組成型モデルに関する空間統計学的考察

吉田　崇紘[1]・堤　盛人[2]

[1]学生会員　筑波大学　大学院システム情報工学研究科（〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1）
E-mail: yoshida.takahiro@sk.tsukuba.ac.jp

[2]正会員　筑波大学　システム情報系（〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1）
E-mail: tsutsumi@sk.tsukuba.ac.jp

定数和制約を付された多変量データである組成データの分析手法が地質学を中心に近年大いに発展している．組成データの標本空間は定数和制約から単体空間上に制限されるため，組成データを分析する際には，単体空間上のデータであることを明示的に考慮した手法を用いることが望ましいと考えられる．本研究では，組成データの分析手法の中でも，空間統計学に基づくアプローチが提案されるなど近年の発展が著しい組成データの統計モデル—組成型モデル—に着目する．Aitchison (1986) が提案した組成データ解析の対数比解析と単体解析という枠組みを用いて，既往の組成型モデルの位置付けを試みる．

Key Words : *compositional data analysis, log-ratio analysis, simplicial analysis, spatial statistics*

1.　序論

組成データ（compositional data）と呼ばれる多変量データの変量間の関係に定数和制約（constant-sum constraint）が付されたデータがある．近年，地質学を中心に組成データの統計モデルー組成型モデルーの構築が進んでいる．組成データは，定数和制約によって，変量間に疑似相関が生じていたり，標本空間が単体空間に制限されているなど，扱いに注意が必要なデータである．Aitchison (1986) によって定数和制約を解く手法が地質学分野で体系化され，その後理論・実証研究が進み，近年ではモデル化に重点を置いた書籍（Pawlowsky-Glahn et al., 2015）が出版されるなど，組成データの扱いは容易になりつつある．統計モデルも例外でなく，既存の多変量回帰モデルの組成データへの適用が進み，近年では空間的な依存関係を考慮するモデルー空間組成型モデルーの開発も行われている．

既存の組成型モデルの多くは，組成データを制約のない多変量データに変換してからモデル化を行う．定数和制約によって組成データには疑似相関が生じているため，通常の計量経済学（例えば，Greene, 2012）で広く用いられている見かけ上無相関な回帰（SUR: seemingly unrelated regression）モデルでも，回帰モデル間，すなわち変量間の相関をうまく表現できない．この対応として，モデル化の前に定数和制約を解く操作を行うことで，変量間の相関を表現可能にするアプローチをとることが多い．

組成データをモデル化する方法として，前述のような定数和制約を解いた上で分析するアプローチと，解かずに分析するアプローチの二つがある．前者のアプローチは，対数比解析（log-ratio analysis）と呼ばれ，組成データに対数比変換を施し，単体空間から分析ツールが豊富な実空間へ写像した上で，分析を行う方法である．他方，後者は単体解析（simplicial analysis）と呼ばれ，単体空間上で分析を試みる方法である．分析が容易な対数比解析を用いた研究が多いのが現状であるが，組成データの特性に沿うより自然なアプローチとして単体解析のアプローチを捉え，近年では単体空間上でモデル化を構築する手法も注目されている（Pawlowsky-Glahn et al., 2015）．

本稿では，組成型モデルの確立の示唆を得るために，これまでに取り組まれた研究のレビューを行い，空間組成型モデルの開発余地について議論する．まず，第二章で組成データ解析の概要を示しておく．つづいて第三章で既往の組成型モデルを整理し，第四章で対数比解析と単体解析の枠組みを用いて，既往モデルの位置付けを行う．そして第五章でまとめと今後の展望について述べる．

2.　組成データ解析

(1)　概説

前述のように，変量間の関係に定数和制約という条件が付された多変量データを地質学の分野では特に組成デ

ータと呼ぶ．組成データの例には，岩石の化学組成，市町村の年代別人口構成比，ゾーン間の交通機関分担率を挙げることができる．組成データ $\boldsymbol{a}$ の標本空間は次式（1）の単体空間 S^D に限定される．

$$S^D = \left\{ \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_D) \mid a_d > 0,\ d = 1, \ldots, D;\ \sum_{d=1}^{D} a_d = \kappa \right\} \quad (1)$$

ここで，κ は定数和であり，1 や 100 を与えることが多い．

組成データは，定数和制約により扱いに注意が必要である．組成データはある変量が増加するとその他の変量が強制的に減少するという疑似相関が生じてしまうことが知られている．組成データの扱いに関する問題は相関係数で知られる K. Pearson が 19 世紀末に提起していたが，定数和制約を解く操作として対数比変換を核に据え，組成データの解析手法をはじめて体系化した Aitchison (1986) が出版されるまで，その問題は長らく放置されていた（Chayes, 1960; Aitchison and Egozcue, 2005）．Aitchison (1986) 以後，20 世紀末と 21 世紀初頭にかけて理論研究・実証研究が進み，Pawlowsky-Glahn and Buccianti (2011), van den Boogaart and Tolosana-Delgado (2013)，Pawlowsky-Glahn et al. (2015) といった書籍が出版されるに至るなど，いままさに開花期を迎えている．

(2) 対数比変換

対数比をとることで組成データは，実空間上に写像される（例えば，Aitchison, 1986）．代表的な対数比変換法は，次式（2）に示す additive log-ratio (alr) 変換である．

$$\mathrm{alr}(\boldsymbol{a}) = \left(\ln\left(\frac{a_1}{a_D}\right), \ln\left(\frac{a_2}{a_D}\right), \ldots, \ln\left(\frac{a_{D-1}}{a_D}\right) \right) \quad (2)$$

$\mathrm{alr}(\boldsymbol{a})$ は，$(D-1)$ 次元の実空間 R^{D-1} に含まれる．サンプル $i\ (= 1, \ldots, n)$ が組成データ $\boldsymbol{a}_i$ をもつとき，$n \times D$ の組成データ行列 $\boldsymbol{A}$ は次式（3）のように表せる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1D} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nD} \end{pmatrix} \quad (3)$$

また，$\boldsymbol{A}$ を alr 変換するとは，

$$\mathrm{alr}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{alr}(\boldsymbol{a}_1) \\ \mathrm{alr}(\boldsymbol{a}_2) \\ \vdots \\ \mathrm{alr}(\boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

である．$\mathrm{alr}(\boldsymbol{A})$ は $n \times (D-1)$ 行列である．多変量回帰モデルを行う際は，ベクトル作用素を用いて $\mathrm{alr}(\boldsymbol{A})$ を，$n(D-1) \times 1$ にさらに変換し被説明変数とする．

3. 組成型モデル

(1) 非空間組成型モデル

組成データに対数比変換を行うと，制約のない多変量データとなることから，既存の多変量回帰モデルを用いることができる．多変量回帰モデルとして広く知られているモデルの一つに，SUR モデル（例えば，Greene, 2012）がある．SUR モデルは，複数の回帰モデル（式（5））を積み上げげて，単一の回帰モデル（式（6））を構築する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1, \\ \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \\ &\ \ \vdots \\ \boldsymbol{y}_M &= \boldsymbol{X}_M \boldsymbol{\beta}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_M. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{X}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_M \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\boldsymbol{y}$ は $n \times 1$ の被説明変数ベクトル，$\boldsymbol{X}$ は $n \times (p+1)$ の説明変数ベクトル，$\boldsymbol{\beta}$ は $(p+1) \times 1$ の係数ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は $n \times 1$ の誤差項ベクトルである．SUR モデルは複数の回帰モデルを積み上げたことで誤差項の球面性（sphericity）が満足されないため，通常最小二乗法の適用は望ましくない．このため，誤差項の分散共分散行列を，なにかしらの構造を仮定して与えるか，式（5）の M 個の残差ベクトルから推定するかして，一般化最小二乗法でパラメータを推定する（Greene, 2012）．

(2) 空間組成型モデル

属性情報に加え位置情報を持つ空間データを扱う分野である空間統計学では， 標本間の空間的な自己相関関係を用いることで誤差項の分散共分散行列の構造化を行う． 以下では，[1] 空間的な依存関係の捉え方，[2] 組成データの変量間の捉え方の二つの観点から，空間計量経済学（例えば，LeSage and Pace, 2009）と地球統計学（例えば，Cressie, 1993）に基づく空間組成型モデルを比較する．

a) 空間計量経済学に基づく空間組成型モデル

空間計量経済学においては，標本間の空間的な依存関係を記述した空間重み行列（spatial weight matrix）を導入することで被説明変数や誤差項間の相関のモデル化を行い，分散共分散行列を間接的に構造化する（瀬谷・堤, 2014）．空間計量経済学における多変量回帰モデルは，空間 SUR モデル（例えば，Anselin, 1988; Elhorst, 2014）や多変量条件付き自己回帰（MCAR: multivariate conditionally autoregressive）モデル（例えば，Mardia, 1988）が知られている．

空間計量経済学の枠組みの中で，組成データに対するモデル化を行った最近の研究に，Leininger et al. (2013) がある．Leininger et al. (2013) のモデルは，alr 変換を施して組成データを制約のない多変量データと置き換え，Mardia (1988) が提案した MCAR モデルに当てはめたモデルである．MCAR モデルは空間ランダム効果項を導入し，その事前分布の平均に空間的な依存関係を記述した空間重み行列を組み込むことで，空間的自己相関を考慮したモデルである．

いま，$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}_i)$ は地点 $\boldsymbol{u}_i$ における alr 変換した組成データで，$1\times(D-1)$の被説明変数ベクトルとし，データ生成過程を次式（7）のように仮定する．

$$\boldsymbol{Z}^t(\boldsymbol{u}_i) \sim \mathrm{MVN}_{(D-1)}(\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{V}) \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{B}$ は $(p+1)\times(D-1)$の係数パラメータ行列，$\boldsymbol{x}_i$ はサンプル i における $(p+1)\times 1$ の説明変数ベクトル，$\boldsymbol{\eta}_i$ はサンプル i における $(D-1)\times 1$ の空間ランダム効果ベクトル，$\boldsymbol{V}$ は $(D-1)\times(D-1)$ の分散共分散行列である．空間的な依存関係を記述するため，$\boldsymbol{\eta}_i$ に空間自己回帰型の事前分布を式（8）のように仮定する．

$$\boldsymbol{\eta}_i \mid \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j\neq i} \sim \mathrm{MVN}_{(D-1)}\left(\frac{1}{S_i}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\boldsymbol{\eta}_j, \frac{1}{S_i}\boldsymbol{\Psi}\right) \tag{8}$$

ここで，S_i は $n\times n$ の空間重み行列 $\boldsymbol{W}$ の第 i 行の行和，w_{ij} は $\boldsymbol{W}$ の第 i 行 j 列の要素，$\boldsymbol{\Psi}$ は $(D-1)\times(D-1)$ の分散共分散行列である．パラメータ推定にはベイズ推定が用いられる．適切な事前分布を設定すれば事後分布を標準的な確率分布で記述できることから，ギブス・サンプラーを用いたマルコフ連鎖モンテカルロ法によるパラメータ推定が可能である．

MCAR モデルにおける空間的な依存関係は，ランダム効果項の事前分布に組み込まれることで考慮されている．一方で，組成データの変量間の関係は式（7）の分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ で記述されうるが，考慮がなされていないことも確認できよう．

b) 地球統計学に基づく空間組成型モデル

地球統計学においては，誤差項の分散共分散行列を地理的な距離の関数で直接的に構造化を行う．地球統計学における多変量回帰モデルでは，自己共分散関数（auto-covariance）と相互共分散関数（cross-covariance）を導入して，分散共分散行列を構造化する共クリギング（co-kriging）法が知られている（例えば，Cressie, 1993; 李, 2009; Gelfand and Banerjee, 2010）．

組成データに適用されモデルに，Martin et al. (to appear) がある．Martin et al. (to appear) のモデルは，Leininger et al. (2013) のモデルと同様に，組成データに alr 変換を施すことで，実空間上でモデル化を図っている．このモデルは，Diggle and Ribeiro Jr. (2007) で詳述されている bivariate Gaussian common component geostatistical モデルを多変量に拡張したモデルを提案している．

いま，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u})$ を $n\times(D-1)$ の被説明変数行列，$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{Y}_1^t(\boldsymbol{u}), \ldots, \boldsymbol{Y}_{(D-1)}^t(\boldsymbol{u}))^t$ を $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{u})$の各列を順に縦に並べた $n(D-1)\times 1$ のベクトルとする．Martin et al. (to appear) では，$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u})$のデータ生成過程に次式（9）のような多変量正規分布を仮定している．

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) \sim \mathrm{MVN}_{n(D-1)}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1^t, \ldots, \boldsymbol{X}_{(D-1)}\boldsymbol{\beta}_{(D-1)}^t)^t$ は $n(D-1)\times 1$ の平均ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ は式（10）で表される要素をもつ $n(D-1)\times n(D-1)$の分散共分散行列である．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}_r(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{Y}_r(\boldsymbol{u}_i)) = \sigma_r^2 + \tau_r^2, \\
&\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}_r(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{Y}_r(\boldsymbol{u}_j)) = \sigma_r^2\rho(d, \varphi), \\
&\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}_r(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{Y}_s(\boldsymbol{u}_j)) = \sigma_r\sigma_s\boldsymbol{I}_2(i, j) + \tau_r\tau_s\boldsymbol{I}_3(i, j).
\end{aligned} \tag{10}$$

$\boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3$ はともに指示関数で，それぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_2(i, j) &= \begin{cases} 1 & (\text{if } i = j), \\ \rho(d, \varphi) & (\text{if } i \neq j), \end{cases} \\
\boldsymbol{I}_3(i, j) &= \begin{cases} \rho_{rs} & (\text{if } i = j), \\ 0 & (\text{if } i \neq j), \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

で定義される．σ^2 はパーシャル・シル（partial sill），τ^2 はナゲット（nugget），φ はレンジ（range），$d = \|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j\|$ は標本間のユークリッド距離，$\rho(\varphi, d)$ は φ, d 間の相関係数，ρ_{rs} は変量 r, s 間の相関係数，$i, j = 1, \ldots, n,$，$r, s = 1, \ldots, (D-1)$ である．式（11）は，空間的自己相関関係と変量間の相関関係を表す相互共分散関数である．なお，σ^2, τ^2 は変量ごとに可変であるが，φ は全変量で共通のパラメータであることに注意されたい．これは，空間的自己相関と変量間の相関の相互作用を無視し，独立に扱うための措置である．

パラメータ推定は $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u})$ のデータ生成過程に多変量正規分布を仮定していることから，対数尤度関数を導出することができる．係数パラメータと分散共分散行列のパラメータを，それぞれ

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^t, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{(D-1)}^t)^t, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{(D-1)}^2, \tau_1^2, \ldots, \tau_{(D-1)}^2, \varphi, \rho_{11}, \ldots, \rho_{{}_{(D-1)}C_2})^t \tag{13}$$

とまとめておく．対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u})) = &-\frac{n(D-1)}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}| \\
&-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{X\beta})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{X\beta})
\end{aligned} \tag{14}$$

と導出できるため，各パラメータは最尤法で推定するこ

とが可能である．すなわち，式（14）を最大化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}$ を求めればよい．具体的には，まず係数パラメータの最尤推定量が

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) \tag{15}$$

と表すことができることから，式（15）を式（14）に代入することで，$\boldsymbol{\lambda}$ に関する集中化対数尤度関数

$$\ell_c(\lambda; \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u})) = -\frac{n(B-1)}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}\right| - \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^t(\boldsymbol{u})\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}) \tag{16}$$

を得ることができる．ただし，

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}[\boldsymbol{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{X}]^{-1} \boldsymbol{X}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tag{17}$$

である．$\ell_c(\lambda; \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u}))$ は $\boldsymbol{\lambda}$ に対して非線形の関数であるため，$\boldsymbol{\lambda}$ の最尤推定量は準ニュートン法（例えば，Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno法）などの非線形最適化法によって求めることができる．

4. Aitchison (1986) の分類に基づく空間組成型モデルの位置付け

組成型モデルは，単体空間から実空間に組成データを写像したのちSURモデルのように回帰モデルを構築する手法と，単体空間上で回帰モデルを構築する手法がある．回帰モデルに限らず，前者のような，実空間に写像して組成データを分析する手法は，対数比変換を用いることから，総じて対数比解析と分類される．他方，後者は，単体空間上で分析することから単体解析と呼ばれ，対数比解析と明確に区別される．Aitchison (1986) では，組成データの二つの解析手法を並列に議論している（太田・新井，2005）．

前章で取り上げた空間組成型モデルは，Aitchison (1986) が導入した枠組みに当てはめれば，どちらのモデルも対数比解析と分類されよう．対数比解析の利点は，実空間上のモデルとして蓄積されてきた様々な手法を適用可能な点である．また，組成データに対しては，対数比変換という一つの追加操作を行うだけよく，実装が容易という点も利点に挙げられる．しかし，例えば式（10），（11）で記述された変量間の相関は，実際のところ対数比変換した変量間の相関であり，そこから変量間の相関について解釈を行うのは難しい．無論，組成データに直接多変量回帰モデルを用いることで変量間の相関を計算することはできるが，定数和制約による疑似相関に曝される．対数比解析に分類される組成型モデルはこの点に限界があると考えられる．

一方，単体解析に分類可能な回帰モデル（例えば，Pawlowsky-Glahn and Egozcue, 2001; van Enyatten et al., 2003; Tolosana-Delgado and van Enyatten, 2009; Egozcue et al., 2011; Pawlowsky-Glahn et al., 2015）は，筆者の知る限り，実空間における古典的線形回帰モデル（Greene, 2012）に対応するモデルのみが現状で整備されている．現状で利用可能なモデルが少ないが，組成データの特性に沿うモデルと考えられる．

5. 結論

本稿では，Aitchison (1986) で提示された対数比解析と単体解析という枠組みを用いて，空間統計モデルを含むこれまでに提案されてきた組成型モデルの位置付けを行った．Aitchison (1986) の枠組みで地球統計モデルと空間計量モデルを捉えれば，現状提案されている空間組成型モデルはどちらも対数比解析に分類されうる．組成データの扱い方は，変換操作を伴う対数比解析と比べて，単体解析がより組成データの特性に則した手法である（Aitchison and Egozcue, 2005）．今後，単体解析に位置づけれる空間組成型モデルの方法論が確立することで，多変量データにおける空間統計モデルの確立へと発展していくことが期待される．

参考文献

1) Aitchison, J.: *The Statistical Analysis of Compositional Data*, Chapman & Hall, 1986.
2) Aitchison, J. and Egozcue, J. J.: Compositional data analysis: Where are we and where should be heading? *Mathematical Geology*, Vol.37, No.7, pp.829–850, 2005.
3) Anselin, L.: *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
4) Anselin, L.: Spatial Econmetrics, In *A Companion to Theoretical Econometrics* (eds.: Baltagi, B. H.), Blackwell Publishing, pp.310–330, 2001.
5) Chayes, F.: On correlation between variables of constant sum, *Journal of Geophysical Research*, Vol.65, No.12, pp.4185–4193, 1960.
6) Cressie, N. A. C.: *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*, John Wiley & Sons, 1993.
7) Diggle, P. J. and Ribeiro Jr., P. J.: *Model Based Geostatistics*, Springer, 2007.
8) Elhorst, J. P.: *Spatial Econometrics: From Cross-Sectional Data to Spatial Panels*, Springer, 2014.
9) Egozcue, J. J., Daunis-i-Estadella, J., Pawlowsky-Glahn, V., Hron, K., and Filzmoser, P.: Simplicial regression. The normal model, *Journal of Applied Probability and Statistics*, Vol.6, No.1, pp.87–108, 2011.
10) Gelfand, A. E. and Banerjee, S.: Multivariate Spatial Process Models, In *Handbook of Spatial Statistics* (eds.: Gelfand, A. E., Diggle, P. J., Fuentes, M., and Guttorp, P.), Chapman & Hall/CRC Press, pp.495–515, 2010.
11) Greene, W. H.: *Econometric Analysis, 7th Edition*, Pearson Education, 2012.

12) LeSage, J. and Pace, R. K.: *Introduction to Spatial Econometrics*, Chapman & Hall/CRC Press, 2009.
13) Leininger, T., Gelfand, A., Allen, J., and Silander, J.: Spatial Regression Modeling for Compositional Data With Many Zeros, *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, Vol.18, No.3, pp.314–334, 2013.
14) Mardia, V.: Multi-dimensional Multivariate Gaussian Markov Random Fields with Applications to Image Processing, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol.24, No.2, 265–284, 1988.
15) Martin, A. B. T., Bonat, W. H., and Ribeiro Jr., P. J.: Likelihood analysis of a class spatial geostatistical compositional model, *Spatial Statistics*, to appear.
16) Pawlowsky-Glahn, V. and Buccianti, A. (Eds.): *Compositional Data Analysis: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 2011.
17) Pawlowsky-Glahn, V. and Egozcue, J. J.: Geometric approach to statistical analysis on the simplex, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Vol.15, pp.384–398, 2001.
18) Pawlowsky-Glahn, V., Egozcue, J. J., and Tolosana-Delgado, R.: *Modeling and Analysis of Compositional Data*, John Willy & Sons, 2015.
19) Tolosana-Delgado, R. and von Eynatten, H.: Grain-size control on petrographic composition of sediments: Compositional regression and rounded zeros, *Mathematical Geoscience*, Vol.41, Issue 8, pp.869–886, 2009.
20) van den Boogaart, K. and Tolosana-Delgado, R.: *Analyzing Compositional Data with R*, Springer, 2013.
21) von Eynatten, H., Barceló-Vidal, C., and Pawlowsky-Glahn, V.: Modelling compositional change: The example of chemical weathering of granitoid rocks, *Mathematical Geology*, Vol.35, No.3, pp.231–251, 2003.
22) 太田亨，新井宏嘉：組成データ解析の問題点とその解決方法，地質学雑誌，Vol.112，No.3，pp.173–187，2006.
23) 瀬谷創，堤盛人：空間統計学－自然科学から人文・社会科学までー，朝倉書店，2014.
24) 李勇鶴：空間統計手法を応用した地価の時空間内挿に関する研究，東京大学学位論文，2009.

(2016. 4. 22 受付)