によれば累積交通量は正規分布近似できると言える.)

$$N_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), N_{j+1} \sim N(\mu_{j+1}, \sigma_{j+1}^2) \quad (25)$$

Boundary の変動を考慮した交通流率は累積交通量を時間微分したもので以下のように表わせる。

$$q_j = \frac{N_{j+1} - N_j}{\Delta t} \quad (26)$$

このとき q_j の期待値 $E(q_j)$ と分散 $Var(q_j)$ は次のように求まる。

$$E(q_j) = \frac{E(N_{j+1}) - E(N_j)}{\Delta t} = \frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{\Delta t} \quad (27)$$

$$Var(q_j) = \frac{Var(N_{j+1} - N_j)}{\Delta t^2} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} (\sigma_{j+1}^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_j\sigma_{j+1}\rho_{jj+1}) \quad (29)$$

ここで, ρ_{jj+1} の求め方は付録の通りである。

以上のようにして交通流率の変動が解析的に表わせる。

3. 入力データの変動が交通状態へ与える影響の考察

本研究の提案手法の精度検証を行うために, 交通流シミュレーションと比較する。

また交通流シミュレーションの Boundary の変動は上記のように Poisson 分布としているので, 近似計算は平均値と分散が等しい正規分布を仮定して近似計算を行った。

表-1 交通流シミュレーションの設定条件

対象区間距離	1115m
対象時間	15minutes
メッシュ分割	$dx = 10m, dt = 10seconds$
流出入車数	600veh/hour
FD の設定	$v = 9.0 \times 3.6km/hour$ $w = -4.6 \times 3.6km/hour$ $q_{max} = 1750.0veh/hour$
FD の形状の標準偏差	$0.3 \times \mu_{Z_i}$
Boundary の変動	Poisson 分布
シミュレーション回数	100

(1) 交通流シミュレーションの設定

a) 本研究で用いるシミュレーション

FD から車間距離 (S) - 速度 (V) 関係を作り, 各車両の速度をその時点の車間距離から求め, スキャンインターバル (dt) ごとに求められた速度に従って車両を前進させるという, Kinematic Wave 理論に従った追従モデルを使用してシミュレーションを行う。

b) 端末交通量と FD の形状の変動の設定

今回交通流シミュレーションで設定した条件は表 1 の通りである。この際, FD の形状を決める最大交通量 q_{max} とクリティカル密度 k_c の標準偏差は一般道における現実の S-V 関係から起こりうる変動を十分に考慮出来る値をとった。

(2) 解析解とシミュレーションの比較分析

a) 端末交通量と FD の形状の変動による影響分析

交通流シミュレーションによる解析によって FD の形状のみ, 端末交通量のみ変動する場合の影響の比較をした結果, それぞれ各地点の累積交通量の標準偏差を色が濃くなるごとに 1 台ずつ累積交通量の標準偏差が増える 10 段階の色分けで表わすと図 3, 4 のようになった。黒い横線は信号赤現示時間を表わしている。

図 3 より, 端末交通量の変動による累積交通量の標準偏差は時間経過とともに累積することが分かる。また, Time-Space 図の内部では信号赤現示時間や渋滞によって整流化され, 標準偏差は小さくなるのがわかる。一方, FD の形状の変動は時間経過に伴う標準偏差の増大はないが, Time-Space 図の内部における標準偏差が Boundary ノードからの距離に応じて大きくなることを図 4 は示している。以上のことから今回は FD の形状の変動を除き, 累積する端末交通量の変動に対する提案手法の精度検証を行った。

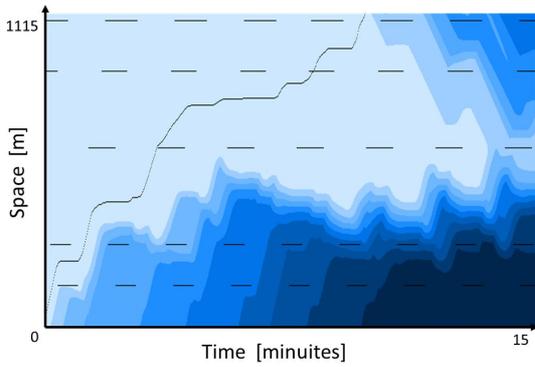


図-3 Boundary の変動による標準偏差

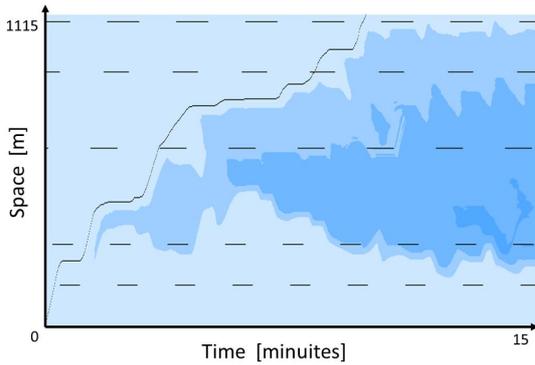


図-4 FD の変動による標準偏差

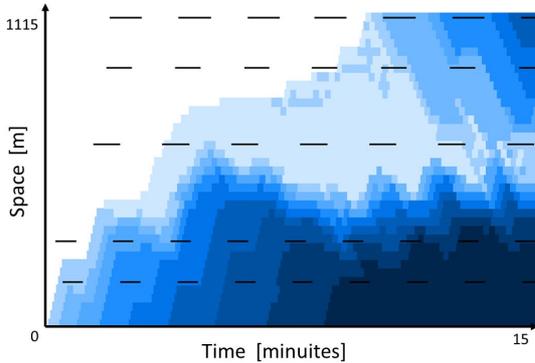


図-5 Clark 近似による累積交通量の標準偏差

b) 提案手法の精度検証

Time-Space 図を、時間 Δt 、距離 Δx ごとに離散化してメッシュを作り、メッシュの隅を終点ノードとし、その終点ノードにおける Clark 近似によって求められた累積交通量の標準偏差は 1 台ずつ 10 段階の色分けで示すと図 5 のようになる。

また、交通流率 $600\text{veh}/\text{hour}$ のケースにおいて、ノードごとにシミュレーションによる累積交通量の期待値と標準偏差を x 座標、提案近似法による値を y 座標にプロットした相関図は図 6、図 7 のように求まった。

図 6 より期待値のプロットは 45 線に沿っており、提案近似法と交通流シミュレーションによる値はよく一

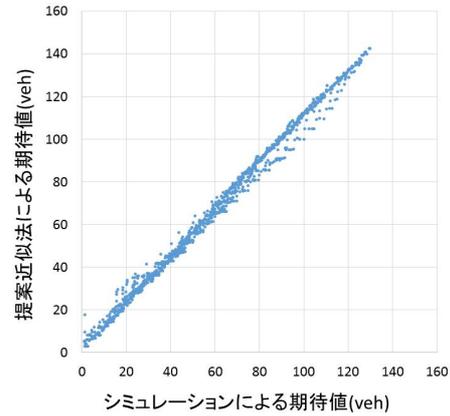


図-6 交通流率 $600\text{veh}/\text{hour}$ での各終点ノードの累積交通量の期待値の比較

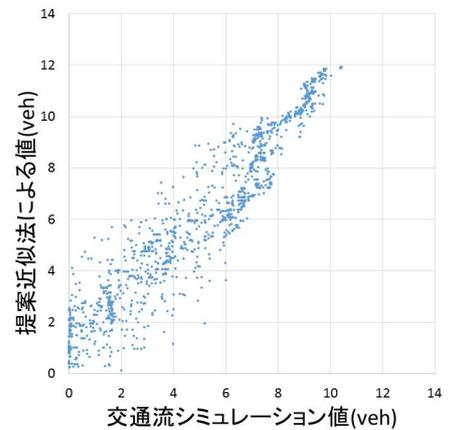


図-7 交通流率 $600\text{veh}/\text{hour}$ での各終点ノードの累積交通量の標準偏差の比較

表-2 流出入交通流率別の累積交通量の期待値と標準偏差の RMS

交通流率	期待値	標準偏差
300 veh/hour	2.49veh	1.85veh
600 veh/hour	7.18veh	1.71veh
1000 veh/hour	7.89veh	1.59veh
1500 veh/hour	8.97veh	0.93veh

致していることがわかる。また図 7 より、値の小さい標準偏差では提案近似法と交通流シミュレーションによる値に多少の違いがあるものの、値の差は ± 2 台程度の範囲に収まっている。

交通流率を変えた場合の 4 つのケースにおいて、交通シミュレーション値を真値とした場合の Clark 近似による累積交通量の期待値と標準偏差の RMS 誤差は表 2 の様になった。

表 2 より、累積交通量の期待値と標準偏差の RMS 値

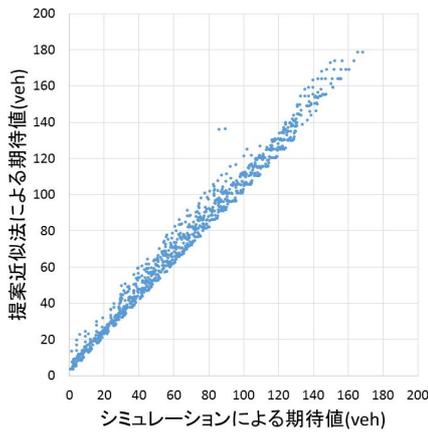


図-8 交通流率 1500veh/hour での各終点ノードの累積交通量の期待値の比較

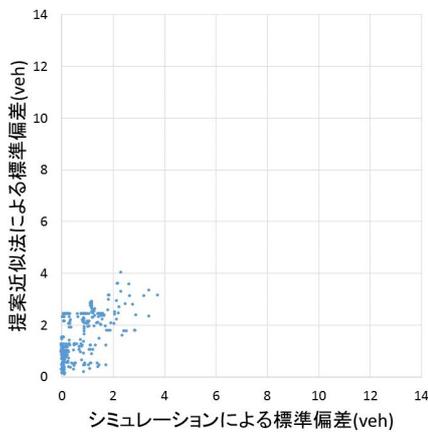


図-9 交通流率 1500veh/hour での各終点ノードの累積交通量の標準偏差の比較

は十分に小さく、交通流率を変えても提案近似法と交通シミュレーションの誤差は少ないと言える。

また、交通流率 1500veh/hour のケースにおける相関図は図 8, 9 のようになった。

以上のように、本研究の提案近似法の近似精度は十分に高く、入力データに確率変動がある際の交通状態把握に有用であると考えられる。

(3) 提案手法による交通流率の変動の分析

交通流シミュレーションと提案手法による交通流率の変動は、 q_{max} の標準偏差を 10 段階に分けて色分けすると図 10, 11 のようになっている。

提案手法によって導出された値と交通流シミュレーションの値の交通流率の RMS 誤差は期待値が 2.74veh/min, 標準偏差が 4.48veh/min と小さいことが分かった。また、交通流率 600veh/hour のときの提案手法と交通流シミュレーションによる交通流率の期待値の相関図は図 12 のようになった。

図 12 より累積交通量に比べ、交通流率の期待値は交

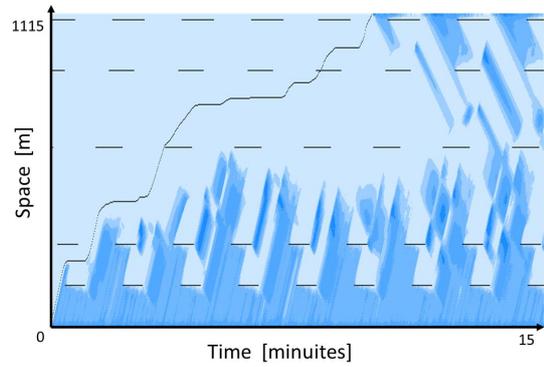


図-10 シミュレーションによる交通流率の標準偏差

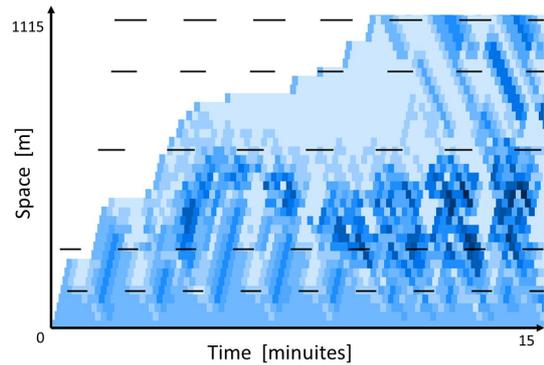


図-11 提案手法による交通流率の標準偏差

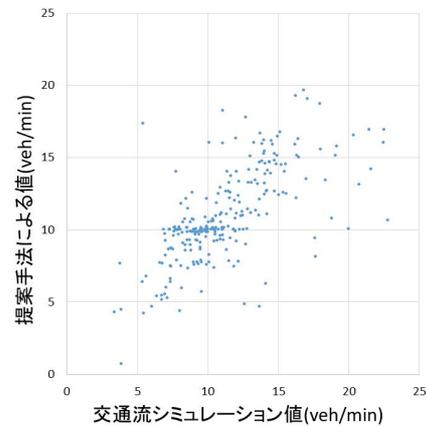


図-12 各終点ノードの交通流率の期待値の相関図

通シミュレーション値と比べてばらつきが大きい。これは、信号赤による停止、発進時の急激な交通流率の変化が、時間を離散化した数値計算では十分に表すことができないことによるものと考えられる。

そこで、信号付近（流入端より 158m の位置）における提案手法と交通流シミュレーションによる交通流率の期待値を比較すると図 13 のようになった。図 13 より、信号付近において提案手法と交通流シミュレーションの交通流率はほぼ同じ周期と振幅で変化していることが分かる。以上のことから、提案手法を用いて交通流率による交通状態把握を行うことが可能だと考えら

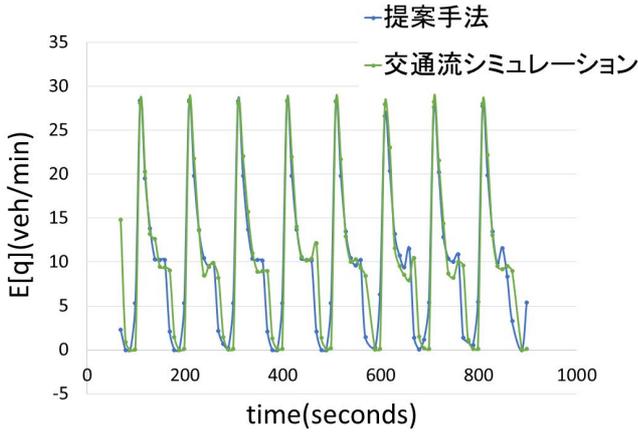


図-13 信号付近における交通流率の期待値の比較

れる。

4. おわりに

本研究では VT における入力データの確率変動による交通状態の変動を調べるために、運転挙動による確率変動 (FD の変動) と対象区間の端末交通量の変動に分割して考え、各ノードの累積交通量の期待値と標準偏差の近似解を求める手法と、その解を利用した交通流率の変動の解析法を提案した。また、提案手法と交通流シミュレーションの結果比較により精度が高いことが判明し、提案手法が信号制御システムなどの交通制御に応用できると考えられる。

今後の展望としては、流出入端での変動や FD に起因する交通状態の変動のみならず、途中流出入をふまえた詳細な交通状態の変動を調べる手法の提案やこれらの確率変動の影響を考慮した交通制御手法の提案などが考えられる。

付録 I 多変量正規分布の確認

標準多変量正規分布に従う X を次のようにおく。

$$x_i \sim N(0, 1) \quad (I.1)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_i)^t \quad (I.2)$$

式 (5) と式 (I.1) より ϵ_i と Z_i は正規分布するので以下のように変形出来る。

$$\frac{\epsilon_i - \mu_{\epsilon_i}}{\sigma_{\epsilon_i}^2}, \frac{Z_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}^2} \sim N(0, 1) \quad (I.3)$$

よって U_i は次のように標準多変量正規分布 X の線形変換で表すことができるので、多変量正規分布であり、Clark 近似の適用が可能である。

$$U = AX + C \quad (I.4)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{\epsilon_1}^2 + \sigma_{Z_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{\epsilon_1}^2 & \sigma_{\epsilon_2}^2 + \sigma_{Z_2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\epsilon_1}^2 & \sigma_{\epsilon_2}^2 & \dots & \sigma_{\epsilon_i}^2 + \sigma_{Z_i}^2 \end{pmatrix} \quad (I.5)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \end{pmatrix} \quad (I.6)$$

$$C = \begin{pmatrix} \mu_{\epsilon_1} + \mu_{Z_1} \\ \mu_{\epsilon_1} + \mu_{\epsilon_2} + \mu_{Z_2} \\ \dots \\ \mu_{\epsilon_1} + \mu_{\epsilon_2} + \dots + \mu_{\epsilon_i} + \mu_{Z_i} \end{pmatrix} \quad (I.7)$$

付録 II 相関係数の導出

式 (2) より以下のことが言える。

$$\begin{aligned} E(U_i, U_{i-k}) &= E(Y_i + Z_i)(Y_{i-k} + Z_{i-k}) \\ &= E(Y_{i-k} + \epsilon_{ik} + Z_i)(Y_{i-k} + Z_{i-k}) \\ &= E(Y_{i-k}Y_{i-k}) + E(Y_{i-k})E(Z_{i-k}) + E(\epsilon_{ik})E(U_{i-k}) + E(Z_i)E(U_{i-k}) \\ &= Var(Y_{i-k}) + E(Y_{i-k})E(Y_{i-k}) + E(Y_{i-k})E(Z_{i-k}) \\ &\quad + E(\epsilon_{ik})E(U_{i-k}) + E(Z_i)E(U_{i-k}) \\ &= Var(Y_{i-k}) + E(Y_{i-k})E(U_{i-k}) + E(\epsilon_{ik})E(U_{i-k}) + E(Z_i)E(U_{i-k}) \\ &= Var(Y_{i-k}) + E(U_i)E(U_{i-k}) \end{aligned} \quad (II.1)$$

$$cov(U_i, U_{i-k}) = E(U_i, U_{i-k}) - E(U_i)E(U_{i-k}) = Var(Y_{i-k}) \quad (II.2)$$

(II.2) 式より、 $Y_i - Y_{i-k} > 0$ のとき相関係数 $\rho_{i,i-k}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho_{i,i-k} &= \frac{Cov(U_i, U_{i-k})}{\sqrt{Var(U_i)} \sqrt{Var(U_{i-k})}} \\ &= \frac{Var(Y_{i-k})}{\sqrt{Var(Y_i) + Var(Z_i)} \sqrt{Var(Y_{i-k}) + Var(Z_{i-k})}} \\ &= \frac{\sigma_{Y_i}^2}{\sqrt{\sigma_{Z_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2} \sqrt{\sigma_{Z_{i-k}}^2 + \sigma_{Y_i}^2}} \end{aligned} \quad (II.3)$$

参考文献

- 1) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Basic theory and complex boundary conditions, Transportation Research Part B, Vol.39, pp.187-196, 2006
- 2) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, Transportation Research Part B, Vol.39, pp.934-950, 2006
- 3) Mehran, B., Kuwahara, M., Naznin, F.: Implementing kinematic wave theory to reconstruct vehicle trajectories from fixed and probe sensor data, Transportation Research Part C 20, pp.144-163, 2012
- 4) Clark, C.E.: The Greatest of a Finite Set of Random Variables, Operations Research 9(2), pp145-162, 1961

- 5) Daganzo, C.F., Bouthelier, F., Sheffi, Y. : Multinomial Probit and Qualitative Choice: A Computationally Efficient Algorithm, Transportation Science 11(4), pp.338-358, 1977
- 6) Horowitz, J.L., Sparmann, J.M., Daganzo, C.F. : An Investigation of the Accuracy of the Accuracy of the Clark Approximation for the Multinomial Probit Model, Transportation Science 16(3), pp.382-401, 1982
- 7) 白井健人・和田健太郎・大口敬・井料美帆 : 確率的な需要の到着を考慮した信号路線の遅れ時間評価法, 生産研究, Vol.68, No.2, pp. 151-156, 2016

(2016.? 受付)