

交通流の変分原理に基づく信号路線の期待遅れ 評価法と信号最適化への応用

和田 健太郎¹・臼井 健人²・大口 敬³・井料 (浅野) 美帆⁴

¹正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)
E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

²非会員 東京大学大学院工学系研究科 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)
E-mail: usui@iis.u-tokyo.ac.jp

³正会員 東京大学教授 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)
E-mail: takog@iis.u-tokyo.ac.jp

⁴正会員 東京大学准教授 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)
E-mail: m-iryu@iis.u-tokyo.ac.jp

本研究は、確率的な到着需要を考慮して、系統信号路線の総遅れ時間の期待値を評価する手法を提案する。この手法は交通流の変分原理 (VT) に基づく。確率的な到着需要 (e.g., ポアソン到着) を考慮した VT では、交通流ダイナミクスは時空間領域のネットワークにおける (プロビット・モデル型の) 確率的な最短経路探索問題の解として記述されるが、その厳密な求解は困難なものとなる。そこで、以下の二つを組み合わせた近似解法を提案する: (i) 最短経路の持つ特性による解集合 (経路候補数) の縮小; (ii) Clark 近似による多重積分の解析的な評価。モンテカルロ計算との比較を通して、提案手法が精度よく遅れ時間の期待値を計算できることを示す。また、提案手法の応用として、信号最適化のケース・スタディを示す。

Key Words: *signalized arterial, random arrivals, expected signal delay, variational theory, Clark approximation*

1. はじめに

信号交差点における信号遅れは、交通信号制御を考える上で最も重要なサービス指標の 1 つであり、これまで様々な評価モデルが提案されてきた。古くは、(孤立交差点における) 一様到着を仮定した確定的な遅れの導出にはじまり、1950~1960 年代にはランダム到着を仮定した様々な期待遅れ式が、待ち行列理論に基づき提案された (その発展経緯の詳細については、近年のレビュー論文¹⁾を参照されたい)。その中で、現在の信号制御において標準的に用いられているのが Webster の遅れ式²⁾である。これは、ポアソン到着を仮定した理論的な期待遅れ式にシミュレーションによる補正項を加えたものであり、流入路別の遅れ評価や交差点のスプリット、サイクル長の決定など、孤立交差点における信号パラメータ最適化の基礎となっている。

ただし、これらの初期の研究は、(a) 定常状態を仮定している、(b) 孤立交差点を対象としており隣接交差点の影響 (オフセットや待ち行列の延伸) を考慮できない、といった課題が存在する。前者は過飽和状態での遅れの過大評価につながり、また後者は、系統信号制御に遅れ式を用いた場合 (ランダム到着に起因する遅れを課題に評価し) 必要以上に長い共通サイクル長を導くことになる。そのため、定常状態における遅れ式を

時間依存の式へと変換する手法³⁾や、隣接交差点間の系統の取れ具合を表す “Progression Factors” を導入した遅れ式⁴⁾などが開発され、その改善が図られている¹⁾。また、越の研究^{5),6)}では、方形波を仮定した様々な単純化の下、系統信号路線の共通サイクル長と (確定的な) 遅れの明快な関係式を導出している (近年、同様の結果が Jin and Yu⁷⁾により報告されている)。ただし、以上で述べてきた解析式に基づくアプローチは、孤立交差点の信号制御設計や人手で簡便に遅れを評価するには有用であるが、系統信号路線におけるより一般的な状況下の遅れ評価や信号制御パラメータとの関係性を考察するのは難しい。

一方、系統信号路線の信号パラメータを最適化するための数理計画問題では、様々な信号パラメータ条件下で遅れを評価するために、交通流モデル (e.g., platoon dispersion model, store-and-forward model) が明示的に定式化の中に組み込まれている。その中でも代表的なものが、Kinematic Wave (KW) モデルである。Lo et al.^{8),9),10)}による一連の研究では、1本の系統信号路線あるいは面的な道路網の信号パラメータ最適化を、KW モデルの離散近似である Cell-Transmission Model (CTM) を組み込んだ混合整数計画問題として定式化している。また、近年では、KW モデルと等価な交通流の変分原理^{11),12)}に基づく信号最適化手法も提案されている^{13),14)}。しか

し、いずれも確定的な遅れの評価に基づく最適化であり、ランダム到着の影響を考慮してきた孤立交差点での信号パラメータ最適化とは対照的な状況である。つまり、(特に近飽和の状況では)遅れに大きな影響をもたらすランダム到着による残留待ち行列を考慮することができず、結果として得られる信号パラメータの最適性も保証することができない。

以上でみてきた孤立交差点と系統信号路線の信号パラメータ最適化におけるギャップを埋めるためには、ランダム到着を考慮した系統信号路線の期待遅れを評価する手法の構築が必要である。その構築に当たっては、(i) モンテカルロ法をベースにしたアプローチ、(ii) 交通流モデル自体を確率化し、確率変数となる交通状態量の期待値や分散を解析的に求める(あるいは、近似する)アプローチ、が考えられる。ただし、期待遅れの評価が系統信号パラメータ最適化(組合せ最適化)プロセスの中のサブ・プロセスであることを考えると、一般に計算効率性が高いと考えられる(ii)のアプローチが有効であろう。

本研究は、ランダム到着を考慮した系統信号制御の最適化を念頭におき、交通流の変分原理に基づく系統信号路線の期待遅れ評価法を提案する。具体的には、まず、境界条件(i.e., 到着需要)を確率変数とした交通流の変分原理による期待遅れ評価問題を考える。これは、時空間領域のネットワークにおける(プロビット・モデル型の)確率的な最短経路探索問題として表現されるが、その厳密な求解は困難である。そこで、以下の二つを組み合わせた近似解法を構築する:(1) 最短経路の持つ特性による解集合(経路候補数)の縮小;(2) Clark 近似による多重積分の解析的評価。そして、モンテカルロ計算との比較を通して、提案手法が精度よく遅れ時間の期待値を計算できることを示す。

本稿の構成は以下のとおりである。続く 2. では、交通流の変分原理に基づく系統信号路線の確定的な遅れ時間の評価を概説する。3. では、2. 章で述べた手法に対して確率的な到着需要を導入し、期待遅れを評価問題を定式化する。また、解集合を縮小する手法についても述べる。4. ではさらに、Clark 近似を適用した期待遅れの解析的評価法を示す。5. では、モンテカルロ法との比較を通して、提案手法の精度や特徴を分析する。6. では、現実の系統信号路線(駒沢通り)において、提案手法に基づくケーススタディを行う。最後に、7. では、本研究のまとめと今後の課題について述べる。

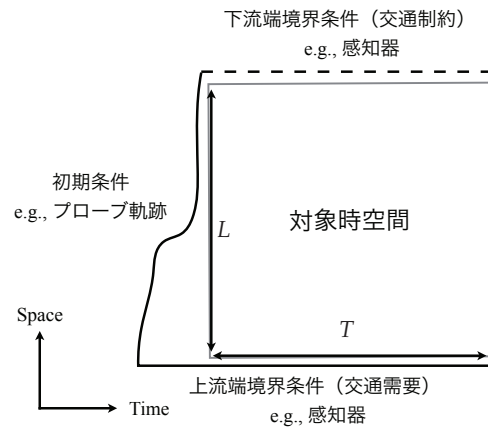


図-1 時空間上の境界条件

2. 交通流の変分原理に基づく系統信号路線の遅れ評価

(1) 状況設定

本研究では、複数の信号交差点を含む 1 本の系統信号路線を対象とし、その道路区間は $x \in [0, L]$ 、制御対象とする時間は $t \in [0, T]$ とする。各道路の交通流の特性は三角形の Fundamental Diagram (FD) によって特徴付けられるとし、その形状は以下の 4 つのパラメータのうち 3 つを定めることで決まる: 前向き密度波 (FW: Forward Wave) 速度 v ; 後向き密度波 (BW: Backward Wave) 速度 w ; 渋滞密度 k_j , 飽和交通流率 q_{max} 。なお、対象とする道路への途中からの流入、区間の途中で流出する車両は直進交通に比べて十分小さく、その影響は無視できるとする。

対象とする時空間の交通流ダイナミクスを記述するために一般的に必要な境界条件を図 1 に示す。上流端境界条件である到着交通需要は、道路上端 $x = 0$ において外生的に与えられる。このような情報は、信号交差点の上流に設置された感知器により得ることができる。なお本章では、この上流端境界条件を確定的なものとして定式化を行うが、3. 章ではこれを確率的な上流端境界条件へと拡張する。各道路の初期状態を表す初期条件としては、道路が空の状態や定常的な密度を与えることが考えられるが、プローブ車両の軌跡情報によって実際の状況を考慮することもできる。下流側の条件は、上流側の信号制御パターンの変更により変化してしまうため、本研究では感知器情報をそのまま用いることはできない。そもそも下流端条件は、対象区間のさらに下流側のボトルネックから待ち行列が延伸する場合などに必要となる情報である。従って、そのようなボトルネックを対象区間に含めることで、一般性を失うことなく下流端の条件を除いて考えることができる。

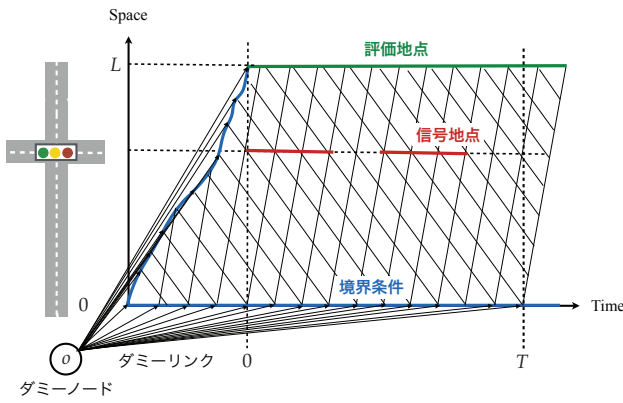


図-2 VT ネットワーク

(2) 交通流の変分原理

交通流の変分原理¹¹⁾(以降では,VTと呼ぶ)は,KWモデルを複雑な境界条件下で統一的に解析する方法として提案されたものであり,以下に述べる時空間図上の最短経路探索問題を解くことで,待ち行列の延伸を含む時空間図上の全ての交通状態を決定することができる.ここでは,基本的な理論の説明は省略し,本研究で必要となるVTの数値解法についてのみ概説する.

まず,図2のような三角形のFDを敷き詰めた時空間図上のネットワーク(VTネットワーク)を構築する.ここで,FDの底辺にあたる時間幅を Δt ,FDの高さにあたる空間幅を Δx とする.このとき,両者の関係は $\Delta t = \Delta x(1/v + 1/w)$ である.このネットワークにおいて,FW速度の(正の)傾きを持つ直線とBW速度の(負の)傾きを持つ直線の交点がノードであり,その集合を \mathcal{V} で表す.一方,2点のノードを繋ぐ部分が(通常)リンクであり,リンク集合を \mathcal{L}_0 で表す.ノードは離散化された時間・空間の組 (t, x) , $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$, $x = 0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, L$ で表されるが,以降では表現を簡潔にするために $i = (t, x)$ として1つの記号で表す.また,リンクは上流側ノード i と下流側ノード j を用いて (i, j) と表現する.なお,VTの枠組みにおいて,信号現示は,信号交差点位置の隣り合うノードを結ぶリンクにより表現される(図2の赤線部分).この信号リンクの集合を \mathcal{L}_s とする.

VTネットワークの各リンクのコストは,移動観測者がリンクに沿った速度で走行したときの累積台数の変化の上限(相対交通容量)として与えられる(図3も参照).すなわち, c_{ij} をノード i と j を繋ぐリンクのコストとすると,FW速度の傾きを持つリンク(FWリンク)上では $c_{ij} = 0$,BW速度の傾きを持つリンク(BWリンク)上では $c_{ij} = k_j \Delta x$ で与えられる.また,信号交差点位置の隣り合うノードを結ぶ信号リンクのコストは,赤現示のときは $c_{ij} = 0$,青現示のときは移動観測

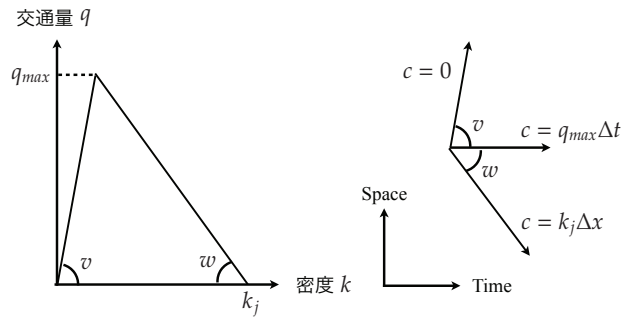


図-3 三角形のFDと各リンクの相対交通容量

者を最大で交通容量だけ車が通過するため $c_{ij} = q_{max} \Delta t$ となる.

以上で構築したVTネットワークにおいて,各ノード j の累積台数 N_j は,到達可能な境界からの最短経路探索問題を解くことで求められる:

$$N_j = \min_{i \in \Omega_j} \{N_i + \Delta_{i,j}\} \quad (1)$$

ここで, Ω_j はノード j から到達可能な境界ノードの集合, $\Delta_{i,j}$ はノード i からノード j までの最短の経路コストである.つまり,全てのノードの累積台数を求めるためにはノードの数分だけ最短経路探索問題を解くことになる.しかし,図2に示すようなダミーノード o を用意し,ダミーノードから境界条件を繋ぐダミーリンクのコストを各境界条件が持つ累積台数値とすると,全てのノードの累積台数を一括で求める問題は,ダミーノードを起点,全てのノードを終点とする1起点多終点の最短経路探索問題に帰着する.

(3) 確定的な総遅れの評価

上述のVTの枠組みにより,系統信号路線の総遅れ D を具体的に評価しよう.なお,以降では $\Delta t = 1$ として議論を進める.信号パラメータ(i.e.,各信号リンクのコスト)を与件とした道路の総遅れは,自由旅行時間分だけ下流にシフトさせた上流端の(離散的な)累積曲線(i.e.,交通需要)と下流端における累積曲線で囲まれる面積として表すことができる.つまり,いまVTネットワークの各ノードの累積台数を N_i とすると,総遅れは,

$$D = \sum_{i \in \mathcal{V}_{up}} N_i - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} N_j \quad (2)$$

と与えられる.ここで, $\mathcal{V}_{up}, \mathcal{V}_{down}$ はそれぞれ上流端,下流端におけるノードの集合である.また,この式において上流端の累積台数は境界条件により既知であるため,VTによる評価が必要なのは下流端における累積台数のみである.より具体的には,確定的な総遅れ評価問題は以下の線形計画問題として表される:

$$D = \sum_{i \in \mathcal{V}_{up}} N_i - \max_N \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} N_j \quad (3)$$

subject to

$$N_j \leq N_i + c_{ij} \quad \forall ij \in \mathcal{L}_o \quad (4)$$

$$N_j \leq N_i + q_{\max} \cdot s_{ij} \quad \forall ij \in \mathcal{L}_s \quad (5)$$

$$N_o = 0. \quad (6)$$

より詳しい導出は、和田¹³⁾を参照されたい。

3. 系統信号路線の期待遅れ評価問題

本章では、前章で述べた枠組みに確率的な境界条件を導入し、系統信号路線の期待遅れ評価問題を定式化する。この問題は、確率的な最短経路探索問題となるが、その最短経路の特性を考察することにより、候補経路数を削減できることも述べる。なお、以降の章では、提案手法の本質的な構造を明快に示すために、初期条件は道路が空の状態であると仮定する。

(1) 期待総遅れの厳密な表現

いま、時刻 t から $t + \Delta t$ の間に上流端に到着する到着台数を確率変数 ϵ_t で表現しよう。より具体的には、確率変数 ϵ_t は、平均到着流率パラメータ λ を持つポアソン分布に従うとする。従って、時刻 $t = k\Delta t$ までに上流端に到着する累積台数は $\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t$ と表現される。このとき、上流端の境界条件が全て確率変数となるため、VT ネットワークの各ノード i の累積台数および総遅れも、それぞれ、確率変数 \tilde{N}_i, \tilde{D} となる。そして、期待総遅れは、以下のように表現できる：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{D}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k \in \mathcal{V}_{up}} \tilde{N}_k - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} \tilde{N}_j\right] \\ &= \sum_{k \in \mathcal{V}_{up}} \mathbb{E}[\tilde{N}_k] - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} \mathbb{E}[\tilde{N}_j]. \end{aligned} \quad (7)$$

よって、期待総遅れを求めることは、VT ネットワークにおける上流端および下流端の各ノードの累積台数の期待値を求めることに帰着される。このうち、各上流端ノードの累積台数の期待値は $\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t$ の分布から容易に求められる。ここでは、各確率変数 ϵ_t をポアソン分布と仮定しているため、その和もポアソン分布である。従って、

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t\right] = \lambda k \quad \forall k \in \mathcal{V}_{up} \quad (8)$$

である。

一方、各下流端ノードの累積台数の期待値は、以下の確率的な最短経路探索問題の期待最小費用を求める問題となる：

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_j] = \mathbb{E}\left[\min_{k \in \Omega_j^u} \left\{\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t + \Delta_{k,j}\right\}\right] \quad \forall j \in \mathcal{V}_{down}. \quad (9)$$

ここで、 Ω_j^u は下流端ノード j に到達可能な上流端ノードの集合である。各経路のコストが確定項 $\Delta_{k,j}$ と確率項 $\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t$ の和で表されることから明らかなように、問題 (9) は多項プロビット・モデル型の確率的な最短経路探索問題、あるいは、上流端ノード選択問題とみること

ができる（厳密には、ポアソン分布と正規分布は異なるが、 k がある程度大きいとき両者ほぼ同一視しても実際上の問題はない）。

(2) 最短経路候補数の削減

問題 (9) は、ノード k の確率項 $\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t$ が、 $k' < k$ となる全てのの上流端ノードの確率項 $\sum_{t=0}^{k'-1} \epsilon_t$ と正の相関を持つため、その期待最小費用を厳密に求めることは困難である。従って、最終的には何らかの近似的な評価が必要となるが、問題 (9) の構造を活用すれば近似を導入することなしに候補経路（上流端ノード）数を削減することができる。

その構造とは、(i) 隣り合う上流端ノード $k-1$ と k を起点とし、下流端ノード j を終点とする経路コストの確定項の差 $\Delta_{k-1,j} - \Delta_{k,j}$ が取りうる値は q_{\max} または 0 のいずれかである、(ii) 上流端の累積台数が時間とともに単調増加する、(iii) 容量を超えた需要は対象道路区間に流入できない、である。

(i) であるが、まず、信号交差点がない一様な道路区間（i.e., 図 5 の信号リンクがない状況）を考えてみよう。このとき、上流端ノード $k-1$ を起点として下流端ノード j に向かう経路が、より遅い時間のの上流端ノード k からの経路に合流するためには、必ず BW リンクを一度通る必要がある。従って、確定項の差は $q_{\max}(=k\Delta x)$ である。一方、上流端ノード $k-1$ を起点として下流端ノード j に向かう経路上に赤現示の信号リンクがあったとしよう。このとき、その信号リンクを通れば、追加的なコストなしでより遅い時間のの上流端ノード k からの経路に合流することができる。従って、確定項の差は 0 である。

続いて、(ii) と $\Delta_{k-1,j} - \Delta_{k,j} = 0$ の場合を組み合わせる。このとき、上流端へ到着する累積台数の単調増加性（i.e., $\epsilon_{k-1} \geq 0$ ）から、

$$\sum_{t=0}^{k-2} \epsilon_t + \Delta_{k-1,j} \leq \sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t + \Delta_{k,j} \quad (10)$$

が成り立つ。つまり、上流端ノード k を起点とする経路コストは上流端ノード $k-1$ からの経路のコストより小さくなることはないため、最短経路の候補から除くことができる。

逆に、(iii) と $\Delta_{k-1,j} - \Delta_{k,j} = q_{\max}$ の場合を組み合わせると、上流端での制約（i.e., $\epsilon_{k-1} \leq q_{\max}$ ）より、

$$\sum_{t=0}^{k-2} \epsilon_t + \Delta_{k-1,j} \geq \sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t + \Delta_{k,j} \quad (11)$$

となるため、上流端ノード $k-1$ を起点とする経路は最短経路候補から除くことができる。

隣り合う全てのの上流端ノードに対して以上のような手続きを施した後に残ったものが、 $\mathbb{E}[\tilde{N}_j]$ の算出において考慮すべき上流端ノードである。図 4、図 5 に考慮すべき上流端ノードの例、および、それに対応する VT

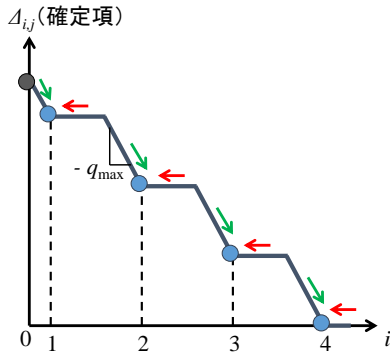


図-4 考慮すべき上流端ノードの例

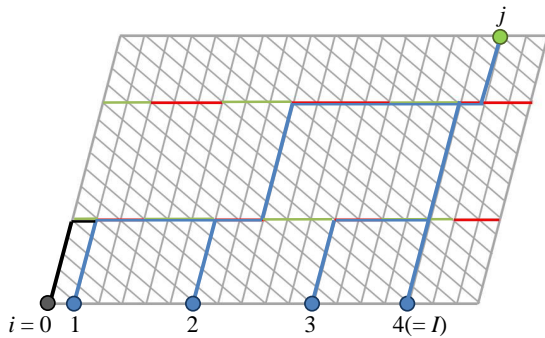


図-5 考慮すべき経路候補の例

ネットワーク上の経路を示す．以降では，この起点となりうる上流端のノード番号を，時刻の早いものから順に新たに $k = 0, 1, 2, \dots, K$ と定義する．ここで， $k = 0$ は図 5 に示すような原点ノード，すなわち，経路コストが確定項のみで構成される上流端ノードを表すものとする．

4. Clark 近似に基づく期待総遅れの評価

上記で示した手法により経路の候補となる上流端ノードを絞り込むことはできるが，対象交差点数や信号パラメータ，到達可能な上流端ノードの数が増加する対象時間の後半になればなるほど，依然としてその数は多くなる傾向にある．そこで，本章では，下流端累積台数の期待値の算出問題 (9) に対し Clark 近似¹⁵⁾ を適用する．

(1) Clark 近似の概要

Clark 近似は，2 つの正規分布に従う確率変数の最大値を，新たな正規分布に従う確率変数として近似する手法であり，多項プロビット・モデルの古典的な解析的近似法の 1 つとして知られている¹⁶⁾．また，Deng et al.¹⁷⁾ では，信号交差点を含まない様な道路区間における交通状態推定問題 (i.e., 三点感知器問題) において Clark 近似を利用している．

まず， U_1, U_2, U_3 を，期待値 V_1, V_2, V_3 ，分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ ，相関係数 $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ の多変量正規分布に従う確率変数とする．このとき， v_n を確率変数 $\max(U_1, U_2)$ の 0 についての n 次モーメントとすると，以下が厳密に成立する¹⁵⁾：

$$v_1 = V_1\Phi(\gamma) + V_2\Phi(-\gamma) + a\phi(\gamma) \quad (12)$$

$$v_2 = (V_1^2 + \sigma_1^2)\Phi(\gamma) + (V_2^2 + \sigma_2^2)\Phi(-\gamma) + (V_1 + V_2)a\phi(\gamma) \quad (13)$$

where

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \quad (14)$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \phi(t)dt \quad (15)$$

$$a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{V_1 - V_2}{a} \quad (17)$$

ここで， $\phi(\omega)$ は標準正規分布の確率密度関数， $\Phi(\omega)$ はその累積確率， a^2 は $U_1 - U_2$ の分散に相当する．そして，確率変数 $\max(U_1, U_2)$ の期待値および分散は，モーメントを用いて以下のように記述できる：

$$E[\max(U_1, U_2)] = v_1 \quad (18)$$

$$\text{Var}[\max(U_1, U_2)] = v_2 - v_1^2 \quad (19)$$

また， U_3 と $\max(U_1, U_2)$ の相関係数は以下のように表現できる：

$$\rho[U_3, \max(U_1, U_2)] = \frac{\sigma_1\rho_{13}\Phi(\gamma) + \sigma_2\rho_{23}\Phi(-\gamma)}{\sqrt{v_2 - v_1^2}} \quad (20)$$

Clark 近似では， $\max(U_1, U_2)$ の分布を次のような正規分布で近似することを考える：

$$\max(U_1, U_2) \sim N(v_1, v_2 - v_1^2) \quad (21)$$

この近似を再帰的に適用することで，2 つ以上の正規確率変数の最大値：

$$\begin{aligned} & \max(U_1, U_2, \dots, U_k) \\ & = \max(U_k, \max(U_{k-1}, \dots, \max(U_1, U_2, \dots))) \end{aligned} \quad (22)$$

の近似的な分布も求めることが可能となる．

(2) 本問題への適用

ここでは，Clark 近似を用いて，下流端ノード j の累積台数の期待値を算出する方法を具体的に述べる．

まず，経路コストが確定項 $\Delta_{0,j}$ のみで構成されている選択枝 $k = 0$ を解候補から除いた確率変数を n_K とし，これを以下のような最大化問題として取り扱う：

$$\begin{aligned} n_K &= \min\left(\epsilon_0 + \Delta_{1,j}, \dots, \sum_{t=0}^{K-1} \epsilon_t + \Delta_{K,j}\right) \\ &= -\max(U_1, \dots, U_I) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、max 関数の各要素は $U_k = -\sum_{t=0}^{k-1} \epsilon_t - \Delta_{k,j}$ であり、その期待値は $V_k = -\lambda k - \Delta_{k,j}$ 、分散は $\sigma_k^2 = \lambda k$ で表される。また、ある 2 つの要素 k_1 と k_2 ($k_1 < k_2$ とする) の相関係数は以下のように与えるものとする：

$$\rho_{k_1, k_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \quad (24)$$

この相関係数によって、 ϵ_k のゆらぎがノード $k+1$ 以降の全てのの上流端ノードの累積到着台数に影響を与えるという本問題の共分散構造をモデル化している。

$n_k = -\max(U_1, U_2, \dots, U_k)$ とおくと、Clark 近似を用いて確率変数 n_k を正規分布で近似するアルゴリズムは下記ようになる：

Step 0 $k = 3$ とする。式 (18), (19) から $E[-n_2]$, $\text{Var}[-n_2]$, $\rho[U_k, \max(U_1, U_2)]$, $\forall k = 3, \dots, K$ を計算する。

Step 1 前ステップで計算した $E[-n_{k-1}]$, $\text{Var}[-n_{k-1}]$, および、 $\rho[U_k, \max(U_1, \dots, U_{k-1})]$ に基づき、式 (18), (19) から $E[-n_k]$, $\text{Var}[-n_k]$ を計算する。

Step 2 $k = K$ であれば Step 3 へ。それ以外なら、 $\rho[U_i, \max(U_k, (U_1, U_2))]$, $\forall i = k+1, \dots, K$ を計算し、 $k := k+1$ として Step 1 に戻る。

Step 3 以上で計算した $-n_K$ の期待値と分散を用いて、確率変数 n_K の分布を以下のような正規分布で近似する：

$$n_K \sim N(-E[-n_K], \text{Var}[-n_K]) \quad (25)$$

最後に、予め除いていた選択肢 $k=0$ を候補に加え、下流端累積台数の期待値を以下のように計算する（当然ここでも、Clark 近似を用いることはできるが、厳密に評価が可能である）：

$$\begin{aligned} E[\tilde{N}_j] &= E[\min(\Delta_{0,j}, n_K)] \\ &= \Delta_{0,j} \int_{\Delta_{0,j}}^{\infty} f(n_K) dn_K + \int_{-\infty}^{\Delta_{0,j}} n_K f(n_K) dn_K \\ &= \Delta_{0,j} \int_{\Delta_{0,j}}^{\infty} f(n_K) dn_K - \text{Var}[n_K] \cdot f(\Delta_{0,j}) \\ &\quad + E[n_K] \cdot \Pr\{n_K < \Delta_{0,j}\} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $f(n_K)$ は n_K の確率密度関数を表す。また、上記の式変形では、正規分布に従う確率変数 x と任意の定数 c に対して成立する以下の関係を用いている¹⁸⁾：

$$\int_c^{\infty} x f(x) dx = \text{Var}[x] \cdot f(c) + E[x] \cdot \Pr\{x > c\} \quad (27)$$

Horowitz et al.¹⁹⁾ によれば、Clark 近似は、(i) 各確率変数が無相関あるいは正の相関を持っているとき、かつ、(ii) 各確率変数の持つ分散が大きく変わらないとき、精度よく選択確率を近似できる。本問題は (i), (ii) のいずれも満たしており、期待最小費用を精度よく近似できると予想される。

表-1 数値実験で用いるパラメータ値

FW 速度 v	30 [km/h]
BW 速度 w	15 [km/h]
飽和交通流率 q_{max}	1600 [veh/h]
渋滞密度 k_j	160 [veh/km]
交差点間距離	200 [m]
サイクル長	48 [s]
全赤時間	3 [s]
スプリット	50 [%]

5. 近似解法の精度検証

本章では、前章までで構築した系統信号路線の期待遅れ評価法をモンテカルロ法による期待遅れの評価と比較し、その精度や特徴を分析する。

(1) 問題設定

ここでは、以下の 3 種類の道路路線を対象として数値実験を行う：

- ケース 1：孤立交差点
- ケース 2：系統のとれた二交差点
- ケース 3：系統のとれていない二交差点

これらの 3 ケースの実験について各 5 パターンの degree of saturation (50%, 85%, 100%, 150%, 200%) を用い、計 15 の実験を行う。いずれのケースについても定周期の信号制御パターンを用いる。各種パラメータは全道路で共通とし、その値は表 1 に示すとおりである。需要の到着を想定する時間は 288 秒 (6 サイクル) とし、その前に 40 秒、後に 60 秒のバッファ時間を設けている。また、初期状態は全く道路に車がない状態とする。ケース 2 では、オフセットを交差点間の片道自由旅行時間分に設定することで、非飽和状態であれば第一交差点を通過した全車両が停止することなく第二交差点を通過できるようにしている。一方、ケース 3 では、オフセットを片道自由旅行時間の 1.5 倍に設定しており、第一交差点を通過した全車両が第二交差点の通過までに少なくとも 1 回は停止することになる。

本研究では、ポアソン到着のもとでモンテカルロ計算を 50,000 回実行して得られた期待値を真値とし、これとの比較によって提案手法の誤差を算出する。提案手法の枠組みを最適信号制御問題²⁰⁾ に応用することを考えると、その目的関数は下流端の累積台数の期待値 $E[N_j]$ の和に帰着される。そこで、提案手法の誤差 [%] を以下のように定義する：

$$100 \times \frac{\sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} E[N_j] - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} E[N_j]^{monte}}{\sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} E[N_j]^{monte}} [\%] \quad (28)$$

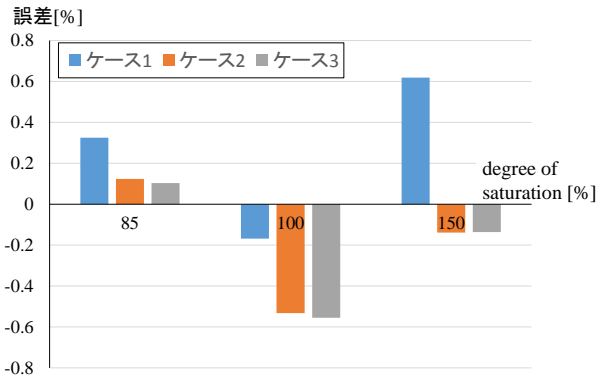


図-6 提案手法の誤差 (6 サイクル)

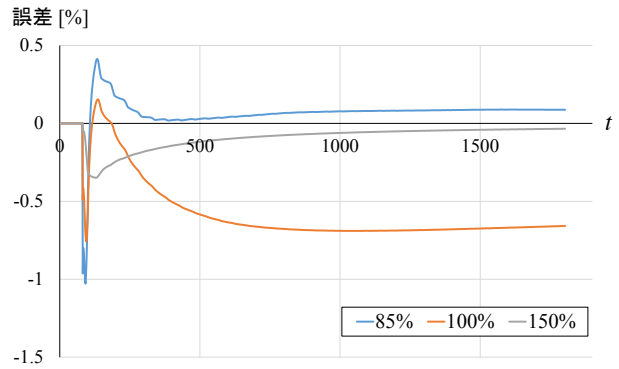


図-8 提案手法の誤差の時間推移

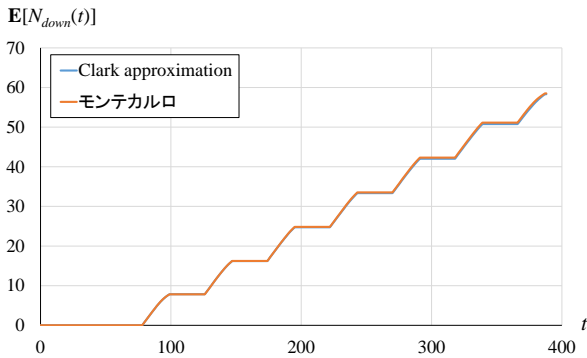


図-7 累積台数の期待値

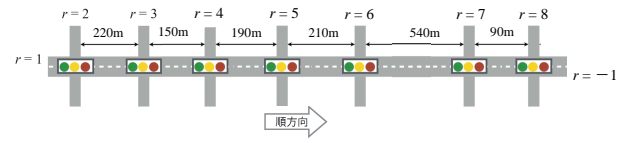


図-9 ケーススタディで用いる系統信号路線 (駒沢通り)

ここで、 $E[N_j]^{monte}$ は、モンテカルロ計算による下流端累積台数の期待値である。

(2) 実験結果

数値実験の結果得られた誤差を図 6 に示す。この結果、いずれのケースでも誤差は $\pm 1\%$ 程度におさまっており、精度のよい近似が行われていることがわかる。しかしながら、孤立交差点のケース (ケース 1) では下流端累積台数の過大評価が、複数交差点のケースでは過小評価がなされる傾向にある。また、道路が飽和状態 (degree of saturation = 100%) のときは、非飽和および過飽和状態に比べ、下流端累積台数が過小に評価される傾向もみてとれる。

ここで、上記の実験で誤差 0.55% となったケース 3, degree of saturation = 100% について、提案手法 (Clark approximation: 青線) およびモンテカルロ計算 (赤線) によって実際に算出された各時刻での下流端累積台数の期待値を図 7 に示す。この図でみると両曲線はほぼ完全に一致していることから、提案手法により十分な精度の近似が行われていることがわかる。

続いて、提案手法の誤差と対象時間との関係を見るために、ケース 3 における 30 分間の誤差の時間推移を図 8 に示す。この図から、初期段階では誤差の変動が大き

いが、おおよそ 15 分程度で誤差がほぼ一定値に収束することがわかる。また、収束速度は degree of saturation が 150% のとき最も早く、100% のときが最も遅い。初期の誤差が大きい理由としては、この段階ではポアソン分布が正規分布に十分近づいておらず、Clark 近似の誤差が特に大きいためだと考えられる。

6. 駒沢通りでのケーススタディ

最後に、提案手法の応用として、駒沢通りにおける系統信号制御の最適化のケース・スタディを行う。具体的には、和田ら²⁰⁾によって提案された Cross-Entropy 法に基づく最適信号制御問題の解法の中の目的関数評価に提案手法を組み込み、系統信号路線の期待遅れを最小化する最適信号パラメータを求める。そして、現状の信号パラメータ設定との期待遅れを比較する。

図 9 に示す駒沢通りの距離約 1400m の両側 2 車線区間を対象とする。r は各道路番号を表す。便宜上、左から右へ向かう方向 (r = 1) を主道路の順方向とし、左から交差点 1, 2, ..., 7 と呼ぶ。主道路のみ両方向交通を考え、交差道路はいずれも一方通行とする。各種パラメータは全道路で共通とし、その値は表 2 に示すとおりである。本研究では直進交通のみを扱っているため、交通需要は各道路の上流端で発生し、その道路の下流端まで走行する。需要の到着を想定する時間は、900 秒 (i.e., 15 分間) とし、初期状態は全く道路に車がない状態とする。

到着需要の期待値の設定には、2015 年 9 月 28 日 (月)

表-2 数値実験で用いるパラメータ値

FW 速度 v	40 [km/h]
BW 速度 w	15 [km/h]
飽和交通流率 q_{max}	1600 [veh/h]
渋滞密度 k_j	146.7 [veh/km]

~10月2日(金)の5日間の12:00~12:15の車両感知器データによる到着需要(上流端での交通量)の平均値を用いる。これは、対象道路区間が過飽和状態にならず、かつ、一時的な渋滞が観測された時間帯である。また、最適化において最低限確保すべき各交差点での最小青時間は、上記の5日間で実際に設定された各交差点の青時間のうち最も短かったものとする。全赤時間は、一般的な黄色時間および全赤時間だけでなく、対象としている動線に通行権が与えられていない時間帯(e.g., 右折専用現示)も含むものとして、2015年9月30日(水)12:00~12:15の実測値を用いる。7つの交差点のうち、最小サイクル長 $C_{min} = \frac{L}{1-\lambda}$ が最も大きな値となる交差点は交差点2で、最小サイクル長は $C_{min} = 68$ [秒]、Webster²⁾ によるポアソン到着の際の孤立交差点での最適サイクル長は $C_{opt} = \frac{1.5L+5}{1-\lambda} = 112$ [秒] となる。ここで、 L は全赤時間、 λ は需要率を表す。

本ケーススタディーでは、サンプル数 1000、抽出率 0.05 の CE 法(詳細は和田ら²⁰⁾を参照)を用いて、ポアソン到着の仮定のもとでのスプリット・オフセットの同時最適化を行う。また、既存の信号制御設定としては、上述の5日間のうちで最も平均に近い到着需要が観測された2015年9月30日(水)12:00~12:15の7交差点の信号制御データを採用する。この時間、対象道路区間では共通サイクル長 110 秒の定周期制御が行われていた。

まず、提案手法によってこの15分間の(現状設定での)期待遅れ時間を評価したところ、全道路・全車両の平均遅れ時間は46.3秒であった。これに対して、共通サイクル長を80秒から5秒刻みで120秒まで変化させてスプリット・オフセットを同時最適化、を行った結果を図10に示す。横軸は共通サイクル長、縦軸は15分間の全道路の平均遅れ時間を表す。この結果から、サイクル長95秒で遅れが最小化されており、これは Webster の式による最適サイクル長 112 秒よりも短い。この原因の一つとして、本実験のような複数の信号交差点を含むケースでは、孤立交差点の場合に比べ車群が整流化されやすいため、到着需要の不確実性の影響が低減されるという点が考えられる。また、交差点5・6間の往復自由旅行時間は約97秒であるため、それに近いサイクル長を採用することでこの区間の系統をうまくとれ

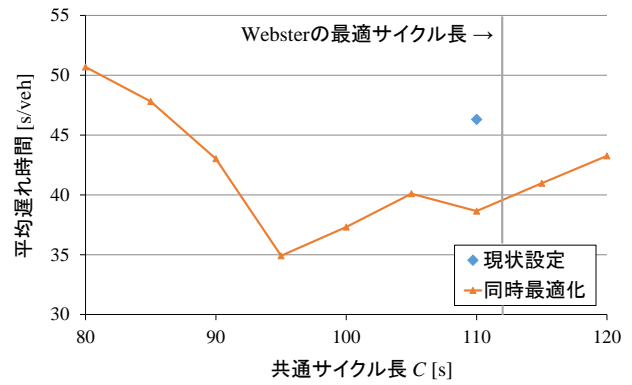


図-10 最適サイクル長の検討

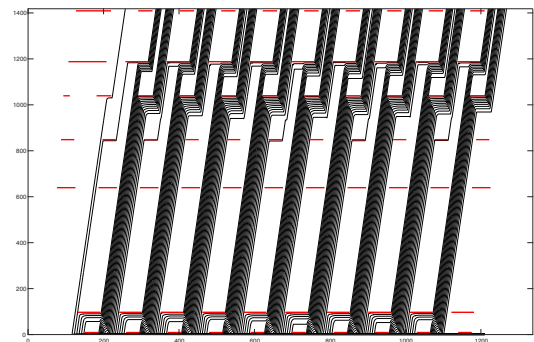


図-11 道路 $r = -1$ の車両軌跡の期待値(既存設定)

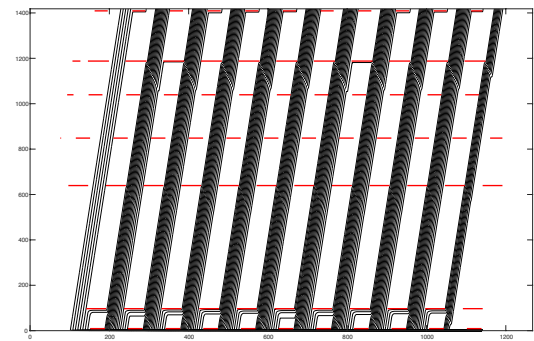


図-12 道路 $r = -1$ の車両軌跡の期待値(最適解)

るといふ点も挙げられる。その結果、現状の設定に比べ、車両一台あたりの平均遅れ時間は24.6%減少した。

ここで、対象道路の中で最も交通量の多かった道路 $r = -1$ について、既存信号設定と最適信号制御パターンをそれぞれ適用した際の、時空間図上の車両軌跡の期待値を図11、図12に示す。図11においても確認できるように、対象時間帯中には道路 $r = -1$ において、交差点2と6を起点とした交通渋滞が観測されていた。一方、最適信号制御パターンを適用すると(図12)、特に交差点2での渋滞が大きく解消されている。このこ

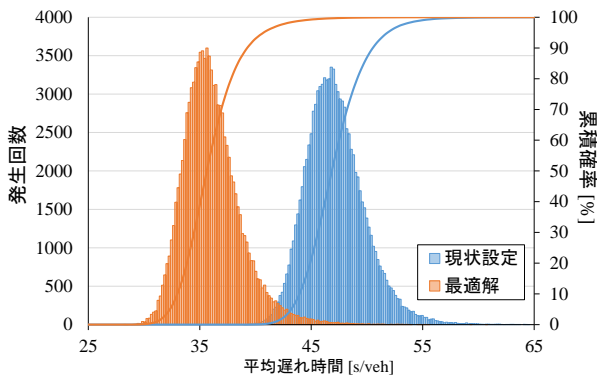


図-13 平均遅れの分布

とから、交通量の多い $r = -1$ 方向の交通を優先するようにオフセットが与えられたことにより、対象道路全体の遅れ時間が削減されていることがわかる。

さらに、現状設定および最適信号制御パターンのもとで、モンテカルロ計算を 100,000 回行って得られた全道路の平均遅れの分布形状を図 13 に示す。左軸は各平均遅れの発生回数（ヒストグラム）、右軸はその累積確率 [%]（実線）を表す。最適信号制御パターンを用いると、既存の信号制御設定に比べ、平均遅れの分布が全体的に左側、すなわち、遅れが小さくなる方向にシフトしており、二つの分布の重なっている領域はわずかである。また、分布の標準偏差は、既存設定が 2.69、最適解が 2.65 とほぼ同じであった。これらのことから、ここで示した最適信号制御パターンは、現状設定と比較して、遅れ時間のばらつきの大きさを増加させることなく遅れ時間の改善が実現されたといえる。

7. おわりに

本研究は、交通流の変分原理に基づく系統信号路線の期待遅れを評価する手法を提案した。具体的には、期待遅れ評価問題を多項プロビット・モデルと捉え、選択肢集合の縮小と Clark 近似を組み合わせた手法を構築した¹。モンテカルロ法との比較実験の結果、いずれのケースにおいても誤差の絶対値は 1% 以内におさまっており、提案手法の有効性が示された。また、提案手法を用いた信号パラメータの最適化のケーススタディでは、遅れ時間のばらつきの大きさを増加させることなく遅れ時間の改善がはかれる可能性が示された。これは、期待遅れに基づく信号パラメータ最適化が需要の確率変動に対してロバストであることを示唆していると考えられる。今後は、この手法を用いた系統的な数値実験によって、系統信号制御の最適制御パラメータ

¹ 本研究では、信号遅れの評価を目的とするため、これまでの信号研究と同様に FD は確定的であるとしたが、FD が確率変動する場合にも提案手法は拡張することができる²¹⁾。

の特性を分析していく予定である。

謝辞： 本研究に対しては、東北大学の桑原雅夫 教授、原祐輔 助教から有益なコメントを頂いた。本研究は、JSPS 科研費・基盤研究 A（課題番号 15H02270）、若手研究 B（課題番号 16K18163）の助成金を受けた研究の一部である。また、駒沢通りのケーススタディにおいては、警視庁より貴重なデータをご提供頂きました。ここに記し、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Cheng, C., Du, Y., Sun, L. and Ji, Y.: Review on theoretical delay estimation model for signalized intersections, *Transport Reviews*, in press. doi: 10.1080/01441647.2015.1091048
- 2) Webster, F. V.: *Traffic Signal Settings*, Road Research Technical Paper 39, H. M. Stationery Office, 1958.
- 3) 例えば, Akcelik, R.: *Time-Dependent Expressions for Delay, Stop Rate and Queue Length at Traffic Signals*, Internal Report AIR 367-1, Australian Road Research Board, 1980.
- 4) 例えば, Transportation Research Board: *Highway Capacity Manual*, 2010.
- 5) 越正毅: 系統交通信号におけるサイクル制御の研究, 土木学会論文報告集, Vol.241, pp.125133, 1975.
- 6) Koshi, M.: Cycle time optimization in traffic signal coordination, *Transportation Research Part A*, Vol.23, No.1, pp.29-34, 1989.
- 7) Jin, W.-L. and Yu, Y.: Performance analysis and signal design for a stationary signalized ring road, *arXiv preprint*, arXiv:1510.01216v1, 2015.
- 8) Lo, H. K.: A novel traffic signal control formulation, *Transportation Research Part A*, Vol.33, No.6, pp.433-448, 1999.
- 9) Lo, H. K.: A cell-based traffic control formulation: Strategies and benefits of dynamic timing plans, *Transportation Science*, Vol.35, No.2, pp.148-164, 2001.
- 10) Lo, H. K., Chang, E. and Chan, Y. C.: Dynamic network traffic control, *Transportation Research Part A*, Vol.35, No.8, pp.721-744, 2001.
- 11) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B*, Vol.39, No.2, pp.187-196, 2005.
- 12) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, *Transportation Research Part B*, Vol.39, No.10, pp.934-950, 2005.
- 13) 和田健太郎, 瀧川翼, 桑原雅夫: ネットワーク・モデリングによる系統交通信号の最適化, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.71, No.4, pp.168-180, 2015.
- 14) Han, K., Liu, H., Gayah, V. V., Friesz, T. L. and Yao, T.: A robust optimization approach for dynamic traffic signal control with emission considerations, *Transportation Research Part C*, doi:10.1016/j.trc.2015.04.001, 2015.
- 15) Clark, C. E.: The greatest of a finite set of random variables, *Operations Research*, Vol.9, No.2, pp.145-162, 1961.
- 16) Daganzo C. F., Bouthelie, F. and Sheffi, Y.: Multinomial probit and qualitative choice: A computationally efficient algorithm, *Transportation Science*, Vol.11, No.3, pp.338-358, 1977.
- 17) Deng, W., Lei, H. and Zhou, X.: Traffic state estimation and uncertainty quantification based on heterogeneous data sources: A three detector approach, *Transportation Research Part B*, Vol.57, pp.132-157, 2013.

- 18) Ross, A. M.: Useful bounds on the expected maximum of correlated normal variables, *Industrial and Systems Engineering*, No.03W-004, Lehigh University, 2013.
- 19) Horowitz, J. L., Sparmann, J. M. and Daganzo, C. F.: An Investigation of the Accuracy of the Clark Approximation for the Multinomial Probit Model, *Transportation Science*, Vol.16, No.3, pp.382-401, 1982.
- 20) 和田健太郎, 臼井健人, 柳沼秀樹: Cross-Entropy 法に基づ
く待ち行列の延伸を考慮した交通信号群の最適化, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol.71, No.5, pp.I.1055-I.1064, 2015 .
- 21) 高安杏奈, 原祐輔, 和田健太郎, 桑原雅夫: 入力データの確率変動を考慮した交通状態推定—Variational Theory に基づいた解析と検証—, 土木計画学研究・講演集, Vol.53, in press, 2016.

(平成 28 年 4 月 22 日 受付)

AN EXPECTED DELAY ESTIMATION METHOD FOR SIGNALIZED ARTERIAL ROADS: VARIATIONAL THEORY APPROACH AND ITS APPLICATION TO SIGNAL OPTIMIZATION

Kentaro WADA, Kento USUI, Takashi OGUCHI, Miho IRYO-ASANO

This paper proposes an approximation method of expected delay for signalized arterial roads under stochastic arrivals. This method is based on variational theory of traffic flow (VT). In VT under stochastic arrivals (e.g., Poisson arrival), traffic flow dynamics is described as the solution of the (multinomial probit model type) stochastic shortest path problem in the network on a space-time domain, which cannot be solved exactly. We, thus, propose the approximation method that consists of the following two procedures: (i) solution space reduction based on the characteristics of the shortest path; (ii) analytical evaluation of multiple integral by Clark approximation. Throughout the experimental comparison with a Monte Carlo simulation, we demonstrate that the error of the proposed method is extremely small. Finally, we show a case study of a coordinated traffic signal optimization as an application of the proposed method.