疲労亀裂の発生・進展予測モデル

二宮陽平[1]・水谷大二郎[2]・貝戸清之[3]・小林潔司[4]

[1]学生会員　大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: y.ninomiya@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]学生会員　大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[4]フェロー会員　京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座（〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町）
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

鋼橋において疲労亀裂が発生・進展すれば，鋼橋の機能が著しく低下する．このような鋼橋の機能を完全に回復させるためには，鋼橋全体を取り替えるといった大規模な更新・修繕を行わなければならない．以上の背景から，疲労亀裂の発生および進展を予測し，最適な大規模更新・修繕施策を立案することが必要となっている．そこで本研究では，鋼橋における疲労亀裂の発生および進展を予測する統計的手法を提案する．具体的には，既設の鋼橋に対する点検業務によって獲得される情報に基づいた鋼橋のための統計的劣化予測モデルを開発する．社会基盤施設に対する点検業務の性質から，一般的に亀裂が発生した時点の情報を獲得することはできない．この不可観測問題に起因する亀裂の発生確率や進展速度の過小評価の危険性を，モデルと亀裂発生時点を同時推計するベイズ推計手法を開発・適用することによって解消する．最後に，実在する高速道路鋼橋の亀裂を対象として，本研究で提案する方法論の有用性を議論する．

Key Words : *asset management, steel bridge, fatigue crack, hazard model, Bayesian estimation*

1.　はじめに

著しい老朽化を遂げる我が国の社会基盤施設には，日常で行うことのできる小規模な補修業務のみではその機能を供用開始時に近い状態にまで回復させることが困難なほど，深刻に損傷が進行している社会基盤施設が出現している．このような社会基盤施設の状態を完全に健全な状態にまで回復させることを目的とする事業として，近年，大規模な修繕・更新事業が計画されている．この大規模修繕・更新事業は，構造物全体を抜本的に取り替えるような修繕を行うことを意味する．大規模修繕・更新事業にかかる費用を確保するために，高速道路の債務返済期間の延長が決定され，過去に例を見ないほど多額の修繕予算が確保される見込みである．このような中で，これらの多額の予算を効率的に分配するために，社会基盤施設の劣化状況の将来予測に関する知見が必要となっている．

一方で，高速道路鋼橋に，進展すると走行路面の安定性を損なう重大な損傷事例が 2002 年に報告された[1]．この損傷は，デッキプレートと閉断面リブ溶接部に発生する疲労亀裂であり，鋼橋が高速道路橋として採用された当初，想定されていなかった損傷である．これを受け，平成 14 年に改定された道路橋示方書に初めて鋼橋を疲労亀裂に耐えうる設計とすることが記載された．その後，2004 年に首都高速，2006 年に阪神高速においても同様の損傷が報告されている[2),3)]．今後も，旧設計基準で設計された径間に次々に疲労亀裂が発生することが想定される．このような疲労亀裂は，部分的な修繕により，鋼橋の機能を完全に回復させることは困難であり，平成 14 年改訂以前の道路橋示方書に基づいて設計された鋼橋を対象として，大規模修繕・更新が検討されている．したがって，本研究ではこの高速道路鋼橋を対象として，劣化予測に関する研究を行う．

社会基盤施設の劣化予測手法には，施設に対して実施される点検・調査結果を統計的に分析する手法がある．このような統計的劣化予測手法が近年急速に発展しており，開発された様々な統計的劣化予測モデルを用いることで，より広範囲のデータを用いた多面的な劣化予測が可能となった．その先駆けとなったマルコフ劣化ハザードモデル[4)]は，すでに実務への適用事例が多数報告され，その有用性が十分に検証されている．しかし，疲労亀裂のように劣化過程が損傷の発生を境界として明示的に遷移するような損傷においては，単一の劣化予測モデルを用いて，その損傷の進行を表現するには限界がある．そこで必要となるのが，その損傷の劣化過程の遷移に対応して，複数のモデルを内包したような統計的劣化予測モデルである．このような，統計的劣化予測モデルとして，例えば Madanat 等[5)]は，

道路舗装の劣化発生・進展モデルを提案している．しかし，既往研究においては，損傷の発生時点に関する推計をしておらず，発生確率・進展確率の過小評価・過大評価の危険性が存在する．

以上の問題意識のもと，本研究では，疲労亀裂の発生及び進展に着目した鋼橋の統計的劣化予測モデルを構築し，鋼橋の劣化予測を実施する．具体的には，鋼橋における疲労亀裂の発生および進展を予測するために，それぞれの過程に異なるモデルを定義し，それらを繋ぎ合わせたモデルを構築する．その際，観測することが困難な亀裂が発生した時点を潜在変数として取り扱い，マルコフ連鎖モンテカルロ（以下，MCMC）法を用いて，モデルのパラメータと同時推計する手法を開発し，同手法をモデル推計に適用することで，亀裂の発生確率や進展速度の過小評価の危険性を解消する．以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を述べる．**3.** では亀裂発生および進展モデルを定式化し，**4.** でマルコフ連鎖モンテカルロ（以下，MCMC）法を用いたモデルのベイズ推計手法について詳述する．

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 社会基盤施設の統計的劣化予測手法

本研究では，点検データを用いた統計的手法により高速道路鋼橋の疲労亀裂発生・進展過程をモデル化する．統計的劣化予測手法に関しては，近年，数多くの研究事例が多様な社会基盤施設に対して蓄積されてきている[6),7)]．なかでも，生存時間解析[8)]を用いた劣化予測手法（劣化ハザードモデル）の開発により，故障しているか否かの 2 値状態で劣化状態が観測される施設に対して，供用開始から管理限界を迎えて更新されたような施設のデータ（完全データ）のみならず，供用期間中に予防的な補修や更新が実施された施設に対する点検データ（不完全データ）も用いて劣化予測を行うことが可能となり，劣化予測精度が飛躍的に向上した[9)]．さらに，多段階の離散的な健全度で劣化状態が記述される施設に対して，複数の劣化ハザードモデルを用いてその劣化過程を記述した多段階指数劣化ハザードモデル（マルコフ劣化ハザードモデル）[4)]や多段階ワイブル劣化ハザードモデル[10)]の開発により，上述の生存時間解析の利点を多段階の健全度推移に対しても用いることができるようになった．また，これらのモデルをもとに混合確率モデルや隠れマルコフモデルを定式化することにより，劣化過程のベンチマーキングや複合的劣化過程の予測など，より複雑な劣化過程の推定も可能となってきている[11)−15)]．本研究においても，このような生存時間解析の考え方を用いて，高速道路鋼橋の疲労亀裂発生・進展過程を予測するためのモデルを開発する．

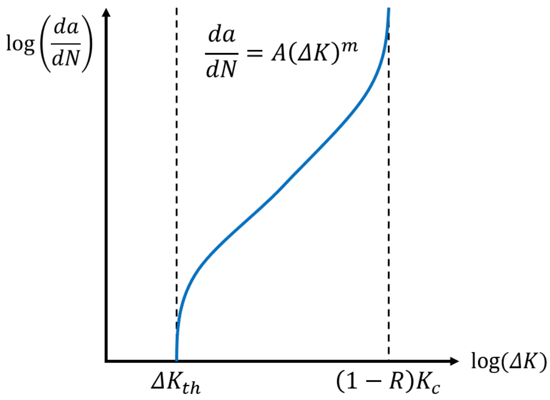
社会基盤施設の劣化発生・進展モデルに関しても，既往研究が存在する．力学的な手法に関しては，例えば，コンクリートの劣化発生・進展過程が理論的にモデル化されている[16)]．一方，統計的手法に関しては，Madanat 等[5),17)−19)]が道路舗装の劣化発生・進展モデルを提案している．Madanat 等のモデルでは，道路舗装のひび割れの発生過程がプロビットモデルで，進展過程が線形回帰モデルで表現されているが，**2.4** で議論するような劣化発生時点の不可観測性が考慮されていないため（劣化が観測された時点を劣化進展過程の初期時点としているため），本研究で対象とする鋼橋疲労亀裂の発生・進展過程に当該モデルを直接適用すると，亀裂発生確率を過大評価する可能性がある．当然のことながら，本研究で提案する劣化発生・進展過程モデルは，点検データが獲得されていれば，鋼橋の疲労亀裂のみならず，上述のコンクリートや道路舗装の劣化発生・進展過程に対しても適用可能であると考えられる．

一方で，損傷の発生・進展に複数の劣化モデルを組み合わせ，損傷の発生時点において劣化過程が変化する劣化予測モデルは，著者らの知る限り，存在しない．これは，社会基盤施設に対する点検業務の特異性に起因する問題が存在するためである．具体的には，社会基盤施設に対する点検データのほとんどがある期間においてのみ実施される不完全モニタリングデータであるという点検データの時間的不連続性の問題である．これにより，複数のモデルをつなぎ合わせる際の，つなぎ目の時点に関する情報が不足しているため，既往研究においてはいずれかの点検時点をモデルのつなぎ目の時点と仮定せざるを得なかった．しかし，この仮定は，発生確率や進展確率の過小評価や過大評価を招く危険性が存在する．本研究では，劣化過程遷移時点に関する情報の不足を補うようなモデル推計手法を提案し，複数のモデルをつなぎ合わせる際の弊害を解消することで，精緻な推計が可能となる劣化予測モデルを定義する．

(2) 疲労亀裂の発生・進展の力学的メカニズム

疲労亀裂の発生・進展の力学的メカニズムに関しては，参考文献[20)]に詳しいが，ここではその特徴を踏まえ，疲労亀裂の発生・進展過程に適合するような統計的劣化予測モデルを考える．鋼橋において発生する亀裂は，ある応力範囲以上の荷重が繰り返し載荷されることによって発生し，さらに多くの繰り返し荷重が載荷されると亀裂が進展することが解明されている．疲労亀裂が発生するまでの応力の繰り返し回数を表す S − N 曲線は，

$$(\Delta\sigma)^m N = c \tag{1}$$



図–1 da/dN と ΔK の関係

で表される応力範囲 $\Delta\sigma$ と応力の繰り返し回数 N の関係である．ただし，c と m はそれぞれ室内試験等により決定される構造材料ごとに異なる定数である．すなわち，力学的に劣化予測を行うために，疲労亀裂が発生するまでの応力の繰り返し回数 N を算出する際には，構造材料や応力範囲 $\Delta\sigma$ の情報が必要である．

一方で，疲労亀裂の進展に要する期間を算出する際には，亀裂の伝播法則を用いることができる．亀裂の伝播速度 da/dN と応力拡大係数範囲 ΔK の関係は**図–1** のようになることが知られている．この関係を定式化すると，

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m \tag{2}$$

となる．この式は Paris の疲労亀裂の伝播則と呼ばれている．ただし，da/dN は 1 回の荷重の繰り返しあたりの亀裂の伝播量であり，ΔK は，$\Delta K = \Delta\sigma Y\sqrt{\pi a}$ で与えられる．A と m はそれぞれ室内試験等により決定される構造材料ごとに異なる定数であり，Y は無次元の修正係数である．よって，ここでも構造材料，応力範囲 $\Delta\sigma$ のほかに，現在の亀裂長さに関する情報がわかれば，亀裂がどのように進展するのかを求めることができる．

以上のように，対象とする箇所に発生する応力範囲がわかれば，亀裂の発生から進展までに何回の繰り返し回数が必要なのかがわかるため，力学的なメカニズムに基づいた劣化予測を行うことができる．しかし，実務で使用される鋼橋は構造が極めて複雑であり，箇所ごとに発生する応力範囲を把握するのは容易ではない．また，現場で溶接される箇所等は，初期の溶接厚不足が存在することも考えられ，室内実験により得られた法則が必ずしも適合するとは限らない．このような観点から，本研究では，統計学を用いたアプローチを試みる．鋼橋の疲労亀裂の発生または進展を統計的に予測した既往研究は，著者らの知る限り存在しない．

S − N 曲線から分かるように，疲労亀裂の発生までの期間は，荷重の繰り返し回数に依存する．このような劣化過程を表現するために，亀裂の発生モデルにワイブル劣化ハザードモデルを適用する．これにより，時間とともに増加する発生確率を表現することが可能となる．一方で，Paris の疲労亀裂の伝播則から分かるように，疲労亀裂の進展速度は，現在の亀裂長さに依存する．このような劣化過程を表現するために，亀裂の進展モデルにマルコフ劣化ハザードモデルを適用する．これにより，劣化速度が現在の状態に依存して決定されることを表現することが可能となる．

(3) 鋼橋の点検体制と亀裂発生時点の不可観測性

点検により蓄積された点検データを用いて鋼橋の亀裂発生・進展モデルを推定する．道路管理者は鋼橋の亀裂発生状況を把握するために定期的に点検を実施している．ここで，鋼橋に対する点検が径間単位で実施されていると考える．当該径間の供用開始から数年に一度の頻度で定期的に点検が実施され，疲労亀裂の有無が亀裂発生領域単位で記録される．さらに，亀裂潜伏領域内に疲労亀裂が発生している場合には，亀裂発生領域ごとにその亀裂長さも併せて記録される．一方，本研究で想定する点検体制において，疲労亀裂が発生した瞬間の時点を観測することは不可能であり，点検と点検の間に疲労亀裂が発生したという情報のみがモデルの推定に利用可能である．このような亀裂発生時点の不可観測性に対しては，生存時間解析における不完全モニタリングデータ [9] に対する考え方を用いてワイブル劣化ハザードモデルの推定を行うことも可能であるが，点検間隔が長い場合や過去の点検データが利用不可能な場合には，このような点検データの不完全性が推定されるハザード関数の形状に大きな影響を与えると考えられる．一方，本研究では，疲労亀裂の発生・進展過程を同時に表現するため，点検と点検の間に疲労亀裂が発生したという情報に加え，亀裂発生後の亀裂長さの進展に関する情報も亀裂発生モデルの推定に利用することができ，モデルの推定精度の向上を図ることができる．

3. モデルの定式化

(1) 亀裂発生モデル

本研究では，亀裂の発生過程をワイブル劣化ハザードモデルを用いて表現する．ワイブル劣化ハザードモデルに関しては，参考文献 [9),10)] に詳しいが，読者の便宜を図るために概要を説明する．いま，ある施設に対して，施設の供用開始から，施設の故障の有無が常時モニタリングされていると考える．初期時点から任意の時点 $t \in [0,\infty]$ まで，施設が故障せず生存する確率

を表す生存関数 $\tilde{F}(t)$ は，時点 t までに施設が故障する確率を表す累積故障確率 $F(t)$ を用いて，

$$\tilde{F}(t) = F(t) - 1 \tag{3}$$

と表せる．ここで，施設が時点 t まで生存し，かつ期間 $[t, t+\delta t]$ の間に初めて故障する条件付き確率は，

$$h(t)\delta t = \frac{f(t)\delta t}{\tilde{F}(t)} \tag{4}$$

と表せる．この $h(t)$ はハザード関数と呼ばれ，このハザード関数 $h(t)$ に，

$$h(t|\lambda, \alpha) = \lambda\alpha t^{\alpha-1} \tag{5}$$

で表されるワイブルハザード関数を設定すると，ワイブル劣化ハザードモデルが表現できる．ワイブル劣化ハザードモデルの確率密度関数および生存関数は，式 (3) から式（5）を用いて，

$$f(t|\lambda, \alpha) = \lambda\alpha t^{\alpha-1}\exp(-\lambda t^{\alpha}) \tag{6a}$$

$$\tilde{F}(t|\lambda, \alpha) = \exp(-\lambda t^{\alpha}) \tag{6b}$$

と導出できる．さらに，本研究では，亀裂の発生過程に影響を与える可観測要因を特性変数として考慮するため，未知パラメータ λ, α を，

$$\lambda = \exp(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\gamma}') \tag{7a}$$

$$\alpha = \exp(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\delta}') \tag{7b}$$

と定義する．記号「′」は転置操作を表す．また，$\boldsymbol{x} = (x_0, \cdots, x_I)$ は亀裂発生過程の亀裂発生速度に影響を与える特性変数ベクトル，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \cdots, \gamma_I)$ は未知パラメータベクトルである．I は特性変数の数を表す．なお，$x_0\gamma_0$ は定数項を表し，$x_0 = 1$ とする．同様に，$\boldsymbol{y} = (y_0, \cdots, y_J)$ は亀裂発生過程の亀裂発生加速度に影響を与える特性変数ベクトル，$\boldsymbol{\delta} = (\delta_0, \cdots, \delta_J)$ は未知パラメータベクトルである．J は特性変数の数を表す．なお，$y_0\delta_0$ は定数項を表し，$y_0 = 1$ とする．

(2) 亀裂進展モデル

本研究では，亀裂発生以降の亀裂進展過程をマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現する．マルコフ劣化ハザードモデルに関しては，参考文献[4] に詳しいが，読者の便宜を図るために概要を説明する．マルコフ劣化ハザードモデルでは，対象とする施設に発生している損傷の進展度合いを基準として，施設の劣化状態を表現する離散的な損傷度 s $(s = 1, \cdots, S)$ を用い，施設の劣化を損傷度の推移で表現する．損傷度が大きくなるほど，より劣化した施設であることを示し，損傷度 1 の施設は，損傷が発生している施設の中で最も劣化していない施設を，損傷度 S の施設は，損傷が発生している施設の中で最も劣化した施設を表す．任意の損傷度 s $(s = 1, \cdots, S-1)$ から，s より 1 段階悪化した状態を示す損傷度 $s+1$ への劣化過程に対応するハザード関数 $h_s(t)$ は，指数ハザード関数を用いて，

$$h_s(t) = \theta_s \ (s = 1, \cdots, S-1) \tag{8}$$

と設定される．これにより，マルコフ劣化ハザードモデルの生存関数は，

$$\tilde{F}_s(t) = \exp(-\theta_s t) \tag{9}$$

と表現できる．この式 $\tilde{F}_s(t)$ は，時間 t の間に損傷度が s のままで変化しない確率を表現する．さらに，任意の損傷度 $s(s = 1, \cdots, S)$ から任意の損傷度 v $(v = 1, \cdots, S)(v \geq s)$ へと推移する確率 $p_{sv}(t)$ を導出すると，

$$p_{sv}(t|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{h=s}^{v}\prod_{e=s}^{h-1}\frac{\theta_e}{\theta_e - \theta_h}\prod_{e=h}^{v-1}\frac{\theta_e}{\theta_{e+1} - \theta_h}\exp(-\theta_h t)$$
$$(s = 1, \cdots, S; v = s, \cdots, S) \tag{10}$$

となる[4]．また，マルコフ推移確率の性質により，時間 t の間に損傷度が任意の s $(s = 1, \cdots, S)$ から S に推移するマルコフ推移確率 $p_{sS}(t|\boldsymbol{\theta})$ $(s = 1, \cdots, S)$ は，

$$p_{sS}(t|\boldsymbol{\theta}) = 1 - \sum_{v=s}^{S-1} p_{sv}(t|\boldsymbol{\theta}) \tag{11}$$

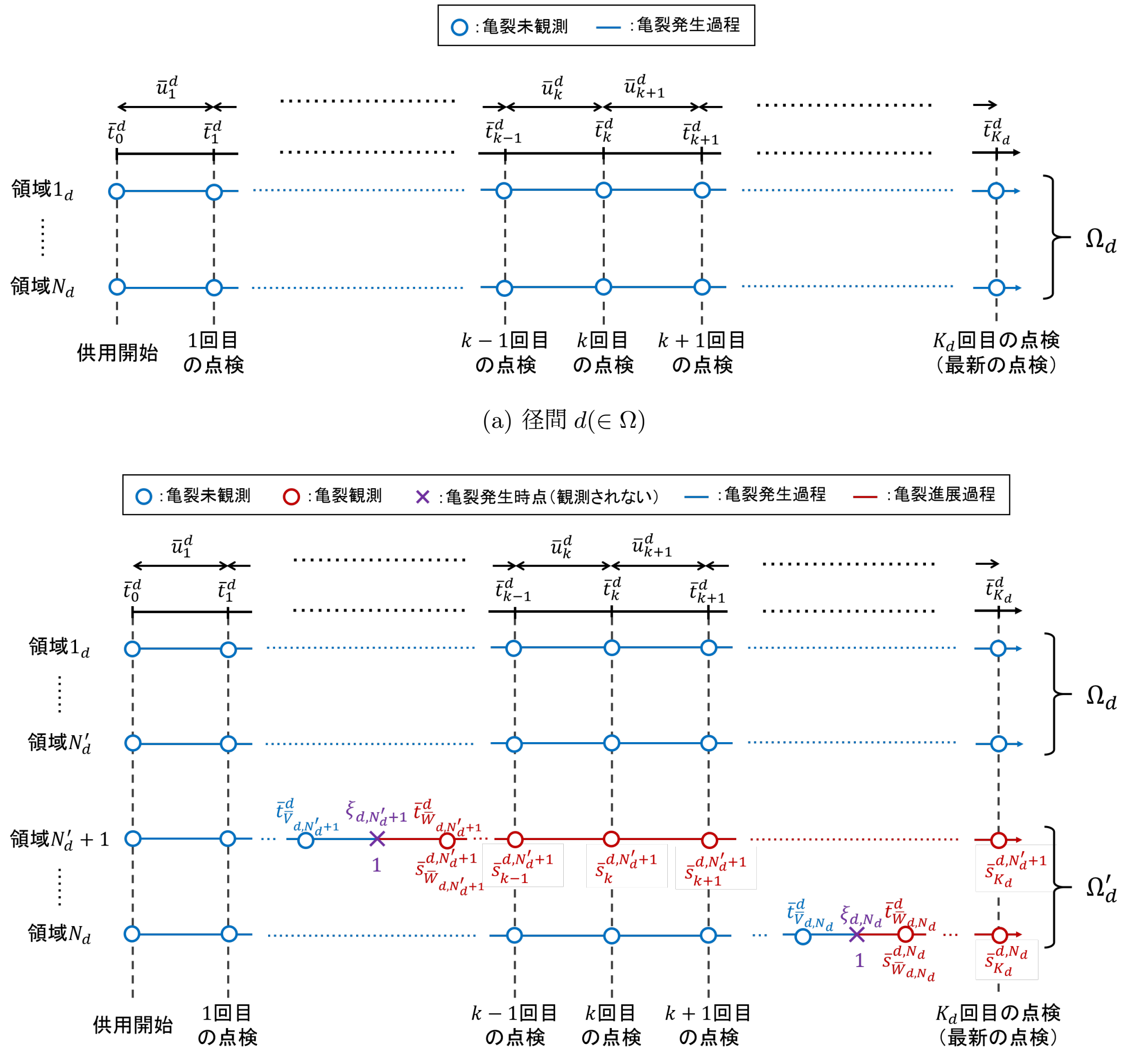
と表現できる．本研究では，マルコフ劣化ハザードモデルのハザード関数に関して，

$$\theta_s = \exp(\boldsymbol{z}\boldsymbol{\beta}_s') \tag{12}$$

と定義する．$\boldsymbol{z} = (z_0, \cdots, z_M)$ は亀裂進展過程に影響を与える特性変数ベクトル，$\boldsymbol{\beta}_s = (\beta_0^s, \cdots, \beta_M^s)$ $(s = 1, \cdots, S-1)$ は未知パラメータベクトルである．M は特性変数の数を表す．なお，$z_0\beta_0$ は定数項を表し，$z_0 = 1$ とする．

(3) 亀裂発生・進展モデル

亀裂発生モデルと亀裂進展モデルを用いて，鋼橋の供用開始から亀裂が発生しその亀裂長さが進展する過程を亀裂発生・進展モデルとしてモデル化する．いま，D 個の径間を分析対象とする．個々の径間 d $(d = 1, \cdots, D)$ に存在する亀裂発生領域の数を N_d とし，亀裂発生領域それぞれにに領域番号 n_d $(n_d = 1, \cdots, N_d)$ を付与する．このとき，一般性を損なうことなく，亀裂の発生していない径間群 Ω を $d = 1, \cdots, D'$，亀裂の発生している径間群 Ω' を $d = D'+1, \cdots, D$，Ω' の亀裂発生領域の中で亀裂の発生していない領域群 Ω_d を $n_d = 1, \cdots, N_d'$ $(d = D'+1, \cdots, D)$，発生している領域群 Ω_d' を $n_d = N_d'+1, \cdots, N_d$ $(d = D'+1, \cdots, D)$ とする．ここで，ある単一の亀裂発生領域 n_d の亀裂発生・進展過程に着目する．本研究では，1 径間に対する点検業務において，当該径間内の全ての亀裂発生領域の亀裂の有無と亀裂長さが観測されている場合を対象とす



(a) 径間 $d(\in\Omega)$

(b) 径間 $d(\in\Omega')$

図–1 想定する獲得データ

る．そこで，亀裂発生領域 n_d の亀裂発生・進展過程を記述するためのサンプル時間軸を，

$$\bar{t}^d_k = \bar{t}^d_{k-1} + \bar{u}^d_k \quad (k=1,\cdots,K_d) \tag{13}$$

と定義する．なお，$\bar{t}^d_0=0$ は径間 d の初期時点（径間 d の供用開始時点あるいは更新時点）である．また，径間 d に対して，現在までに K_d 回の点検が実施されているとし，時点 $\bar{t}^d_k$ $(k=1,\cdots,K_d)$ は，径間 d に対する k 回目の点検時点を表す．サンプル時間軸上の点を時点と呼び，カレンダー時刻と区別する．$d\in\Omega'\cap n_d\in\Omega'_d$ 以外の亀裂発生領域に関する尤度関数 $\ell_{d,n_d}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})$ は，

$$\ell_{d,n_d}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) = \tilde{F}(\bar{t}^d_{K_d}|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \tag{14}$$

と定義できる．なお，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d}$ は，点検情報であり，$d\in\Omega'\cap n_d\in\Omega'_d$ 以外の亀裂発生領域に関しては，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d}=(\bar{t}^d_{K_d},\bar{\boldsymbol{x}}_{d,n_d},\bar{\boldsymbol{y}}_{d,n_d})$ で構成される．また，亀裂発生領域 $n_d=N'_d+1,\cdots,N_d$ それぞれにおいて，1 回目から $\bar{V}_{d,n_d}$ 回目の点検までは亀裂が観測されず，$\bar{W}_{d,n_d}$ 回目の点検で亀裂が初めて観測されたと考える．このとき，亀裂発生領域 $n_d=N'_d+1,\cdots,N_d$ それぞれの亀裂発生時点 ξ_{d,n_d} に関しては，$\xi_{d,n_d}\in(\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}},\bar{t}^d_{\bar{W}_{d,n_d}})$ という部分的な情報のみが獲得可能であり，亀裂発生時点 ξ_{d,n_d} 自体は不可観測である．$d\in\Omega'\cap n_d\in\Omega'_d$ の場合の亀裂発生領域 n_d の亀裂発生・進展過程の尤度関数 $\ell'_{d,n_d}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta})$ を，

$$\begin{aligned}
&\ell'_{d,n_d}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}) \\
&= \int_{\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}-1}}^{\bar{t}^d_{\bar{W}_{d,n_d}}} f(\xi_{d,n_d}|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}) \\
&\cdot p_{1\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}}(\xi_{d,n_d}-\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}|\boldsymbol{\beta}) \\
&\cdot \prod_{k=\bar{W}_{d,n_d}+1}^{K_d} p_{\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}\bar{s}^{d,n_d}_{k}}(\bar{u}^d_k|\boldsymbol{\beta})d\xi_{d,n_d}
\end{aligned} \tag{15}$$

と定義する．ここで，$\bar{s}^{d,n_d}_k$ は，時点 $\bar{t}^d_k$ における亀裂進展過程の健全度の観測値である．なお，亀裂発生

時点では亀裂長さは極めて小さいと考え，時点 ξ_{d,n_d} での亀裂長さを表す健全度は 1 としている．観測された健全度ベクトルを $\bar{\boldsymbol{s}}_{d,n_d} = (\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}, \cdots, \bar{s}^{d,n_d}_{K_d})$ と表す．このとき，点検情報 $\bar{\Xi}_{d,n_d}$ は $\bar{\Xi}_{d,n_d} = (\bar{\boldsymbol{s}}_{d,n_d}, \bar{V}_{d,n_d}, \bar{W}_{d,n_d}, \bar{\boldsymbol{x}}_{d,n_d}, \bar{\boldsymbol{y}}_{d,n_d}, \bar{\boldsymbol{z}}_{d,n_d})$ で構成される．$\bar{\boldsymbol{y}}_{d,n_d}$ は，領域 n_d の亀裂進展に関する特性変数ベクトルである．また，径間 $d(\in \Omega')$ において獲得が期待されるデータを図–**1** に示した．

個々の亀裂発生領域の尤度関数 (14)，(15) を用いて，対象とする全ての径間の全ての亀裂発生領域に関する尤度関数 $\mathcal{L}(\bar{\Xi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta})$ は，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\bar{\Xi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta})\\&= \prod_{d=1}^{D'} \ell_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})\\&\cdot \prod_{d=D'+1}^{D} \left\{ \prod_{n_d=1}^{N'_d} \ell_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \right.\\&\left. \cdot \prod_{n_d=N'_d+1}^{N_d} \ell'_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}) \right\} \qquad (16)\end{aligned}$$

と表すことができる．ただし，$\bar{\Xi} = (\bar{\Xi}_{1,1}, \cdots, \bar{\Xi}_{D,N_D})$ である．

4. モデル推計手法

(1) MCMC 法

モデルの尤度関数から未知パラメータを推計する際の手法として，代表的なものに最尤推定法，ベイズ推計法が挙げられる．このうち最尤推定法は，尤度関数の最大化問題を考え，そのときのパラメータの値を最尤推定値として採用する．しかし，尤度関数が非常に多数のパラメータで構成される多変数関数となる場合，解析的に尤度関数が最大値となる未知パラメータの値を求めるのは容易ではない．そこで用いられるのが，直接探索法とニュートン・ラフソン法を組み合わせた段階的な最尤推定法である．このとき，尤度関数の全未知パラメータによる 1 階偏導関数を要素に持つグラジエントベクトル，2 階偏導関数を要素に持つヘシアン行列を求めることが必要となる．すなわち，尤度関数の偏微分が困難な場合，パラメータ推計に最尤推計法を用いることはできない．

一方で，ベイズ推計法は伝統的に共役な事前・事後分布を用いて，未知パラメータを推計する方法が採用されてきた．しかし，本研究で用いるワイブル劣化ハザードモデルやマルコフ劣化ハザードモデルには，共役事前分布が存在しないことが知られており，ベイズ推計法を導入する際の弊害となっていた．しかし，近年 MCMC 法を用いたベイズ推計アルゴリズムがハザード解析の分野に導入されたことにより [21)−24)]，複雑なモデルの推計も可能となった．これは，事後確率分布を直接求めることが困難な場合に，各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いることで，各パラメータをランダムにサンプリングし，事後分布を推計する手法である．

本研究で提案するモデルの推計の際も，尤度関数 (16) が非常に複雑な構成となっていることから，この MCMC 法を用いたベイズ推計法を用いる．

(2) 尤度関数の完備化操作

亀裂発生時点 ξ_{d,n_d} は観測不可能であるが，いま仮にその値が $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ である場合を考えよう．亀裂発生時点 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ は，期間 $(\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}, \bar{t}^d_{\bar{W}_{d,n_d}})$ に存在するため，

$$\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}} < \tilde{\xi}_{d,n_d} < \bar{t}^d_{\bar{W}_{d,n_d}} \qquad (17)$$

を満足する．このとき，点検情報 $\bar{\Xi}$ が観測される尤度関数は，

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{L}}(\bar{\Xi}, \tilde{\xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta})\\&= \prod_{d=1}^{D'} \ell_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})\\&\cdot \prod_{d=D'+1}^{D} \left\{ \prod_{n_d=1}^{N'_d} \ell_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \right.\\&\left. \cdot \prod_{n_d=N'_d+1}^{N_d} \tilde{\ell}'_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{d,n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}) \right\} \qquad (18)\end{aligned}$$

と表現でき [25)]，尤度関数 (16) に一致する．ただし，

$$\begin{aligned}&\tilde{\ell}'_{d,n_d}(\bar{\Xi}_{n_d}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta})\\&= f(\tilde{\xi}_{d,n_d}|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})\\&\cdot p_{1\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}}(\tilde{\xi}_{d,n_d} - \bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}|\boldsymbol{\beta})\\&\cdot \prod_{k=\bar{W}_{d,n_d}+1}^{K_d} p_{\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}\bar{s}^{d,n_d}_k}(\bar{u}^d_k|\boldsymbol{\beta}) \qquad (19)\end{aligned}$$

である．以上の操作を完備化という．完備化された尤度関数（以下，完備化尤度関数）(18) は，通常の尤度関数 (16) より大幅に簡略化されていることが理解できる．しかし，前述したように完備化尤度関数の中に含まれる潜在変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_{d,n_d} = \tilde{\xi}_{D'+1,N'_{D'+1}+1}, \cdots, \tilde{\xi}_{D,N_D})$ は，観測できない変数である．ただし，潜在変数が従う確率分布は完備化尤度関数 (18) に他ならない．しかし，この完備化尤度関数 (18) を用いて，潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ の全条件付き事後確率を求めることができたとしても，未知パラメータ $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}$ が含まれるために，潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ が生起する確率を先験的に求めることができない．そこで，MCMC 法により，未知パラメータ $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}$ をランダムサンプリングすると同時に，潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ をランダム発生させる．このよ

うな方法により，完備化尤度関数 (18) を用いて求めたパラメータのベイズ推計値が，尤度関数 (16) を用いて求めたパラメータの最尤推定値に収束することが証明されている[26]．既往研究における潜在変数は，点検データのシステム的な欠損により観測できない路面や耐荷力の離散的な健全度として設定されている[11)−15)]．そのランダム発生の際に用いる確率分布は，ベイズの定理を援用し，取り得ることのできる全ての健全度が生起する確率を導出し，それらの総和で個々の健全度が生起する確率を規格化して定義している．このように，潜在変数が離散的な変数であるときは，それら 1 つ 1 つの潜在変数が生起する確率を導出することができるが，本研究で取り扱う潜在変数は，亀裂の発生時点として設定さた連続的な変数である．この場合，潜在変数 1 つ 1 つが生起する確率を導出することができないため，その確率分布（確率密度関数）から直接的にサンプリングを行うことができない．そこで，本研究では，潜在変数がある値以下に存在している確率，すなわち累積分布関数を定式化し，この関数からランダムサンプリングを行う．

そこで，潜在変数が従う累積分布関数を導出する．完備化尤度関数を用いて，潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ に関する全条件付き事後確率の累積分布関数 $\mathrm{Prob}[\tilde{\xi}_{d,n_d} \leq T|\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}]$ は，

$$\mathrm{Prob}[\tilde{\xi}_{d,n_d} \leq T|\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\alpha,\boldsymbol{\beta}] = \frac{\int_{\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}}^{T} \tilde{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta})dt}{\int_{\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}}^{\bar{t}^d_{\bar{W}_{d,n_d}}} \tilde{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta})dt} \tag{20}$$

と表される．この関数からランダムサンプリングを行う際には，$[0,1]$ を定義域とする一様乱数 η を発生させ，累積分布関数 (20) の逆関数に当てはめる．具体的には，

$$\mathrm{Prob}^{-1}[\eta|\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{d,n_d},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}] = T \tag{21}$$

を満足する T を潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ のサンプリング値として採用する．以上のように，潜在変数をサンプリングする際には，完備化尤度関数の積分を行い，その逆関数を求めなければならない．しかし，完備化尤度関数の原始関数を導出することはできず，解析的に積分計算を行うことができない．このような問題を解消するために，本研究では，モンテカルロ積分を援用し，一様乱数 η に最も近い積分値をとる T を潜在変数 $\tilde{\xi}_{d,n_d}$ のサンプリング値として採用する．

(3) 事前確率密度関数の設定

モデルに含まれる未知パラメータ $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}$ をベイズ推定するために，それぞれの未知パラメータに対し，事前確率密度関数を設定する．まず，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0,\cdots,\gamma_I)$ に対しては，$I+1$ 次元正規分布を設定し，$\boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}_{I+1}(\boldsymbol{\mu}_\gamma,\boldsymbol{\sigma}_\gamma)$ とする．ただし，$\boldsymbol{\mu}_\gamma$ は $\mathcal{N}_{I+1}(\boldsymbol{\mu}_\gamma,\boldsymbol{\sigma}_\gamma)$ の期待値ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}_\gamma$ は $\mathcal{N}_{I+1}(\boldsymbol{\mu}_\gamma,\boldsymbol{\sigma}_\gamma)$ の分散共分散行列を表す．一方で，$\boldsymbol{\delta} = (\delta_0,\cdots,\delta_J)$ に対しては，$J+1$ 次元正規分布を設定し，$\boldsymbol{\delta} \sim \mathcal{N}_{J+1}(\boldsymbol{\mu}_\delta,\boldsymbol{\sigma}_\delta)$ とする．ただし，$\boldsymbol{\mu}_\delta$ は $\mathcal{N}_{J+1}(\boldsymbol{\mu}_\delta,\boldsymbol{\sigma}_\delta)$ の期待値ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}_\delta$ は $\mathcal{N}_{J+1}(\boldsymbol{\mu}_\gamma,\boldsymbol{\sigma}_\gamma)$ の分散共分散行列を表す．$\boldsymbol{\beta}^s = (\beta^s_0,\cdots,\beta^s_M)(s=1,\cdots,S-1)$ に対しては，$M+1$ 次元正規分布を設定し，$\boldsymbol{\beta}^s \sim \mathcal{N}_{M+1}(\boldsymbol{\mu}^s_\beta,\boldsymbol{\sigma}^s_\beta)$ とする．ただし，$\boldsymbol{\mu}^s_\beta$ は $\mathcal{N}_{M+1}(\boldsymbol{\mu}^s_\beta,\boldsymbol{\sigma}^s_\beta)$ の期待値ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}^s_\beta$ は $\mathcal{N}_{M+1}(\boldsymbol{\mu}^s_\beta,\boldsymbol{\sigma}^s_\beta)$ の分散共分散行列を表す．以上の事前確率密度関数および完備化尤度関数を用いて，ベイズの定理により完備化事後確率密度関数を定式化することができる．

(4) 事後確率密度関数の定式化

事後確率密度関数は，ベイズの定理から尤度関数と事前確率密度関数との積で表される．$\bar{\boldsymbol{\Xi}} = (\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{1,1},\cdots,\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{D,N_D})$，$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_{D'+1,N'_{D'+1}+1},\cdots,\tilde{\xi}_{D,N_D})$ を所与としたときの，完備化事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ は，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\
&\propto \prod_{d=1}^{D'} \left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^d_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\} \\
&\cdot \prod_{d=D'+1}^{D} \left[\prod_{n_d=1}^{N'_d} \left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^d_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\right. \\
&\cdot \prod_{n_d=N'_d+1}^{N_d} \left[\alpha\lambda {\tilde{\xi}_{d,n_d}}{}^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda {\tilde{\xi}_{d,n_d}}{}^{\alpha}\right)\right. \\
&\cdot \sum_{h=1}^{\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}} \left\{\prod_{e=1}^{h-1} \frac{\theta_e}{\theta_e-\theta_h} \prod_{e=h}^{\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}-1} \frac{\theta_e}{\theta_{e+1}-\theta_h}\right. \\
&\cdot \left.\exp\left(-\theta_h\left(\tilde{\xi}_{d,n_d}-\bar{t}^d_{\bar{V}_{d,n_d}}\right)\right)\right\} \\
&\cdot \prod_{k=\bar{W}_{d,n_d}+1}^{K_d} \left[\sum_{h=\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}}^{\bar{s}^{d,n_d}_k} \left\{\prod_{e=\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}}^{h-1} \frac{\theta_e}{\theta_e-\theta_h}\right.\right. \\
&\cdot \left.\left.\left.\left.\prod_{e=h}^{\bar{s}^{d,n_d}_k-1} \frac{\theta_e}{\theta_{e+1}-\theta_h} \exp\left(-\theta_h \bar{u}^d_k\right)\right\}\right]\right]\right] \\
&\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\mu}_\gamma\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_\gamma\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\mu}_\gamma\right)'\right\} \\
&\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\mu}_\delta\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_\delta\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\mu}_\delta\right)'\right\} \\
&\cdot \exp\left[-\sum_{s=1}^{S-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\beta}^s-\boldsymbol{\mu}^s_\beta\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^s_\beta\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\beta}^s-\boldsymbol{\mu}^s_\beta\right)'\right\}\right]
\end{aligned} \tag{22}$$

と定式化できる．

(5) 条件付き事後確率密度関数の定式化

以下では，個々の未知パラメータに対し，その条件付き事後確率密度関数を定式化する．

まず，$\boldsymbol{\gamma}_{-i}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}, \bar{\Xi}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を所与としたときのパラメータ γ_i $(i=0,\cdots,I)$ の条件付き事後確率密度関数は，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}(\gamma_i|\boldsymbol{\gamma}_{-i},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\\
&\propto \prod_{d=1}^{D'}\left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^{d}_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\\
&\cdot\prod_{d=D'+1}^{D}\left[\prod_{n_d=1}^{N'_d}\left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^{d}_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\right.\\
&\left.\cdot\prod_{n_d=N'_d+1}^{N_d}\left\{\lambda\exp\left(-\lambda {\tilde{\xi}_{d,n_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\right]\\
&\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\mu}_{\gamma}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\mu}_{\gamma}\right)'\right\} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\gamma}_{-i}$ は，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ から，要素 γ_i を除いた部分ベクトルである．

次に，$\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}_{-j}, \boldsymbol{\beta}, \bar{\Xi}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を所与としたときのパラメータ δ_j $(j=0,\cdots,J)$ の条件付き事後確率密度関数は，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}(\delta_j|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}_{-j},\boldsymbol{\beta},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\\
&\propto \prod_{d=1}^{D'}\left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^{d}_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\\
&\cdot\prod_{d=D'+1}^{D}\left[\prod_{n_d=1}^{N'_d}\left\{\exp\left(-\lambda {\bar{t}^{d}_{K_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\right.\\
&\left.\cdot\prod_{n_d=N'_d+1}^{N_d}\left\{\alpha{\tilde{\xi}_{d,n_d}}{}^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda {\tilde{\xi}_{d,n_d}}{}^{\alpha}\right)\right\}\right]\\
&\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\mu}_{\delta}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_{\delta}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\mu}_{\delta}\right)'\right\} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\delta}_{-j}$ は，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\delta}$ から，要素 δ_J を除いた部分ベクトルである．

そして，$\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}^{-s}_{-m}, \bar{\Xi}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を所与としたときのパラメータ β^s_m $(m=0,\cdots,M)$ $(s=1,\cdots,S-1)$ の条件付き事後確率密度関数は，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}(\beta^s_m|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\beta}^{-s}_{-m},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\\
&\propto \prod_{d=D'+1}^{D}\left[\prod_{n_d=1}^{N'_d}\left[\sum_{h=1}^{\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}}\left\{\prod_{e=1}^{h-1}\frac{\theta_e}{\theta_e-\theta_h}\right.\right.\right.\\
&\left.\cdot\prod_{e=h}^{\bar{s}^{d,n_d}_{\bar{W}_{d,n_d}}-1}\frac{\theta_e}{\theta_{e+1}-\theta_h}\exp\left(-\theta_h\left(\tilde{\xi}_{d,n_d}-\bar{t}^{d}_{\bar{V}_{d,n_d}}\right)\right)\right\}\\
&\cdot\prod_{m=\bar{W}_{d,n_d}+1}^{K_d}\left[\sum_{h=\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}}^{\bar{s}^{d,n_d}_{k}}\left\{\prod_{e=\bar{s}^{d,n_d}_{k-1}}^{h-1}\frac{\theta_e}{\theta_e-\theta_h}\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.\cdot\prod_{e=h}^{\bar{s}^{d,n_d}_{k}-1}\frac{\theta_e}{\theta_{e+1}-\theta_h}\exp\left(-\theta_h\bar{u}^d_k\right)\right\}\right]\right]\right]\\
&\cdot\exp\left[-\sum_{s=1}^{S-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\beta}^s-\boldsymbol{\mu}^s_{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^s_{\beta}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\beta}^s-\boldsymbol{\mu}^s_{\beta}\right)'\right\}\right] \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\beta}^{-s}_{-m}$ は，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ から，要素 β^s_m を除いた部分ベクトルである．

(6) 推計アルゴリズム

本研究で提案するモデルのパラメータと潜在変数として設定する損傷発生時点をランダムサンプリングするための具体的なアルゴリズムを以下と図–2 の推計フローで説明する．

なお，$\gamma_i^{(n)}, \delta_j^{(n)}, \beta_m^{s\,(n)}, \xi_{d,n_d}^{(n)}$ は，それぞれのパラメータおよび潜在変数の n 回目のサンプリング値を示す．さらに，パラメータベクトルおよび潜在変数ベクトル $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}, \boldsymbol{\delta}^{(n)}, \boldsymbol{\beta}^{(n)}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n)}$ はそれぞれ $(\gamma_0^{(n)},\cdots,\gamma_I^{(n)})$，$(\delta_0^{(n)},\cdots,\delta_J^{(n)})$，$(\beta_0^{1\,(n)},\cdots,\beta_M^{S-1\,(n)})$，$(\tilde{\xi}^{(n)}_{D'+1,N'_{D'+1}+1},\cdots,\tilde{\xi}^{(n)}_{D,N_D})$ で構成されるとし，$\boldsymbol{\gamma}_{-i}^{(n),(n-1)}$ に関しては，$(\gamma_0^{(n)},\cdots,\gamma_{i-1}^{(n)},\gamma_{i+1}^{(n-1)},\cdots,\gamma_I^{(n-1)})$，$\boldsymbol{\delta}_{-j}^{(n),(n-1)}$ に関しては，$(\delta_0^{(n)},\cdots,\delta_{j-1}^{(n)},\delta_{j+1}^{(n-1)},\cdots,\delta_J^{(n-1)})$，$\boldsymbol{\beta}^{-s\,(n),(n-1)}_{-m}$ に関しては，$(\boldsymbol{\beta}^{1\,(n)}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}^{s-1\,(n)}_m,\boldsymbol{\beta}^{s\;(n),(n-1)}_{-m},\boldsymbol{\beta}^{s+1\,(n-1)}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}^{S-1\,(n-1)}_m)$ で構成されるとする．ただし，$\boldsymbol{\beta}^{s\;(n),(n-1)}_{-m}$ に関しては，$(\beta^{s\,(n)}_1,\cdots,\beta^{s\;(n)}_{m-1},\beta^{s\;(n)}_{m+1},\cdots,\beta^{s\;(n)}_{M-1})$ で構成されるとする．

ステップ 1　初期設定

事前確率密度関数のパラメータ $\boldsymbol{\mu}_{\gamma}$，$\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}$，$\boldsymbol{\mu}_{\delta}$，$\boldsymbol{\sigma}_{\delta}$，$\boldsymbol{\mu}_{\beta}$，$\boldsymbol{\sigma}_{\beta}$ を設定し，事前確率密度関数を決定する．また，未知パラメータの初期値 $\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$，$\boldsymbol{\delta}^{(0)}$，$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ を設定する．潜在変数についても初期値 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$ を設定する．これらの初期値の影響は，サンプリング回数 n が増加するにつれ

薄れていく．さらに，MCMC 法のバーイン回数 $\underline{n}$，アルゴリズムの終了回数 $\overline{n}$ を設定する．$n=1$ とし，ステップ **2** に進む．

ステップ 2　未知パラメータのサンプリング

ステップ 2-1　$\gamma^{(n)}$ のサンプリング

このステップでは，条件付き事後確率密度関数 (23) から未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$ を反復的にサンプリングする．

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\gamma_0^{(n)}|\boldsymbol{\gamma}_{-0}^{(n),(n-1)},\boldsymbol{\delta}^{(n-1)},\boldsymbol{\beta}^{(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\gamma_0^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

⋮

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\gamma_I^{(n)}|\boldsymbol{\gamma}_{-I}^{(n),(n-1)},\boldsymbol{\delta}^{(n-1)},\boldsymbol{\beta}^{(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\gamma_I^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

ステップ 2-2　$\delta^{(n)}$ のサンプリング

このステップでは，条件付き事後確率密度関数 (24) から未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\delta}^{(n)}$ を反復的にサンプリングする．

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\delta_0^{(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}_{-0}^{(n),(n-1)},\boldsymbol{\beta}^{(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\delta_0^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

⋮

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\delta_J^{(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}_{-J}^{(n),(n-1)},\boldsymbol{\beta}^{(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\delta_J^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

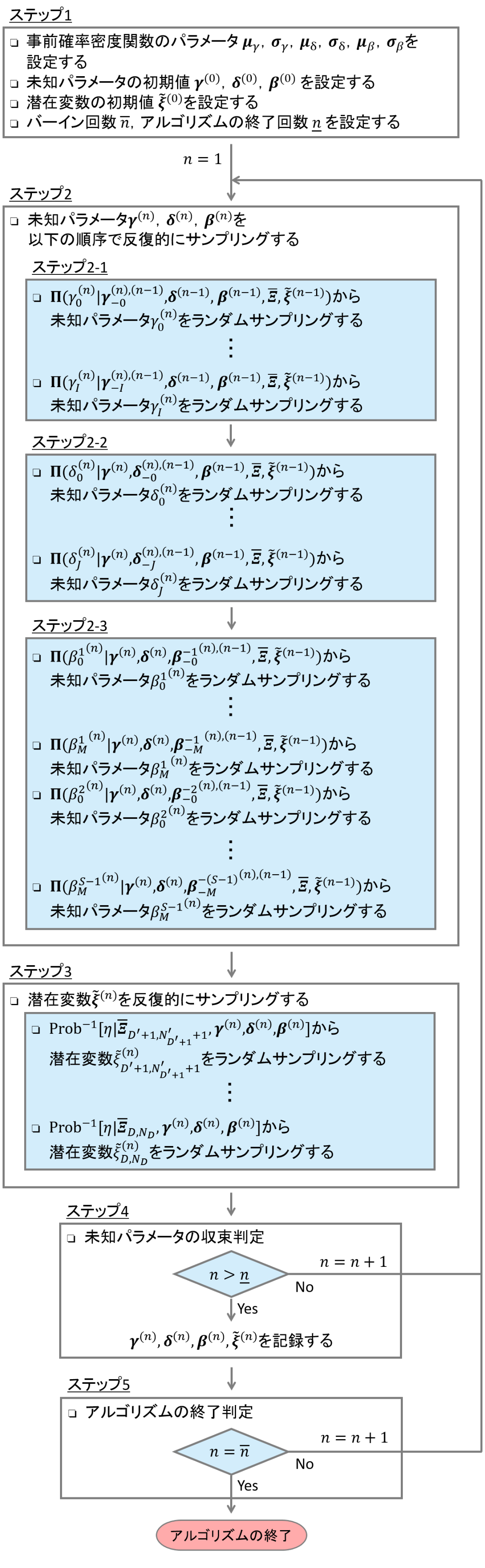
ステップ 2-3　$\beta^{(n)}$ のサンプリング

このステップでは，条件付き事後確率密度関数 (25) から未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}^{(n)}$ を反復的にサンプリングする．

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\beta_0^{1\,(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}_{-0}^{-1\,(n),(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\beta_0^{1\,(n)}$ をランダムサンプリングする．

⋮

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\beta_M^{1\,(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}_{-M}^{-1\,(n),(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ から未知パラメータ $\beta_M^{1\,(n)}$ をランダムサンプリングする．



図–2　推計フロー

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\mathbf{\Pi}(\beta_0^{2(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}_{-0}^{-2(n),(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n-1)})$ から未知パラメータ $\beta_0^{2(n)}$ をランダムサンプリングする．

⋮

◇ 条件付き事後確率密度関数 $\mathbf{\Pi}(\beta_M^{S-1(n)}|\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}_{-M}^{-(S-1)^{(n)},(n-1)},\bar{\Xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ から未知パラメータ $\beta_M^{S-1(n)}$ をランダムサンプリングする．

ステップ 3 に進む．

ステップ 3　潜在変数のサンプリング

このステップでは，潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n)}$ を確率分布 (21) に従い反復的にサンプリングする．

◇ 確率分布 $\mathrm{Prob}^{-1}[\eta|\bar{\Xi}_{D'+1,N'_{D'+1}+1},\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}^{(n)}]$ から潜在変数 $\xi_{D'+1,N'_{D'+1}+1}^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

⋮

◇ 確率分布 $\mathrm{Prob}^{-1}[\eta|\bar{\Xi}_{D,N_D},\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}^{(n)}]$ から潜在変数 $\xi_{D,N_D}^{(n)}$ をランダムサンプリングする．

ステップ 4 に進む．

ステップ 4　収束判定

サンプリング回数 n がバーイン回数 $\underline{n}$ よりも小さい場合，$n=n+1$ とし，**ステップ 2** に戻る．n が $\underline{n}$ よりも大きい場合，$\boldsymbol{\gamma}^{(n)},\boldsymbol{\delta}^{(n)},\boldsymbol{\beta}^{(n)},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(n)}$ を記録し，**ステップ 5** に進む．

ステップ 5　アルゴリズムの終了判定

サンプリング回数 n がアルゴリズムの終了回数 $\overline{n}$ に達していない場合，$n=n+1$ とし，**ステップ 2** に戻る．n が $\overline{n}$ に達した場合，アルゴリズムを終了する．

5.　おわりに

本研究では，既設の鋼橋に対する点検業務によって獲得される情報に基づいた鋼橋のための統計的劣化予測モデルを開発し，その推計手法を示した．モデルと亀裂発生時点を同時にベイズ推計することで，亀裂発生時点の不可観測性を解消している点が，本研究で開発したモデル推計手法の大きな特長である．なお，実証分析に関しては講演会当日に発表する予定である．

参考文献

1) 吉川直志，伊東昇，大塚敬三，町田文孝，三木千壽：U リブを用いた鋼床版の疲労損傷事例，土木学会第 57 回年次学術講演会，I-277，pp.553-553，2002.
2) 神木剛，下里哲弘，増井隆，町田文孝，渋谷敦，弓削太郎：鋼床版の疲労き裂発生パターンに関する一分析，土木学会第 59 回年次学術講演会，I-544，pp.1085-1086，2004.
3) 藤本美早，田畑晶子，西岡勉，木代穣：鋼床版デッキ貫通き裂損傷に関する報告，土木学会第 61 回年次学術講演会，I-546，pp.1089-1090，2006.
4) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82，2005.
5) Madanat, S., Bulusu, S. and Mahmoud A.: Estimation of infrastructure distress initiation and progression models, Journal of Infrastructure Systems, pp.146-150, 1995
6) Madanat, S.: Incorporating inspection decisions in pavement management, *Transportation Research, Part B*, Vol.27B, pp.425-438, 1993.
7) Madanat, S. and Ben-Akiva, M.: Optimal inspection and repair policies for infrastructure facilities, *Transportation Science*, Vol.28, pp.55-62, 1994.
8) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
9) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.
10) 青木一也，山本浩司，津田尚胤，小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集，No.798/VI-68，pp.125-136，2005.
11) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp.493-512，2008.
12) Nam, L. T.，貝戸清之，小林潔司，起塚亮輔：ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化，土木学会論文集 F4，Vol.68，No.2，pp.62-79，2012.7
13) 小林潔司，貝戸清之，江口利幸，大井明，起塚亮輔：舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D3，Vol.67，No.4，pp.422-440，2011.
14) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司，秀島栄三，山田洋太，平川恵士：判定基準変更を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデル，土木学会論文集 D3，Vol.71，No.2，pp.70-89，2015.
15) 小林潔司，貝戸清之，大井明，Thao, N. D.，北浦直樹：データ欠損を考慮した複合的隠れマルコフ舗装劣化モデルの推計，土木学会論文集 E1，Vol.71，No.2，pp.63-80，2015.
16) 田中尚，藤森裕二，貝戸清之，小林潔司，安野貴人：加速劣化ハザードモデル：コンクリート中性化予測への適用，土木学会論文集 D，Vol.66，No.3，pp.329-341，2010.
17) Shin, H. C. and Madanat, S.: Development of a stochastic model of pavement distress initiation, 2003
18) Nakat, Z. E. and Madanat, S.:Stochastic duration modeling of pavement overlay crack initiation, Journal of Infrastructure Systems, 2008
19) Reger, J., Christofa, E and Madanat, S.:Estimation of pavement crack initiation models by combining experimental and field data, Journal of Infrastructure Systems, 2013
20) 大倉一郎：鋼構造設計学の基礎，東洋書店，2004
21) 津田尚胤，貝戸清之，山本浩司，小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法，土木学会論文集 F，Vol.62，No.3，pp.473-491，2006.
22) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 A，Vol.63，No.2，pp.336-355，2007.
23) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計，土木学会論文集 D3，Vol.68，No.4，pp.255-271，2012.
24) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司：階層ベイズ法による補修効果の事後評価，土木学会論文集 F4，Vol.69，No.3，

pp.204-221，2013.
25) Dempster, A.P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.39, pp.1-38, 1977.
26) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.
27) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, in Bernardo, J. M., Berger, J. M., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M. (eds.): *Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.

(?. ?. ? 受付)

AN INITIATION AND PROPAGATION FORECASTING MODEL FOR FATIGUE CRACKS

Yohei NINOMIYA, Daijiro MIZUTANI, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI