

# 円周都市経済の分岐による集積特性の 都市数による変化

恩田 幹久<sup>1</sup>・高山 雄貴<sup>2</sup>・池田 清宏<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980 - 8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6 - 6)

E-mail: mikihisa.onda.p8@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 金沢大学 理工研究域准教授 (〒 920 - 1192 石川県金沢市角間町)

<sup>3</sup>フェロー会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980 - 8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6 - 6)

新経済地理学 (NEG) 分野で開発されたモデルを用いて、都市の人口集積特性が、2都市や円周都市経済という空間設定を中心として研究されている。円周都市経済では、人口が集積した都市間の「空間周期の倍化現象」により人口集積が進行することが明らかになっている。円周都市経済の研究は、このような理想的な集積挙動が発生することから、2のべき乗の都市数を中心に行われており、都市数が奇数になる場合の集積特性は殆ど知られていない。本研究では、奇数を含む一般の都市数に対する、NEGモデルの分岐理論を提案し、Forslid & Ottaviano と Pflüger の NEGモデルを用い、交通費用の低下に伴う、人口集積挙動を分岐理論と数値解析により調べた。一様分布状態から発生する分岐の種類がモデルの設定と都市数に依存し、その結果、集積挙動が変化することを明らかにした。

**Key Words:** *racetrack economy, new economic geography, spatial period doubling, bifurcation*

## 1. はじめに

経済のグローバル化や交通・情報網の整備に伴い、都市間の競争が激化しており、都市の人口増加や減少が注目を集めている。人口増を目指すべく、適切な都市振興政策を立案し、実行するためには、人口の集積の基礎メカニズムに関する理論的基盤が必要である。どのような大きさの都市がどのように分布するのかに関しては種々の研究がなされている。例えば、中心地理論<sup>1)</sup>では、正六角形上の都市分布が提案されているが、幾何学的分析にのみ立脚しており、経済メカニズムが取り込まれていないという批判がある<sup>2)</sup>。

都市の規模と輸送費の関係をミクロ経済学に基づいて説明し、社会基盤整備が国土・地域構造に与える影響を明らかにする研究が土木計画学分野でも蓄積されている<sup>3),4)</sup>。しかし、モデルの挙動に関する断片的な数値解析例しか示されておらず、集積の一般的な特性を明らかにするには至っていない。

都市・地域及び国際間における経済や人口の集積・分散のメカニズムを説明する、新経済地理学や空間経済学が近年注目を集めている。Krugman や Fujita 他<sup>5),6),7)</sup>は、Dixit & Stiglitz の独占的競争モデル<sup>8)</sup>を、空間経済の一般均衡モデルに拡張し、輸送費の変化による工業の集積現象を分析する、核周辺モデルを開発した。その後、新経済地理学 (NEG) 分野で種々のモデルが提案されており<sup>9),10),11)</sup>、本研究で都市集積モデルとして用

いる (3章) Forslid & Ottaviano モデル<sup>12)</sup> や Pflüger モデル<sup>13)</sup> もその一種である。この種のモデルは、都市間の輸送費用減少に伴う人口集積のミクロ経済学メカニズムを説明できる特徴があり、社会基盤整備の影響の予測・評価への応用が期待されている。NEGモデルは大胆な仮定を多く用いているが、集積に関して示唆に富む結果をもたらしている。

この種のモデルを用いるに際し、都市分布の適切な設定は重要である。例えば、アメリカ東部では、アパラチア山脈と大西洋にはさまれた帯状部に重要な都市が集まっている。また、日本の太平洋沿岸にも大きな都市が分布している。この種の都市分布のモデルとしては、線分上に等間隔または、一様に都市が分布する線分都市経済が挙げられる。線分都市経済では、都市の境界があるために、端部の都市が交通状況的に不利な状況にある。線分都市経済は、都市間の平等性がないために、モデル解析が非常に困難であり、研究の蓄積が比較的少ない。Fujita 他<sup>2)</sup>は、核周辺モデルと多産業の空間経済とを組み合わせることにより、連続的な線分都市経済<sup>1)</sup>の集積を調べ、mono-centerの周辺に都市が形成され、hierarchical systemが自己組織化するという、人口集積特性の一端を数値計算例に基づき、明らかにしている。

一方、本論文で集積挙動の空間モデルとしてとりあげる、円周都市経済は、円周上に等間隔または一様に都

<sup>1</sup> 原著では、「long narrow economy」と呼んでいる。

市を配置するというモデルであり、実空間の都市分布とは乖離している。しかし、全ての都市間で平等に競争が行われるという理想化された状況であるため、人口の集積分散の仕組みを理解しやすく、理論解析が容易であるという利点がある。そのため、2章にまとめるように、NEGモデルの集積分散挙動に関して数多くの研究の蓄積がある。池田他<sup>14)</sup>は、円周都市経済と線分都市経済の比較研究を行い、両経済の集積挙動に類似性が存在することを明らかにしている。このことは、円周都市経済の集積メカニズムを明らかにすることが、線分都市経済さらには、線分上の都市群の集積メカニズムを解明する上で重要であることを示唆するものである。

円周都市経済の一連の研究で行われている理論解析や数値解析は、4, 6, 8, 16, 64都市という2のべき乗の都市数が主に用いられている。その理由としては、理想的な集積挙動である空間周期倍化現象(4.(2)a)項参照)がこのような都市数で発生するために、解析的な取り扱いが容易であることが挙げられる。一方、Mossay & Picard は<sup>15)</sup>、一様分布からは、奇数個の均等に分布する都市しか存在しないという、都市数の設定に関する示唆に富む提案を行っている。

そこで、本稿では、Ikeda 他<sup>16),17)</sup>で都市数  $n = 2^k (k = 1, 2, \dots)$  に対して、断片的に用いられている分岐理論を、都市数に奇数を含む形で拡張し、円周都市経済の分岐メカニズムと分岐により生じる集積特性の全様を明らかにすることを目的とする。具体的な着眼点としては、下記の事項を取りあげる。

- 円周都市経済の分岐の都市数依存性を理論的に明らかにする。多段階の分岐や分岐解の安定性についても言及する。また、既往の研究<sup>16),17)</sup>が、偶数の都市数に対する、「周期倍化分岐」に注目しているのに対し、本研究では、奇数都市数に対する「擬似的周期倍化分岐」という現象に注目することに新規性がある。
- 交通費用の低下に伴い、一様分布から最初に発生する分岐の種類を特定する。Pflügerモデルに対しての都市数  $n = 2^k (n \geq 3)$  の場合には、周期倍化分岐が最初に発生することがわかっている<sup>21)</sup>。一方、Forslid & Ottavianoモデルでは、その様な考察はなされていない。そこで本論文では、数値解析により、調べることにする。
- PflügerモデルとForslid & Ottavianoモデルにおける、集積特性の差異について調べる。既往の研究では特定のモデルに注目する形で断片的な挙動しか分析しておらず、完全に現象を明らかにしているとはいえない。
- 一様分布から発生する分岐直後の安定性を決定す

る要因を明らかにする。2都市の場合には、Pflügerモデルでは、ピッチフォーク分岐、Forslid & Ottavianoモデルでは、トマホーク分岐をきっかけに、人口集積が起こることが知られている。この差異はモデル設定が、引き起こしていると考えられているが、一部の都市数の分析しか行われておらず、分岐直後の安定性を決定する理論的背景が明らかにされていない。そこで、分岐直後の安定性を理論的に分類し、経路追跡によりその妥当性を検証する。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章では、円周都市経済の主要な関連研究を紹介する。第3章では、本論文で用いる標準的な新経済地理学モデルであるForslid & OttavianoモデルとPflügerモデルを導入する。第4章では、Ikeda 他<sup>16)</sup>による階層的な分岐理論の拡張を行う。第5章では、本研究で用いるdynamicsの特徴と6章以降の数値計算の方法について述べる。第6章では、一様分布から最初に発生する分岐を数値固有値解析を用いて調べる。第7章では、数値計算による解曲線を示し、集積挙動について言及する。

## 2. 関連する研究

円周都市経済に関して、数多くの研究がなされている。Krugman<sup>6)</sup>は、12都市に対する数値解析により、集積パターンを観察している。Fujita 他<sup>7)</sup>は、線形化固有値解析により、人口分布の種々の空間周期の発現を調べている。Mossay<sup>18)</sup>やPicard & Tabuchi<sup>19)</sup>は、連続一様分布から離散的な集積の発現を示している。

円周都市経済において、どのような集積パターンが発現するかということが、近年議論されるようになっており、人口が集積する都市と分散する都市が互いに発現する「空間周期倍化分岐(period doubling bifurcation)」と、この分岐が繰り返し起こる「空間周期倍化分岐カスケード(period doubling bifurcation cascade)」の存在が明らかにされてきている。Tabuchi & Thisse<sup>20)</sup>は、輸送費の低下とともに、人口集積の周期倍化分岐が存在しうことを示し、さらに、複数の産業がある場合に階層構造が創発することを計算例で示している。Akamatsu 他<sup>21)</sup>は、空間割引行列と離散フーリエ変換を用いる集積経済の解析手法を提案し、Pflügerモデルに対し、一様分布から周期倍化分岐をひき起こす交通費用の値を与える公式を求めている。Ikeda 他<sup>16)</sup>は、群論的分岐理論と数値解析を用いて、周期倍加分岐のメカニズムを明らかにしている。Akamatsu 他<sup>22)</sup>はForslid & OttavianoモデルとHelpmanモデルの4都市の円周都市経済の挙動を比較することにより、モデル特有の集積挙動を明らかにしている。

### 3. 都市集積モデルと支配方程式

本章では、短期均衡を記述する Forslid & Ottaviano (FO) モデル<sup>12)</sup> や Pflüger (Pf) モデル<sup>13)</sup> と同一の仮定に基づく多都市モデルと長期均衡を記述する replicator dynamics を導入する。

#### (1) 一般的な枠組み

労働者を、その生産能力に応じて、skilled worker(生産能力の高い労働者)と unskilled worker(生産能力の低い労働者)に分類する。skilled worker は立地点間をより効用の高いほうへ自由に移動することができ、都市  $i$  における数を  $\lambda_i$  とする。総数は、 $H$  であり、不変とする。すなわち、以下の人口の保存則が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = H \quad (1)$$

unskilled worker は都市間を移動せず、それぞれの立地点に均等に分布すると仮定する。各都市に 1 単位だけ存在するように人口の単位を定義し、その総数は  $1 \times n$  であるため、都市  $i$  の総人口は  $\lambda_i + 1$  となる。これ以降「skilled worker の人口」を「人口」と適宜略して呼ぶこととする。

離散的な  $n$  個の都市  $i = 0, 1, \dots, n-1$  が存在する円周都市経済を考える。経済は、農業と工業の 2 部門からなり、農業部門は収穫一定の技術により、unskilled worker の労働を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する完全競争的な部門である。工業部門は、収穫逡増の技術により、skilled worker と unskilled worker の労働を生産要素として、差別化された財を生産する独占競争的な部門である。「農業」「工業」という言葉を必ずしも文字通りに解釈する必要はない。この部門を定義する特徴としては、収穫一定の技術を持つ完全競争的部門と収穫逡増の技術をもつ不完全競争的な工業部門に意味がある。

#### (2) 消費者行動

各モデルの都市  $i$  の消費者は直接効用関数  $U_i(C_i^M, C_i^A)$  を所得制約  $Y_i$  の下で最大化するように、工業財と農業財の消費量、 $C_i^M, C_i^A$  を次式に基づき決定する。

$$\min_{C_i^M, C_i^A} U_i(C_i^M, C_i^A) \quad (2)$$

$$s. t. Y_i = p_i^A C_i^A + \sum_j \int_{k \in N_j} p_{ij}(k) q_{ij}(k) dk \quad (3)$$

$$[\text{FO モデル}]: U_i = \mu \ln C_i^M + (1 - \mu) \ln C_i^A$$

$$[\text{Pf モデル}]: U_i = \mu \ln C_i^M + C_i^A$$

ここで、 $\mu \in (0, 1)$  は工業財への支出割合を表す定数、 $p_i^A = 1$  は都市  $i$  における農業財の価格である。 $k$  は、工業財の種類を表すインデックスであり、常に工業財の

種類が連続的活無限に存在するとし、連続変数と仮定する。 $p_{ij}(k), q_{ij}(k)$  は、都市  $j$  で生産され、都市  $i$  で消費される工業財の種類毎の価格、消費量を表す。 $N_j$  は都市  $j$  で生産された工業財の種類  $k$  を要素に持つ集合である。また、工業財の消費量  $C_i^M$  は、工業財の消費量  $q_{ij}(k)$  を代替の弾力性  $\sigma > 1$  を用いて集計した

$$C_i^M = \left( \sum_j \int_{k \in N_j} q_{ij}(k)^{(\sigma-1)/\sigma} dk \right)^{\sigma/(\sigma-1)} \quad (4)$$

によって定義される。

上記の効用最大化問題を解くことにより、農業財工業財の消費量が価格  $p_i^A, p_{ij}(k)$ 、所得  $Y_i$  の関数として、次のように誘導される。

[FO モデル]:

$$\begin{aligned} C_i^A &= [(1 - \mu)/p_i^A] Y_i & C_i^M &= (\mu/\rho_i) Y_i \\ q_{ij}(k) &= s_{ij}(k) Y_i \end{aligned} \quad (5)$$

[Pf モデル]:

$$\begin{aligned} C_i^A &= Y_i/p_i^A - \mu & C_i^M &= \mu p_i^A/\rho_i \\ q_{ij}(k) &= s_{ij}(k) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで  $s_{ij}(k)$  は、

$$s_{ij} \equiv \mu p_i^A \{p_{ij}(k)\}^{-\sigma} \rho_i^{\sigma-1} \quad (7)$$

であり、 $\rho_i$  は、都市  $i$  での工業の価格指数

$$\rho_i = \left( \sum_j \int_{k \in N_j} p_{ij}(k)^{1-\sigma} dk \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (8)$$

である。導出した工業財の消費量は所得  $Y_i$  の消費者が消費する量である。そのため都市  $i$  全体で消費する都市  $j$  で生産された工業財  $k$  の消費量  $Q_{ij}(k)$  は、skilled worker の各都市の人口を  $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$ 、都市  $i$  における skilled worker の賃金を  $w_i$  とし、unskilled worker の賃金を  $w_i^L$  とすると、

$$[\text{FO モデル}]: Q_{ij}(k) = s_{ij}(k)(w_i \lambda_i + w_i^L) \quad (9)$$

$$[\text{Pf モデル}]: Q_{ij}(k) = s_{ij}(k)(\lambda_i + w_i^L) \quad (10)$$

#### (3) 輸送

農業財は都市間を無料で輸送され、工業財の輸送は氷塊輸送の形をとると仮定する。1 単位の工業財を都市  $i$  から都市  $j \neq i$  に輸送すると、その一部分  $1/\phi_{ij} < 1$  だけが実際に到達し、残りは解けてしまうと考え。そのため、工業財の都市  $i$  での供給量  $x_i(k)$  は、

$$x_i(k) = \sum_j \phi_{ij} Q_{ij}(k) \quad (11)$$

により与えられる。具体的には、都市  $i$  と都市  $j$  間の輸送費  $\sigma_{ij}$  は、次式で与えられる。

$$\phi_{ij} = \exp(\tau D_{ij}) \quad (12)$$

ここで、 $\tau$  は輸送費パラメータであり、 $D_{ij}$  は都市  $i$  と都市  $j$  間の最短距離を表す。



**(4) 生産者行動**

農業部門は完全競争的であり、同一の財を生産し、収穫不変の技術に従うので、1 単位の unskilled worker により、1 単位の財が生産されると基準化できる。限界費用原理と農業財の輸送費がかからないことから、unskilled worker の賃金  $w_i$   $L$  は全ての都市において、農業財の価格に等しく、 $p_i^A = w_i^L = 1 (i = 1, \dots, n)$  が成り立つ。

工業部門では、企業は Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う。自由に参入撤退できると仮定した企業が、収穫逓増の技術により差別化された工業財を生産する。規模の経済、消費者の多様性の選好、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、どの企業も必ず他の企業とは異なる種類の財を生産する。そのため、企業数  $n_i$  は供給される財の数と等しくなる。また企業は工業財を生産するために skilled worker の労働  $\alpha$  単位と、生産量  $x_i(k)$  に比例した unskilled worker の労働を  $\beta x_i(k)$  単位を生産要素として投入すると仮定する。このことから都市  $i$  における企業数  $n_i$  と居住する skilled worker は、 $n_i = \lambda_i / \alpha$  という関係を持つ。このことから工業財の生産費用関数  $c(x_i(k))$  は、次式ようになる。

$$c(x_i(k)) = \alpha w_i + \beta x_i(k) \quad (13)$$

企業は価格指数  $\rho_i$ 、消費者の需要関数 (9), (10) を所与として企業は利潤を最大化する工業財の価格  $p_{ji}(k)$  を設定する。そのため企業の利潤最大化行動は次のように定式化できる。

$$\max_{p_{ji}(k)} \sum_j p_{ji}(k) Q_{ji}(k) - c(x_i(k)) \quad (14)$$

この企業の最適条件と工業財の需要関数 (9), (10) より、工業財の価格  $p_{ji}(k)$  が次のように導出される。

$$p_{ji}(k) = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \phi_{ji} \quad (15)$$

このように工業財の価格は、財の種類  $k$  には依存しない。そのため、 $Q_{ij}(k)$ ,  $x_i(k)$  も同様に、財の種類  $k$  には依存しない。そこで以降は  $p_{ji}$ ,  $Q_{ij}(k)$ ,  $x_i(k)$  と省略する。この財の価格を価格指数 (8) に代入すると

$$\rho_i(k) = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_j d_{ij} \lambda_j \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (16)$$

と求められ、 $d_{ij} = \phi_{ij}^{1-\sigma}$  は交易に関する条件を表す。

**(5) 短期市場均衡**

財の生産消費量と賃金、財の価格は、skilled worker が移住できないほど、短期間で均衡すると仮定する。この状態を”短期均衡状態”と呼ぶ。短期均衡状態では、企業の参入撤退が自由であることから、企業の利潤は常にゼロとなる。したがって skilled worker の賃金は以下のように求められる。

$$w_i(\lambda, \tau) = \frac{1}{\alpha} \left( \sum_j p_{ji} Q_{ji}(\lambda, \tau) - \beta x_i(\lambda, \tau) \right) \quad (17)$$

(17) に (9), (10), (11), (15) を代入することにより、市場均衡賃金が以下のように求められる。

[FO モデル]:

$$w_i(\lambda, \tau) = \frac{\mu}{\sigma} \sum_j \frac{d_{ji}}{\Delta_j(\lambda, \tau)} [w_j(\lambda, \tau) \lambda_j + 1] \quad (18)$$

[Pf モデル]:

$$w_i(\lambda, \tau) = \frac{\mu}{\sigma} \sum_j \frac{d_{ji}}{\Delta_j(\lambda, \tau)} (\lambda_j + 1) \quad (19)$$

ここで、 $\Delta_i(\lambda)$  は、都市  $i$  の工業市場の大きさを表す市場であり、 $d_{ji}/\Delta_j(\lambda)$  は都市  $i$  の企業が都市  $j$  で獲得できる工業財のシェアの大きさを表す指標と考えられる。さらに (9), (10), (16), (18), (19) を (5), (6) に代入し、 $S_i(\lambda, \tau) = (\sigma - 1)^{-1} \ln \Delta_i(\lambda, \tau)$  とおくことにより間接効用関数  $v_i(\lambda, \tau)$  が以下のように求められる。

[FO モデル]:

$$v_i(\lambda, \tau) = \mu S_i(\lambda, \tau) + \ln[w^{(H)}(\lambda) + w^{(L)}(\lambda)] \quad (20)$$

[Pf モデル]:

$$v_i(\lambda, \tau) = S_i(\lambda, \tau) + \sigma^{-1} [w^{(H)}(\lambda) + w^{(L)}(\lambda)] \quad (21)$$

式中、結果に影響を与えない定数項は無視している。

**(6) skilled worker の都市選択行動と空間均衡**

長期的には、skilled worker は、自らの得る効用を最大化するように労働居住する都市を選択することができる。この skilled worker の都市選択行動および移住行動が長期的に落ち着く状態を長期均衡状態と呼ぶ。長期均衡を定義するにあたり、skilled worker の移住ダイナミクスを考える。本研究ではこの調整ダイナミクスとして、一般的な Core-Periphery モデルで用いられる、replicator dynamics を採用する。

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = F(\lambda, \tau) \equiv \text{diag}[\lambda] (v(\lambda, \tau) - \bar{v}(\lambda, \tau) \mathbf{1}) \quad (22)$$

$$\bar{v}(\lambda, \tau) \equiv H^{-1} \lambda^T v(\lambda, \tau) \quad (23)$$

この調整ダイナミクス (22) より、長期均衡状態を定義する。長期均衡状態  $\lambda^*$  は、調整ダイナミクスの定常状態とする。すなわち、次式を満たす人口分布  $\lambda^*$  が長期均衡状態である。

$$F(\lambda^*, \tau) = \mathbf{0} \quad (24)$$

このモデルでは人口の保存則 (1) が自動的に満たされている。この都市の各都市の人口シェアと輸送費パラメータを未知変数とする非線形方程式で記述され、この非線形方程式を解くことで、輸送費の変化に対する各都市の人口の集積分散の過程を調べることが可能となる。この非線形方程式の解は、5.(3) 節で簡単に紹介する、計算分岐理論<sup>23)</sup> により求める。

#### 4. 円周都市経済の分岐メカニズム

円周都市経済の集積挙動において、その対称性と分岐は重要な位置をしめる。対称性を持つ系は、対称性破壊分岐による形態変化やパターン形成のメカニズムを持つ<sup>24),25)</sup>。この種の分岐の仕組みは、群論的分岐理論により体系化に記述されており、「対称性を持つ系は、分岐を起こさずに対称性を失うことはない」などの重要な帰結が導かれている。

円周都市経済のように、二面体群  $D_n$  の対称性を持つ系の可能な分岐は、分岐理論により調べられている<sup>24),25)</sup>。NEG モデルの円周都市経済上の集積挙動に対する近年の研究<sup>16),20),21)</sup>により、どのような分岐解が発現しやすいかが明らかにされてきており、「空間周期倍化分岐カスケード」による集積のメカニズムが注目を集めている。しかし、これらの研究は、都市数  $n = 2^k (k = 1, 2, \dots)$  に限定する形で行われている。そこで、ここでは、任意の都市数  $n$  に対する分岐の仕組みを、群論的分岐理論<sup>24)</sup> にもとづき、調べることにする。

##### (1) 二面体群 $D_n$

$n$  都市からなる円周都市経済とその一様分布の対称性は、下記の二面体群  $D_n$  により表される。

$$D_n = \{(r_n)^i, s(r_n)^i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} \\ = \{e, r_n, \dots, (r_n)^{n-1}, s, sr_n, \dots, s(r_n)^{n-1}\} \quad (25)$$

ここで、 $e$  は恒等変換を、 $s$  は 3 次元座標系において  $yz$  平面に関する鏡映変換を、 $(r_n)^j$  は  $z$  軸に関する反時計回りの  $2j\pi/n (j = 1, \dots, n-1)$  の回転変換を表す。

##### (2) 一様分布からの分岐:対称性破壊分岐

$D_n$  不変な一様分布上の特異点における Jacobi 行列  $J$  は、ある座標変換行列  $H$  により対角化され、

$$H^T J H = \begin{cases} \text{diag}(g^{(+)}, g^{(-)}, g^{(1)}, g^{(1)}, \dots, g^{(j_{\max})}, g^{(j_{\max})}) & n = \text{even} \\ \text{diag}(g^{(+)}, g^{(1)}, g^{(1)}, \dots, g^{(j_{\max})}, g^{(j_{\max})}) & n = \text{odd} \end{cases} \quad (26)$$

となる。ここで、

$$j_{\max} = \lfloor (n-1)/2 \rfloor, \quad n \geq 3 \quad (27)$$

であり、 $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  の値を超えない最大の整数を表す。周波数の比  $n/j_{\max}$  は、

$$\begin{cases} 2 < n/j_{\max} \leq 3 & n \neq 4 \\ n/j_{\max} = 4 & n = 4 \end{cases} \quad (28)$$

を満たす。そして、座標変換行列  $H$  は、

$$H = \begin{cases} (\eta^{(+)}, \eta^{(-)}) & \text{for } n = 2 \\ (\eta^{(+)}, \eta^{(1),1}, \eta^{(1),2}, \dots, \eta^{(j_{\max}),1}, \eta^{(j_{\max}),2}) & \text{for } n \geq 3 \text{ and odd} \\ (\eta^{(+)}, \eta^{(-)}, \eta^{(1),1}, \eta^{(1),2}, \dots, \eta^{(j_{\max}),1}, \eta^{(j_{\max}),2}) & \text{for } n \geq 4 \text{ and even} \end{cases} \quad (29)$$

により与えられる。座標変換行列  $H$  の列ベクトルは、離散 Fourier 級数により、

$$\eta^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \cos \pi \cdot 0 \\ \vdots \\ \cos(\pi(n-1)) \end{pmatrix}, \\ \eta^{(j),1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{pmatrix} \cos(2\pi j \cdot 0/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi j(n-1)/n) \end{pmatrix}, \\ \eta^{(j),2} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{pmatrix} \sin(2\pi j \cdot 0/n) \\ \vdots \\ \sin(2\pi j(n-1)/n) \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, j_{\max}) \quad (30)$$

と与えられ、各列ベクトルは、Jacobi 行列  $J$  の固有ベクトルに対応する。 $\eta^{(+)}$  は最大の周波数  $n$  を持ち、 $\eta^{(-)}$  は次に大きな周波数  $n/2$  を持つ。 $\eta^{(j),i} (i = 1, 2)$  は周波数  $j$  を持ち、その最大値は、 $j_{\max}$  である。

調整ダイナミクスの Jacobi 行列  $J$  のある固有値が、輸送費用  $\tau$  の低下により、0 になるとき特異点が発生する。一様分布上の特異点は、式 (26) から、分かる様に、

$$\begin{cases} \tau \text{の極大・極小点: } g^{(+)} = 0 \\ \text{単純分岐点: } g^{(-)} = 0 \quad (n = \text{even}) \\ \text{2重分岐点: } g^{(j)} = 0 \end{cases}$$

と分類される。

##### a) 単純分岐：空間周期倍化

都市数  $n$  が偶数の場合に存在する、 $g^{(-)} = 0$  に対応する単純分岐点では、空間周期倍化が発生する。人口が集積する都市と減少する都市が互い違いに発生し、

$$D_n \rightarrow D_{n/2}$$

という対称性の低下が起こる。これにより空間周期が、

$$T_n = 2\pi/n \rightarrow T_{n/2} = 4\pi/n$$

と 2 倍化する。都市数が  $n = 2^k (k = 1, 2, \dots)$  の場合には、輸送費  $\tau$  の低下に伴い、

$$D_n \rightarrow D_{n/2} \rightarrow \dots \rightarrow D_2 \rightarrow D_1$$

という階層的分岐により、

$$T_n = 2\pi/n \rightarrow 4\pi/n \rightarrow \dots \rightarrow \pi \rightarrow 2\pi$$

と空間周期倍化が繰り返し起こる「空間周期倍化分岐カスケード」が発現するメカニズムが存在する<sup>16),21)</sup>.

**b) 2重分岐:擬似的空間周期倍化と空間周期3倍化**

$g^{(j)} = 0$  に対応する 2重分岐では,

$$D_n \rightarrow D_{n/\hat{n}}$$

という対称性低下が起きる. ここで,

$$\hat{n} = n/\text{gcd}(n, j) \geq 3$$

であり,  $\text{gcd}(n, j)$  は空間周波数  $j$  と都市数  $n$  の最大公倍数を表す. この時, 空間周期が  $\hat{n}$  倍化する.

$\hat{n} = 3$  に対応する空間周期 3 倍化分岐は, 都市数  $n$  が 3 の倍数の場合に発生する. この分岐では,

$$D_n \rightarrow D_{n/3}$$

と対称性が低下し, それに伴い

$$T_n = 2\pi/n \rightarrow T_{n/3} = 6\pi/n$$

と「空間周期 3 倍化」が発現する. 都市数が  $n = 3^k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) の場合には, 空間周期倍化分岐カスケードと同様に, 繰り返し発生するメカニズムが存在する.

$j_{\max}$  は, 式 (27) で与えられるように, 空間周期倍化の波数  $j = n/2$  ( $n = \text{odd}$  の場合には, 存在しない) に最も近い波数である. この波数  $j = j_{\max}$  に対応した分岐による周期倍化に類似した集積挙動を「擬似的空間周期倍化」と呼ぶ. この分岐では,

$$D_n \rightarrow D_{\text{gcd}(n, j_{\max})} = \begin{cases} D_1 & n = \text{odd} \\ D_1 \text{ or } D_2 & n = \text{even} \end{cases} \quad (31)$$

という対称性の低下が起こる. この証明を, 以下に示す.

**証明** 擬似的空間周期倍化分岐後の分岐解の対称性は,  $n$  が偶数のときは  $D_{\text{gcd}(n, n/2-1)}$  ( $n \geq 4$ ) である.  $\text{gcd}(n, n/2-1) = p$  ( $p$  は正の整数) とおくと,

$$n = pk, \quad \frac{n}{2} - 1 = pm,$$

ここで,  $k, m$  は, 互いに素な正の整数で, この式から  $p(k-2m) = 2$  となり,  $p = 1$  または, 2 であり, 分岐解は,  $D_1$  または,  $D_2$  不変である. 一方,  $n$  が奇数のときには,  $D_{\text{gcd}(n, (n-1)/2)}$  ( $n \geq 5$ ) である.  $\text{gcd}(n, (n-1)/2) = p$  とおくと,

$$n = pk, \quad \frac{n-1}{2} = pm$$

より,  $p(2k-m) = 1$  となり,  $p = 1$  となる.

式 (31) の右辺の  $D_1, D_2$  不変な系では, 2重分岐が存在せず, 擬似的空間周期倍化を起こさないことより, 以下の定理が成り立つ.

**定理 1** 擬似的空間周期倍化の発生は一度のみである.

ちなみに, 数値解析により調べる実挙動において (6 章参照),  $g^{(j)} = 0$  に対応する 2重分岐の内, 交通費用の低下に伴い最初に起きるのは,  $\hat{n} = 3$  と  $j_{\max}$  に対応する分岐であり, 実挙動の理解において重要である.

Ikeda 他<sup>16)</sup> では, 取り扱われていない, これらの分岐を取り扱うことが本論文の新規性である.

**(3) 多段階の分岐**

$D_n$  不変系の分岐の仕組みは, 図-1 に示す様に都市数  $n$  の変化に対して大変敏感である. 図中, 太矢印が 2重分岐を, 細矢印が単純分岐を表す.  $n = 12$  のように約数が多い都市数  $n$  では, 分岐パターンが多く発生し, 対称性が段階的に低下する. 一方  $n = 3, 5, 7$  のように  $n$  が素数の場合には, 一回の分岐で  $D_n$  から  $D_1$  に対称性が低下する. この様には,  $n = 2^k$  に対する分析だけでは, 一般の都市数  $n$  に対する分岐の全様を知ることが出来ない.

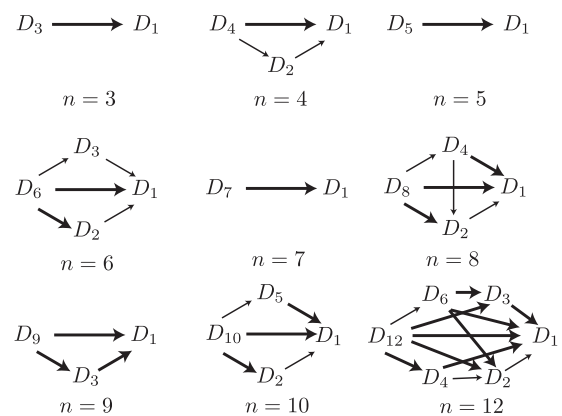


図-1:  $D_n$  の分岐の仕組み ( $C_n$  不変な解への分岐は, NEG モデルの実挙動において重要な位置を占めないの で省略する)

**(4) 安定性**

集積挙動の経路追跡における情報の一つである分岐直後の安定性についてまとめる. 安定な一様分布状態からの分岐直後の安定性は分岐の種類により, 以下のように分類される (文献<sup>24)</sup> の p.223 参照). ただし, 2重分岐により, 異なる経路が 2 本発生することには, 注意する必要がある.

単純分岐 (空間周期倍化) の分岐経路の安定性は, 以下のように分類される.

- supercritical 型: 安定
- subcritical 型: 不安定

**2重分岐 ( $\hat{n} = 3$ , 空間周期 3 倍化)** の場合, 1 本の分岐経路は supercritical 型, 1 本は subcritical 型であり, 分岐経路は, 常に不安定である. ちなみに supercritical 型分岐は, 経済学分野ではピッチフォーク分岐と, subcritical 型分岐は, トマホーク分岐とそれぞれ呼ばれている.

**2重分岐 ( $\hat{n} \geq 5$ , 擬似的空間周期倍化)** の場合, 2 本

の分岐経路の安定性は、以下のように分類される。

- supercritical 型： 1 本は安定，1 本は不安定
- subcritical 型： 2 本とも不安定

2 重分岐 ( $\hat{n} = 4$ ) の場合，2 本の分岐経路の安定性は，以下のように分類される。

- supercritical 型： 1 本は安定，1 本は不安定
- subcritical 型： 2 本とも不安定
- 混合型： 2 本とも不安定

### 5. replicator dynamics 特有の分岐挙動とその分岐解析法

本研究で用いる replicator dynamics 特有の分岐挙動と，次章以降で用いる数値解析手法を紹介する。

#### (1) 端点解への分岐：対称性保存

式 (22) の右辺が  $(v_i - \bar{v})\lambda_i$  と因数分解されている影響により，2 つの平衡経路の交差点に transcritical 型分岐が生じる<sup>17)</sup>。この分岐による釣合い経路の性状を図-2 に示す。実線が安定解，点線が不安定解，● は transcritical 型分岐を表す。transcritical 型分岐において， $\lambda_i = 0$  と  $v_i - \bar{v} = 0$  の経路が交差しており，分岐点を境に  $\lambda_i$  もしくは  $v_i - \bar{v}$  の符号が変わり，安定性が変化する。この時，対称性が崩れることなく経路が切り替わる。このような分岐を，4.(2) 節で紹介した対称性破壊分岐に対して，対称性保存分岐と呼ぶ。

#### (2) 自明解の存在

均衡解には，

- 自明解： 輸送費用の変化に対して不変な解  $(\lambda, \tau)$
- 非自明解： 輸送費用の変化に対して変化する解  $(\lambda, \tau)$

の 2 種類がある。自明解は，後述する数値解析による分岐解の追跡において，起点となる重要な解である。円周都市経済の replicator dynamics を用いる NEG モデルには，自明解が存在し，自明解について，下記の定理が成り立つ。

**定理 2** 人口が  $1/m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) となる都市が  $m$  個存在し，その他の都市の人口が 0 となる解  $\lambda^*$  を考える。人口が存在する全都市の交易条件が同一である場合，この解  $\lambda^*$  は自明解である。

**証明** 人口が存在する都市を  $i^* = 1, \dots, m$  と，人口が 0 である都市を  $i^* = m + 1, \dots, n$  と番号付ける。このとき，人口が存在する都市では，交易条件が同一であることから， $v_{i^*} = \bar{v}$  ( $i^* = 1, \dots, m$ ) が成り立ち，その他の都市の人口が 0 となることから， $\lambda_{i^*} = 0$  ( $i^* = m + 1, \dots, n$ ) が成り立つ。このとき，長期均衡状態の式 (24) が，輸送費パラメー

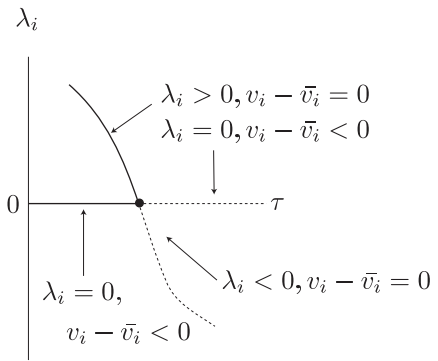


図-2: transcritical 型分岐挙動の模式図

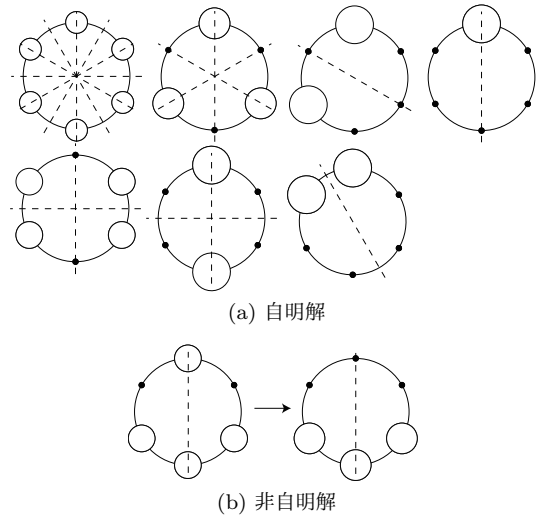


図-3: 都市数  $n = 6$  の自明解と非自明解

タ  $\tau$  の値によらず成り立つので， $(\lambda^*, \tau)$  が自明解であることが分かる。

この定理 2 は，本論文が新規に提案するものである (Ikeda・Murota<sup>17)</sup> は，3.2.3 項で自明解について言及しているが，この定理 2 には至っていない)。この定理 2 により求めた 6 都市の場合の自明解を図-3(a) に示す。一方，図-3(b) に示す様な，人口が残った都市の交易条件が異なる  $(\lambda)$  は，自明解ではなく，均衡解であるかすら不明である。交易条件が同一であることは，直観的には，幾何学的に対称な位置にあることを意味する。

#### (3) 経路追跡

円周都市経済の釣り合い解を網羅的に求める手法として，計算分岐理論<sup>23)</sup> による経路追跡が提案されている。非自明解の経路追跡は，非常に複雑である。これに対し，自明解の解析は，遥かに簡単であり，非自明解の経路を求める起点として大変重要である。また，安定な集積の進行についても，重要な情報を与える。

経路追跡の手順は以下の通りである。

- Step1 5.(2) 節で紹介した自明解を得る。
- Step2 自明解 (一様分布も含む) における Jacobi 行列  $J$  の固有値解析により，分岐点  $(\lambda, \tau)$  と  $J(\lambda, \tau)\eta = 0$  となる固有ベクトル  $\eta$  を得る。さらに，自明解を



安定解と不安定解に分類する。

- Step3 計算分岐理論<sup>23)</sup>における経路切り替え手法により、全ての自明解からの分岐経路を得るとともに均衡解の安定性を調べる。
- Step4 Step2 と Step3 を繰り返し、全ての均衡経路を得る
- Step5 輸送費用  $\tau$  を減少させた時、安定解となる均衡解の経路を選択する。

## 6. 一様分布から最初に発生する分岐

4.(2) 節で示したように、一様に人口が分布する状態からの分岐の種類は複数存在する。この中で最も重要な分岐は、最初に発生する分岐である。高山・赤松<sup>26)</sup>は、social interaction モデルに対して、一様分布状態から最初に発生する分岐の種類が、パラメータの値の設定に依存し、変化することを明らかにしているが、6都市の場合しか調べていない。これに対し、本稿では、種々の都市数に対し、一様分布状態から

- 空間周期倍化分岐
- 空間周期 3 倍化分岐
- 擬似的空間倍化分岐

の内、どの分岐が最初に発生しやすいかを、5.(3) 節で紹介した、一様分布上に対する数値固有値解析を用いて調べる。対象とする都市数は、以下の通りである。

- 空間周期倍化と空間周期 3 倍化が発生する 6 都市
- 空間周期倍化と擬似的空間周期倍化が発生する 8 都市と 10 都市
- 擬似的空間周期倍化と空間周期 3 倍化が発生する 9 都市
- 3つの現象が発生する 12 都市

2章で紹介した FO モデルと Pf モデルを用い、円周上に等間隔に配置した  $n$  都市の間を円弧状の道で結ぶこととする。本研究では、skilled worker の総人口は、 $H = 1$  とし、モデルのパラメータの値は  $(\mu, \sigma) = (0.4, 10.0)$  を基準値とする。ここで、 $\mu$  は工業財への支出割合を示し、 $\sigma$  は工業材の代替の弾力性を表す。

### (1) $\mu$ の値の影響

パラメータ  $\mu$  の値が大きいと、規模の経済性を持つ工業製品割合が増加するため、集積力が増加する。 $\sigma = 10$  に固定し、 $\mu = 0.1, \dots, 0.9$  の場合の固有値解析を行った。パラメータ  $\mu$  の影響による、一様分布上の分岐の発生順序の変化を Pf モデルと FO モデルに対し、図-4 と図-5 に示す。横軸はパラメータ  $\mu$ 、縦軸は輸送費用  $\tau$  を表す。空間周期  $T$  が小さい分岐から順に黒、赤、青、緑、橙の曲線を用いて表す。

Pf モデルの都市数  $n = 6$  に対する分岐点における輸送費用の値は、図-4(a) に示すように、上から黒線で示

す空間周期倍化、赤線で示す空間周期 3 倍化 ( $\hat{n} = 3, j = j_{\max} = 2$ )、青線で示す低周波分岐 ( $j = 1$ ) という順番になっており  $\mu$  の値の影響を殆ど受けていない。同様に、他の都市数に対しても Pf モデルにおいては、 $\mu$  の影響を全く受けず、空間周期倍化分岐が最初に発生していることが分かる。これは、Pf モデルが効用関数に準線形効用関数を用いていることによるものである。

一方、FO モデルでは、6, 10 都市の場合、パラメータ  $\mu$  の値の変化に伴い、最初に発生する分岐の種類が変化している。6 都市の場合には、最初に発生する分岐は、 $\mu < 0.7$  の範囲で、空間周期 3 倍化 ( $\hat{n} = 3, j = 2$ )、 $\mu > 0.7$  で空間周期倍化である。10 都市の場合には、 $\mu = 0.5$  において同様な変化が起きている、また、8 都市の場合には、空間周期倍化と擬似的空間周期倍化 ( $j = j_{\max} = 3$ ) が発生するが、常に空間周期倍化分岐が最初に発生している。同様に、9 都市の場合には、擬似的空間周期倍化 ( $j = j_{\max} = 4$ ) と空間周期 3 倍化 ( $\hat{n} = 3, j = 3$ ) が発生するが、常に擬似的空間周期倍化が最初に発生している。

この様に、 $\mu$  が小さく、分散力が卓越する場合には、分岐の発生順序と空間周期の順序が逆転する場合が見られた。また、最初に発生する分岐以外の分岐においても、分岐の発生順序の逆転が見られる。

### (2) $\sigma$ の値の影響

もう一つのパラメータ  $\sigma$  は、工業製品の多様性を考える度合いを表し、 $\sigma$  の値が大きいくほど差別化された財は、農業品とほぼ完全な代替財となる。 $\sigma$  の値が小さいほど、多様な工業製品を消費する要求が強まるので、集積力が大きくなる。 $\mu = 0.4$  は共通として、 $\sigma > 1$  であることから  $\sigma = 2, 3, \dots, 15$  と変え、 $\sigma$  の値の影響を調べることにする。各都市数に対する  $\sigma$  の値による一様分布上の分岐点における  $\tau$  の値の変化を図-6 と図-7 に示す。この結果、FO モデルにおいては、 $n = 6, 10$  都市において分岐の発生順序が逆転するというパラメータ  $\mu$  の場合と同様の傾向があることが判明した。Pf モデルの場合には、6, 10 都市において、今回調べた範囲で逆転は発生しなかった。Pf モデルの分岐の発生順序は、パラメータ  $\sigma$  の影響を受けにくいことが分かる。

### (3) 考察

パラメータ  $\mu, \sigma$  の変化に伴い、最初に発生する分岐の種類がどう変化するかを調べた。Pf モデルでは、都市数が  $n = 2^k (n = 4, 8)$  の場合、最初に「周期倍化分岐」が発生することは、Akamatsu 他<sup>21)</sup> の理論予測と整合している。本結果は、より一般的な  $n$  (全ての偶数) に対する、この理論の拡張可能性を示している。一方、FO モデルでは、 $n = 2^k (n = 4, 8)$  の場合には、Pf



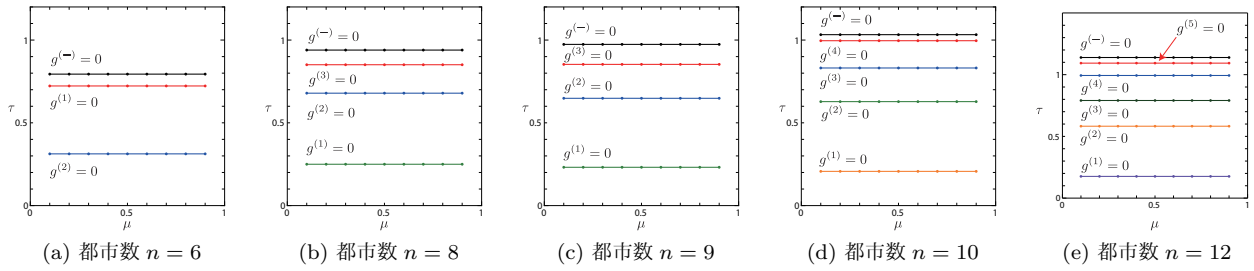


図-4: パラメータ  $\mu$  の影響 (Pf モデル)

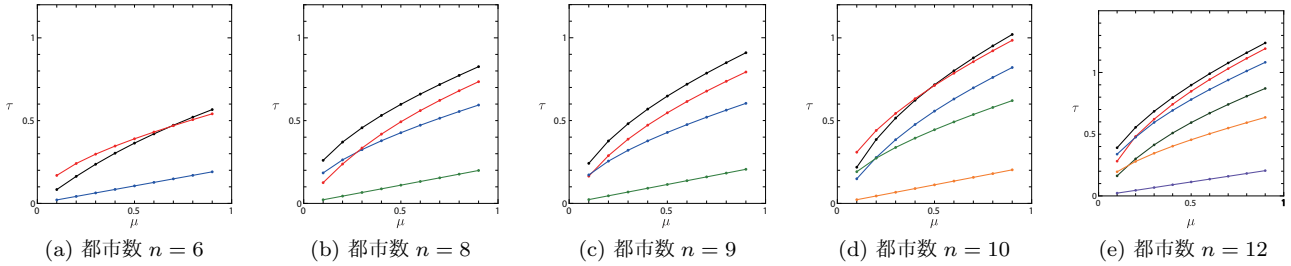


図-5: パラメータ  $\mu$  の影響 (FO モデル)

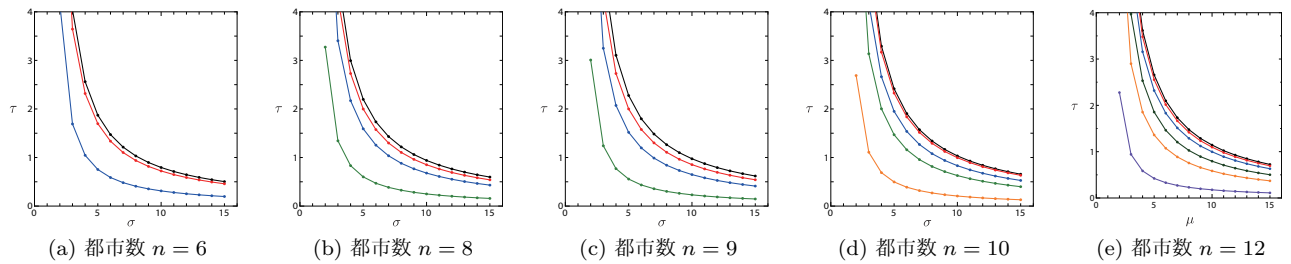


図-6: パラメータ  $\sigma$  の影響 (Pf モデル)

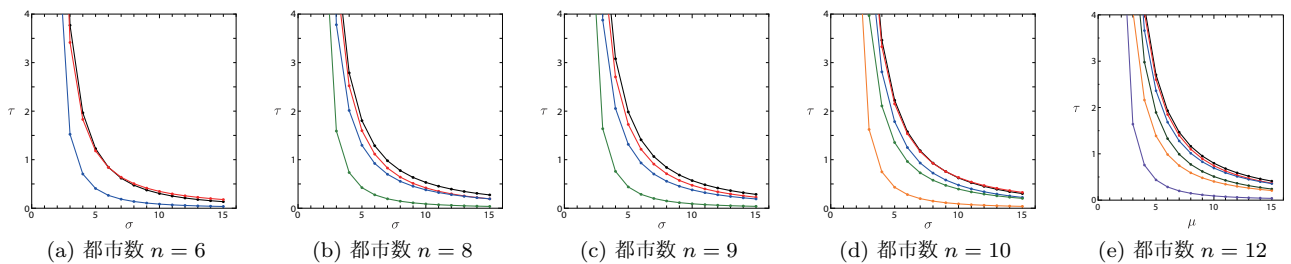


図-7: パラメータ  $\sigma$  の影響 (FO モデル)

モデルと同様に「周期倍化分岐」が最初に起きるとい  
う命題が成立する．しかし、一般の  $n = \text{even}$  の場合  
には成立しない．この結果より、以下の傾向があるこ  
とが判明した．

- 都市数が、 $n = 2 \times \text{even}$  の場合に空間周期倍化分  
岐が必ず最初に発生する．
- 都市数が、 $n = \text{odd}$  の場合には、擬似的空間周期  
倍化分岐が必ず最初に発生する．ただし、 $n = 3$  の  
場合、擬似的空間周期倍化の波数と空間周期 3 倍  
化がともに波数  $j = 1$  であり、一致するため、擬  
似的空間周期倍化に代わり空間周期 3 倍化が発生  
する．

- 都市数が  $n = 2 \times \text{odd}$  の場合には、パラメータに依存して、集積力が弱い場合に、擬似的空間周期倍化分岐が発生し、集積力が強い場合には、空間周期倍化分岐が発生する。6 都市の場合には、擬似的空間周期倍化の波数と空間周期 3 倍化の波数  $j = 2$  が一致がしており、擬似的空間周期倍化に代わり空間周期 3 倍化が発生する。
- このように、空間周期 3 倍化が、最初に発生するのは、波数の一致が起こる 3, 6 都市の場合に限られ、9, 12 都市では、最初に発生しない

### 7. 都市数が集積挙動に及ぼす影響

本章では、5.(3) 節で紹介した分岐解の追跡法により、非線形方程式 (24) の解として、分岐挙動を求める。6 章と同様に、skilled worker の総人口は、 $H = 1$  とし、NEG モデルのパラメータの値としては、 $(\mu, \sigma) = (0.4, 10.0)$  を用いる。

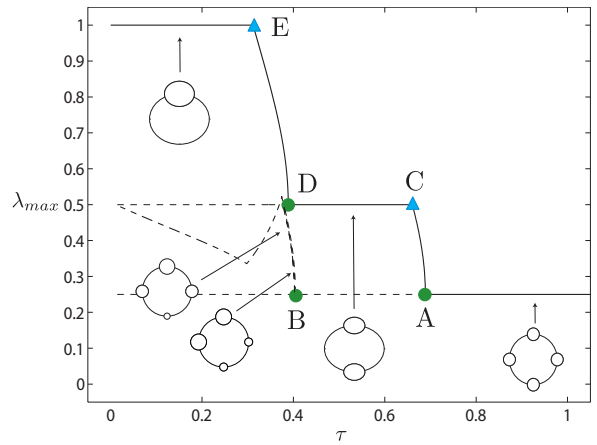
各モデルの、都市数  $n = 3 \sim 10, 12$  の場合に対して解析を行った。一様分布からの分岐は、 $n = 3 \sim 6$  では、全ての空間周波数に対して経路追跡を行ったが、 $n = 7 \sim 10, 12$  の経路に関しては、安定化する空間周波数に対してのみ経路追跡を行った。

#### (1) 簡単な例 (4 都市モデル)

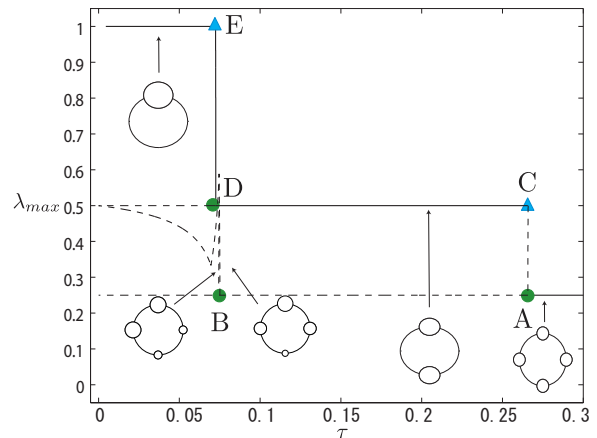
都市数  $n = 4$  に対する、Pf モデルと FO モデルの人口最大都市の輸送費用-人口比率曲線を図-8 に示す。安定解を実線で、不安定解を破線で表しており、縦軸は最大都市人口  $\lambda_{max}$  を用いることとする。また、横軸  $\tau$  は輸送費であり、 $\tau = 0$  に近いほど輸送費が低いことを表す。丸は対称性破壊分岐点を、三角は transcritical 型分岐点を表す。

Pf モデルでは、輸送費  $\tau$  の低下に伴い、周期倍化分岐カスケードにより人口集積が進行している。すなわち、周期倍化分岐点 A における空間周期倍化、transcritical 型分岐点 C における 2 都市への移行、分岐点 D における再度の空間周期倍化、transcritical 型分岐点 E における 1 都市への移行などを経て、集積が進行している。2 重分岐点 B により発生する経路は、常に不安定な経路であった。定理 2 により得られる自明解は、図-8(a) の解曲線上で、輸送費用  $\tau$  の低下に伴い、人口変化を起こさず、安定性のみが変化している。また、非自明解は、自明解をつなぐ様に存在することが分かる。

FO モデルの場合、分岐直後の安定性は異なるものの、安定解の種類と  $\tau$  の減少に伴う、その推移の様子はよく似ていることが分かる。



(a) 輸送費 - 人口比率曲線 (Pfモデル)



(b) 輸送費 - 人口比率曲線 (FOモデル)

図-8: 都市数  $n = 4$  の人口集積挙動

#### (2) 種々の都市数における集積挙動 (Pf モデル)

図-9 に都市数  $n = 3, 5 \sim 10, 12$  の場合の安定解を中心とした Pf モデルの輸送費用-人口比率曲線を示す。都市数  $n$  がどのような約数を持つかにより、安定解の推移が大いに異なることが見てとれる。

都市数  $n = 4, 8$  という  $n = 2^k$  のタイプに属する場合には、周期倍化分岐カスケードが卓越しており、安定解が連続的に存在する。全ての都市数を通じて、空間周期倍化 ( $n = 4, 6, 8, 10, 12$ ) や空間周期 3 倍化 ( $n = 3, 6, 9, 12$ ) により発生する対称性の高い自明解は安定化する傾向が高く、安定解の推移を殆ど支配していることが分かる。一方、 $n = \text{even}$  ( $n = 4, 6, 8, 10, 12$ ) に属する場合には発生する擬似的空間周期倍化により派生した経路群は、一部しか安定化していない。

一方、 $n = 5, 7, 9$  の場合には、最初に擬似的空間周期倍化分岐が発生した後、 $\tau$  の減少に伴い、非自明解に沿って、残存する人口が減少し、人口の消失に至るといった挙動がよく見られた。

都市数が多い約数を持つ場合 ( $n = 6, 8, 9, 10, 12$ ) には、複数の安定解が発生する。特に、10 都市では、解曲線が最も複雑化しており、最初に発生する空間周期倍化分岐と次に発生する擬似的空間周期倍化分岐から

派生する多くの安定解が存在する。

以上のことより、都市数  $n$  を以下のように大別することができる。

自明解が支配的な都市数

$$\begin{cases} n = 4, 8 : & (n = 2^k) \\ n = 3, 6, 12 : & (n = 2^k \times 3) \end{cases} \quad (32)$$

非自明解が支配的な都市数

$$\begin{cases} n = 5, 7, 9 : & n \text{ が } 3 \text{ 以外の奇数} \\ n = 10 \end{cases}$$

都市数  $n$  の大小に関わらず、(32) に示す様に、自明解が支配的な場合には、 $\tau$  の減少に伴う安定解の推移の記述が容易である。

### (3) Pf モデルと FO モデルの比較

図-10 に示す FO モデルの輸送費用-人口比率曲線を、図-9 に示す Pf モデルの曲線と比較すると、分岐直後（特に、周期倍化分岐）の安定性は異なるものの、安定解の種類と  $\tau$  の減少に伴う、その推移は良く似ていることわかる。特に、自明解の安定性に関しては、両モデルは類似した挙動を示している。このことは、両モデルの差異にも関わらず、円周都市経済の分岐が都市数  $n$  に依存するという一般的な特性が強く表れていることを示している。

### (4) 分岐直後の安定性

一様分布から発生する分岐直後の安定性を決定する要因を明らかにする。2都市の場合には、Pflüger モデルでは、ピッチフォーク分岐、Forslid & Ottaviano モデルでは、トマホーク分岐をきっかけに、人口集積が起こる。この様に、安定性の差異をモデル設定の違いが、引き起こしていると考えられている。しかし、一部の都市数の分析しか行われておらず、分岐直後の安定性を決定する理論的背景が明らかにされていない。そこで分岐直後の安定性を理論的に分類し、経路追跡によりその妥当性を検証する。

モデルと分岐点の種類ごとに、安定な一様分布状態からの分岐直後の安定性（4.(4) 節参照）を数値解析結果に基づき分類する。

単純分岐（空間周期倍化）

$$\begin{cases} \text{Pfモデル} : & \text{supercritical 型} \\ \text{FOモデル} : & \text{subcritical 型} \end{cases}$$

2重分岐（ $\hat{n} = 3$ , 空間周期 3 倍化）空間周期 3 倍化分岐による分岐解は、どのようなモデルや都市数であっても必ず不安定であった。これは、理論予測<sup>24)</sup> に整合した結果である。

2重分岐（ $\hat{n} \geq 5$ , 擬似的空間周期倍化）

$$\begin{cases} \text{Pfモデル} : & \text{supercritical 型} \\ \text{FOモデル} : & \text{subcritical 型} \end{cases}$$

2重分岐（ $\hat{n} = 4$ , 擬似的空間周期倍化）安定な一様分布から発生せず、4.(4) 節の分類に該当しなかった。空間周期 3 倍化分岐を除き、Pf モデルは、supercritical 型分岐、FO モデルは、supercritical 型分岐であり、一貫した特徴が伺える。

一様分布状態からの 1 次分岐以外の対称性破壊分岐の安定性については、上記の見解が必ずしもあてはまらない。図-10(e) は 8 都市の FO モデルであるが、 $D_4 \rightarrow D_2$  に移行するときに supercritical 型分岐が発生する。図-10(h) は、12 都市の FO モデルだが、 $D_6 \rightarrow D_3$  に移行する場合も同様に supercritical 型分岐であり、1 次分岐と異なる傾向がある。

また、擬似的空間周期倍化の集積過程で対称性破壊分岐が発生し、 $D_1 \rightarrow C_1$  に移行する分岐経路も発見した。この分岐経路の安定性は、Pf モデルでは、supercritical 型分岐であり、一貫しているが、FO モデルでは、supercritical 型と supercritical 型が混在している。

### (5) 都市数 $n-1, n, n+1$ の解析

都市数が  $n-1, n, n+1$  に対しては、その奇偶の変化に伴い、空間周期倍化と擬似的周期倍化が交互に発現する。Pf モデルに対し、このように都市数が変化する場合の輸送費-人口比率曲線の比較を図-11 に示す。図-11(a) に示す 4, 5, 6 都市に比べ、都市数が増加した図-11(b) に示す 8, 9, 10 都市のほうが、都市数の変化に伴う安定解の変化が小さい。都市数が増えるにしたがい、空間周期倍化と擬似的空間周期倍化の集積挙動は、より近い人口変化を起こす。また、非自明解が支配的な都市数による集積挙動と自明解が支配的な都市数による集積挙動の差異も、減少した。

### (6) 簡便な解析方法の提案

本論文では、以下の円周都市経済の簡便な解析方法を提案する

- 1) (32) に示すような自明解が支配的な都市数を選択する。
- 2) 幾何学的考察により自明解を求める（5.(2) 節定理 2 を参照）。
- 3) 自明解の安定性解析（理論解析と数値解析）を行う。
- 4)  $\tau$  の減少に伴う安定解の推移を調べる。
- 5) 節の結果より、式 (32) の様に約数が多く、自明解が支配的な都市数に対して、幾何学的考察により自明解を得て、その安定性を解析することは、非自明解を求めることに比べ、簡便である上、代表的な集積情報を得ることが出来ると思われる。



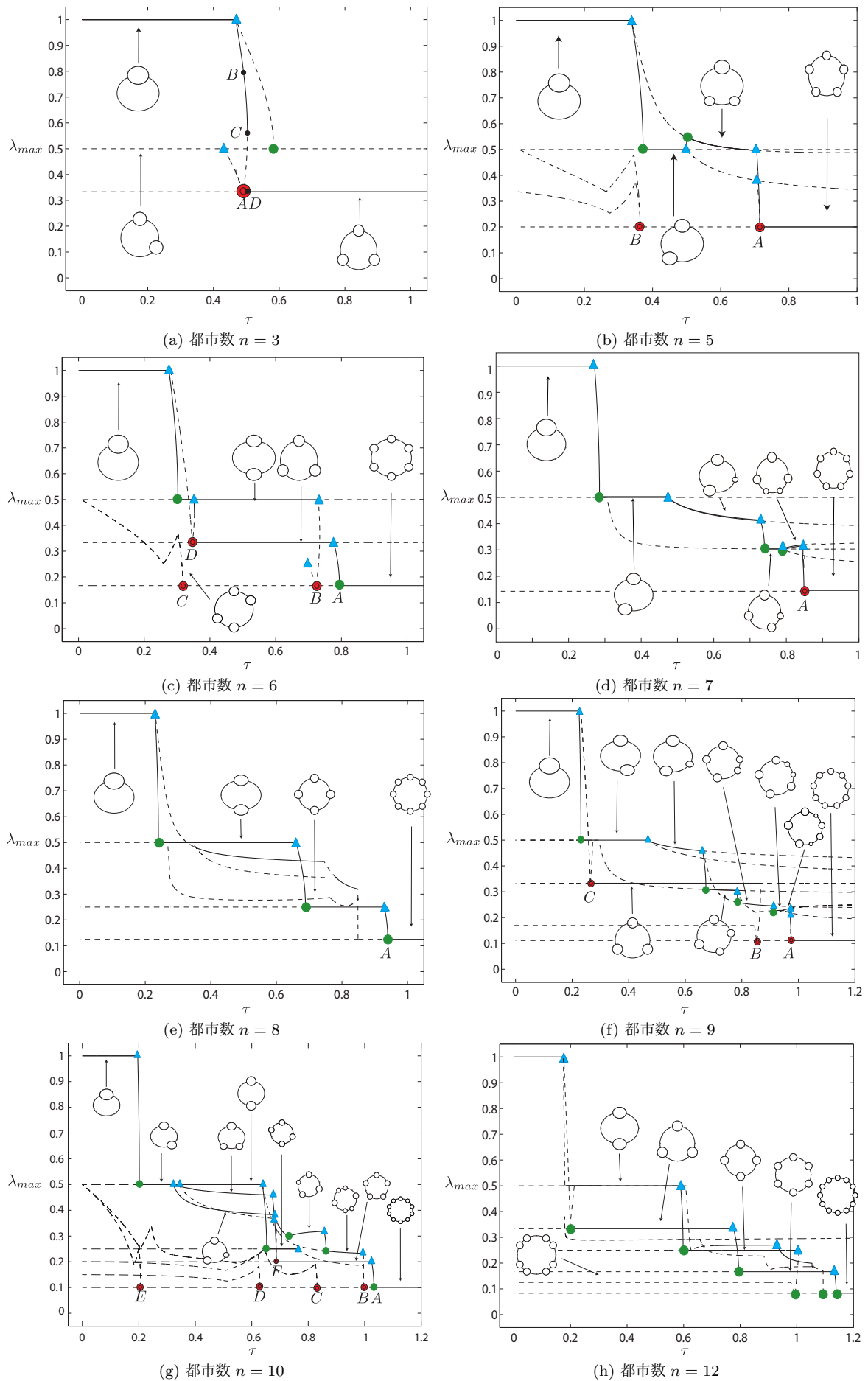


図-9: Pfモデルの輸送費-人口比率曲線

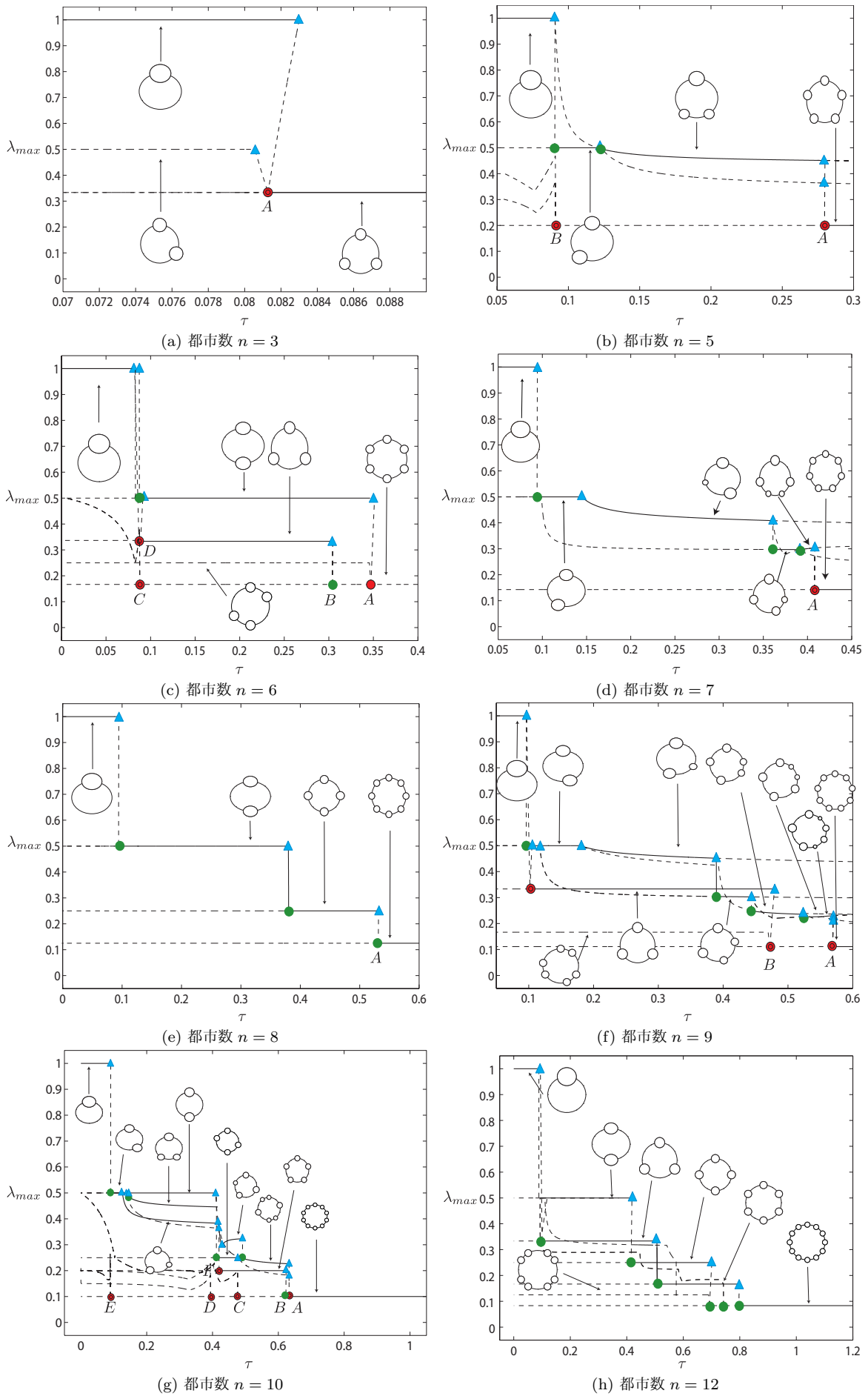


図-10: FO モデルの輸送費-人口比率曲線

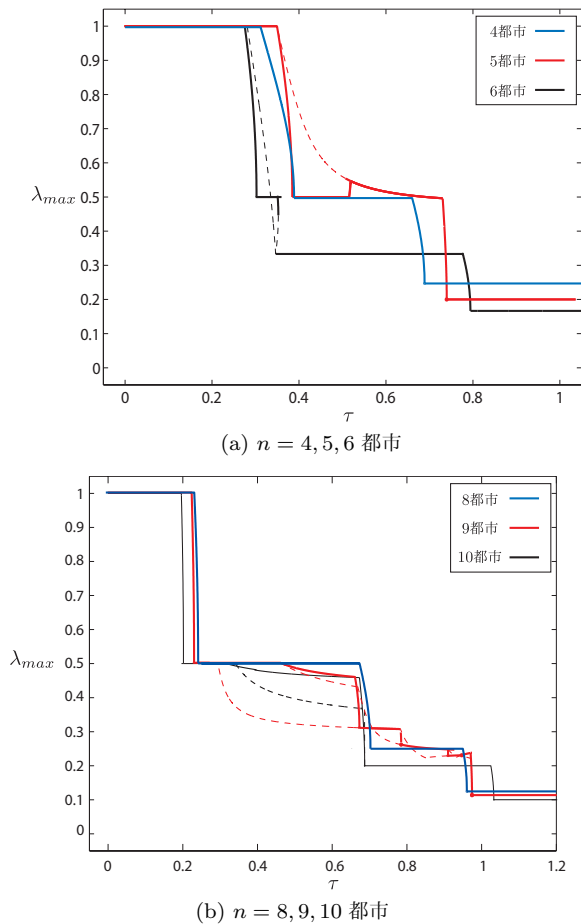


図-11: 大局的集積挙動の比較 (Pf モデル)

## 8. 結論

本論文では、円周都市経済の集積挙動を、分岐理論と Forslid & Ottaviano モデルと Pflüger モデルに対する数値解析に基づき調べた。

従来の断片的な都市数に対する分岐理論<sup>16)</sup>を拡張することにより、円周都市経済の分岐メカニズムと分岐により生じえる集積特性を一般の都市数  $n$  に対して、明らかにすることが出来た。その結果、「空間周期倍化」、「擬似的空間周期倍化」、「空間周期3倍化」の3種類に対応する分岐の安定化傾向が強くなり、重要であることが判明した。そして、これらの分岐の発生する順番は、都市数とモデルのパラメータに依存することが判明した。また、都市数が多くなると、都市数の変化による集積挙動の差異が逓減することも確認できた。

経路追跡は、完全な情報を得るためには有効であるが、解曲線に関する膨大な情報を含んでおり、その分、解析が大変である。本論文では、幾何学的考察による自明解の求め方と簡便な解析方法を提案し、幾つかの計算例に対して、その妥当性を検証できた。この解析方法は、都市数  $n$  が多い場合に、有効な方法である。

本研究より、派生する課題の一つとして、既往の研究で構築されてきた多くの集積経済モデルについて、同

様の傾向があることを確認することである。また、最初に発生する分岐による分岐解の安定性は、モデルに依存するが、段階的に発生する分岐による分岐解の安定性についての一般論は今後の課題としたい。

## 参考文献

- 1) W. Christaller: *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- 2) M. Fujita, P. Krugman, T. Mori: On the evolution of hierarchical urban systems, *European Economic Review* 43(2) (1999) 209–251.
- 3) 奥村誠, 小林潔司, 山室良徳: 輸送費用の減少が都市群システムに及ぼす影響のシミュレーション分析, 土木学会論文集, No.604/iV-41, 23–34, 1998.
- 4) 上田孝行, 松葉保孝: 都市群システムにおける構造の安定性と変化に関するモデル分析, 土木学会論文集, No.542/IV-32, 33–44, 1996.
- 5) P. Krugman: Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy* 99 (1991) 483–499.
- 6) P. Krugman: On the number and location of cities, *European Economic Review* 37 (1993) 293–298.
- 7) M. Fujita, P. Krugman, A. J. Venables: *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 8) A. K. Dixit, J. E. Stiglitz: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *American Economic Review* 67 (1997) 297–308.
- 9) S. Brakman, H. Garretsen, C. van Marrewijk: *The New Introduction to Geographical Economics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2001.
- 10) R. Baldwin, R. Forslid, P. Martin, G. Ottaviano, F. Robert-Nicoud: *Economic Geography and Public Policy*. Princeton University Press, 2003.
- 11) P. P. Combes, T. Mayer, J.-F. Thisse: *Economic Geography: The Integration of Regions and Nations*. Princeton University Press, 2008.
- 12) R. Forslid, G. I. P. Ottaviano: An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography* 3 (2003) 229–340.
- 13) M. Pflüger: A simple analytically solvable, Chamberlinian agglomeration model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.34 (2004) 565–573.
- 14) 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁, 高山雄貴, 坂本賢二, Reza Sobhaninejad: 線分都市経済の人口集積メカニズムの分析, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 69, No. 1, 53–63, 2013.
- 15) P. Mossay, P. M. Picard: “On spatial equilibria in a social interaction model,” *Journal of Economic Theory*, 146(6) (2011) 2455–2477.
- 16) K. Ikeda, T. Akamatsu, T. Kono: Spatial period-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics & Control* 36 (2012) 754–778.
- 17) K. Ikeda, K. Murota, *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.
- 18) P. Mossay: Increasing returns and heterogeneity in a spatial economy, *Regional Science and Urban Economics* 33 (2003) 419–444.
- 19) P. M. Picard, T. Tabuchi: Self-organized agglomerations and transport costs, *Economic Theory* 42 (2010) 565–589.



- 20) T. Tabuchi, J.-F. Thisse: A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics* 69 (2011) 240–252.
- 21) T. Akamatsu, Y. Takayama, K. Ikeda: Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models. *Journal of Economic Dynamics & Control* 36(5) (2012) 754–778.
- 22) T. Akamatsu, T. Mori, Y. Takayama: Agglomerations in a multi-region economy: Polycentric versus monocentric patterns, *RIETI Discussion Paper Series* 16-E-009, 2016.
- 23) 柳本彰仁, 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁: 計算分岐理論による都市の集積分散モデルの分岐経路追跡法の提案, *土木計画学研究・論文集*, No.24, pp191-196, 2007.
- 24) K. Ikeda, K. Murota: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, 2nd, ed., Springer-Verlag, 2010.
- 25) M. Golubitsky, I. Stewart, D. G. Schaeffer: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2, Springer-Verlag, 1988.
- 26) 高山雄貴, 赤松隆: 空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, *土木学会論文集 D3(土木計画学)*, Vol.67, No.1, 1-20, 2011

(2016. 4. 22 受付)

## BIFURCATION INDUCING AGGLOMERATION IN A RACETRACK ECONOMY: DEPENDENCE ON A NUMBER OF CITIES

Mikihisa ONDA, Yuki TAKAYAMA, Kiyohiro IKEDA

Agglomerations of population were analyzed by NEG models in new economic geography (NEG) mostly in two-place and racetrack economies. In the racetrack economy, agglomerations proceed via so-called spatial period doubling bifurcation cascade. Since this cascade exists for  $2^k$  cities, studies of agglomeration up to now have been conducted for such cities. This paper aims elucidate the bifurcation and agglomeration properties of the racetrack economy with arbitrary number of cities. Bifurcation theory of NEG models is proposed and numerical analysis of the Forslid & Ottaviano and Pflüger models is conducted. Dependence of the bifurcation and agglomeration on the models and on the number of cities is made clear.