Nested Logitモデルを用いた Variational Theoryの確率的拡張

原　祐輔[1]・桑原　雅夫[2]

[1]正会員　東北大学大学院　情報科学研究科 助教（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-06）
E-mail: hara@plan.civil.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学大学院　情報科学研究科 教授（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-06）
E-mail: kuwahara@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は Daganzo が提案した，交通流理論を変分原理と線形 Fundamental Diagram (FD) を用いて解く手法 (Variational Theory) を確率的に拡張する手法を提案する．提案手法は，最短経路探索と確率的交通量配分の関係性を援用し，FD ネットワーク上での確率的配分として問題を捉える．また，車両感知器の計測誤差の累積を Nested Logit モデルを用いてモデル化することにより，物理現象との整合性の取れたモデル化を行う．本研究の成果として，time-space 上の任意の地点の期待累積高さが再帰的なログサム変数として記述できることを示した．

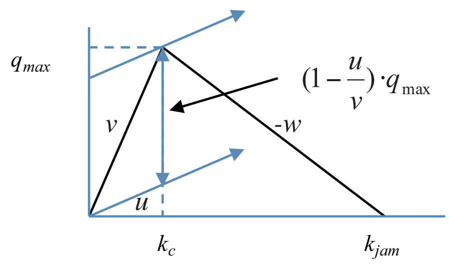
Key Words : *traffic flow theory, variational theory, stochastic network assignment, nested logit model*

1.　はじめに

交通流理論 (Kinematic Wave Theory) を変分原理を用いて解く方法として，Daganzo[1),2)]が提案した Variational Theory(以下 VT) が存在する．この方法により，境界条件の累積交通量が与えられれば，任意の地点の累積交通量を求めることができることが示された．そして，Mehran et al. [3)]はプローブ車両軌跡と道路上流・下流に設定された車両感知器による累積交通量を境界条件として，一般道における VT の適用を行っている．

Daganzo による手法[2)]の興味深い点は，交通流理論の問題の解法を，time-space 図上の最短経路探索というネットワーク問題へと帰着させた点にある．ネットワーク上の最短経路探索の問題であるならば，交通ネットワーク配分問題における all-or-nothing 配分と確率的交通量配分の関係性[4)]のように，確率的な拡張が可能なはずである．

そこで，本研究は VT の近似的な解法である Daganzo の手法[2)]に確率的な変動を導入する．これは車両感知器による計測誤差や Fundamental Diagram (FD) の形状の確率的な変動を考慮するものである．本研究では，特に車両感知器による計測誤差の累積量に存在する誤差項の相関を取り扱うために，time-space 図上のネットワークを Multi-level の Nested Logit モデル[5)]として解釈可能なように定式化する．これにより，time-space 図上の任意の地点の累積高さの期待値が，Multi-level のログサム変数として得られることを示す．

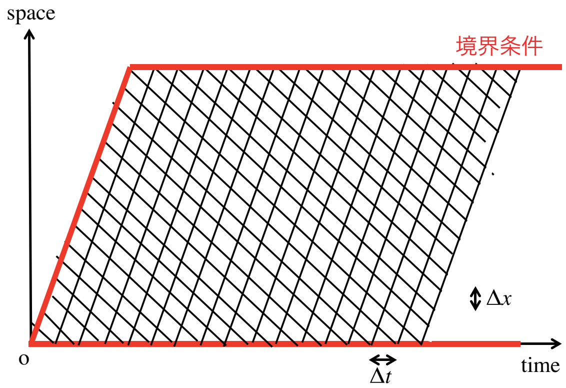


図–1　線形 FD の設定

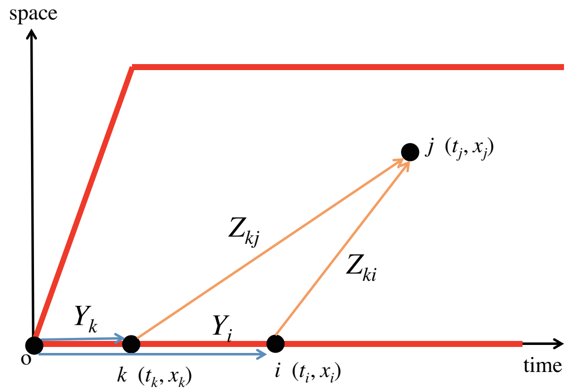
2.　VT の問題設定

本研究の設定は，Mehran et al. [3)]に従い，time-space 図上の境界条件として，道路の上流部・下流部における車両感知器とプローブ車両が与えられているとする．このとき，time-space 図上の任意の地点の累積高さを求めることを問題として設定する．一般に，均一な道路区間は道路の幾何構造から，同一の FD 形状をしていると考えても差し支えがない．ここで，簡単化のために，FD の形状は**図–1** のように Forward Wave Speed v と Backward Wave Speed $-w$ の 2 種類の wave speed しかもたない線形 FD として設定する．u は自身の移動速度である．

この線形 FD を用いて，time-space 図を時間方向 Δt，空間方向に Δx の微小区間に分割・離散化したネットワーク**図–2** を考えよう．これは time-space 図を微小な線形 FD で敷き詰めたネットワークに相当する．このネットワーク上のリンクコストは，Forward wave に沿ったリンクコストは 0，Backward wave に沿ったリンク



図–2 線形 FD によるネットワーク



図–3 FD ネットワーク上の経路分解

コストは $k_{max} \cdot \Delta x$ として設定する．

Boundary ノードの累積高さは境界条件から得られているため，time-space 図上の任意の地点の累積高さは，このネットワークにおいて，すべての Boundary ノードから最短経路探索をした結果，得られた最小値として得られる．

3. VT の確率的拡張

(1) 問題の再定義

線形 FD を用いた場合，VT は Boundary ノードからすべてのノードまでの最短経路を求める問題になることを Daganzo[2] が証明している．したがって，すべてのリンクコストが与えられている場合，**2.** に記述したように，1 起点多終点のネットワークにおいて，起点からすべてのノードに 1 単位の需要を最小費用で流す最適化問題として定式化できる．

現実的には，境界条件で得られる累積高さに誤差が生じている場合や仮定している線形 FD の形状に誤差が生じている場合が存在し，その結果として VT で得られる time-space 上の任意のノードの累積高さは確率的に変動しうる．そこで，これらの確率変動を考慮した上での VT の確率的な拡張を考えよう．

図–1 に示す，時間を Δt，空間を Δx の微小区間に分割・離散化し，離散化した格子点をノードとするネットワークを考える．起点ノード o から time-space 図上の任意のノード j までの期待最小費用を考える．この期待最小費用はノード j の期待累積高さに対応する．

まず，**図–3** に示すように，起点ノード o からノード j までの経路費用を，Boundary ノード i までのリンクコスト Y_i と Boundary ノード i からノード j までのリンクコスト Z_{ij} に分割して考える．リンクコスト Y_i は Boundary ノード i の累積高さに対応し，リンクコスト Z_{ij} はノード i からノード j までの間に増加する累積高さ (moving observer が追い越される台数) に対応する．

ノード j の期待累積高さを求めるためには，ノード j の累積高さを決定するための Boundary ノードがノード i である確率 (ノード i 経由の経路が最小コストになる確率) が必要である．これは次式で定義できる．

$$P_i^j = Prob(Y_i + Z_{ij} \leq Y_k + Z_{kj} \quad \forall k \neq i,\ i,k \in \Omega_j) \tag{1}$$

ここで，ノード j にアクセス可能な Boundary ノードの集合を Ω_j とする．以降，この確率モデルを定式化することに主眼を置く．

(2) FD 形状に依存するリンクコスト

まず，FD の形状に対する確率的変動が点 j の累積高さに与える影響について解析する．

Boundary ノード i から j への累積台数の変化は次のように書ける．

$$Z_{ij} = \int_{t_i}^{t_j} \sup_{k(x,t)} \left(q(k(x,t),x) - k(x,t)u(x,t)\right) dt \tag{2}$$

特に，線形 FD をもつ均一区間の場合には以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= \int_{t_i}^{t_j} (1 - \frac{u}{v}) \cdot q_{max} dt = q_{max}(1 - \frac{u}{v})(t_j - t_i) \\ &= q_{max}(t_j - t_i) - k_c(x_j - x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

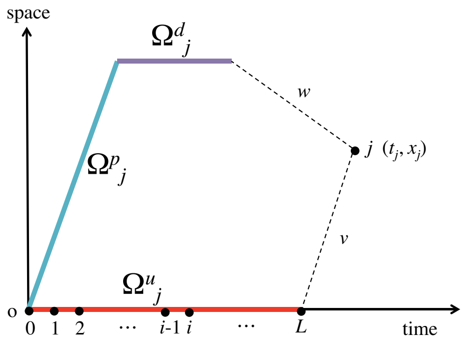
ここで，q_{max} は最大交通量，k_c はクリティカル密度である．

この式は q_{max} と k_c のみに依存するように見えるが，Backward wave speed w が変化すると，Backward wave が到達できる範囲が変化するため，w にも依存する．すなわち，q_{max}, k_c, w の 3 つの変数に依存するということは，FD の形状に依存するということと同値である．

以上より，最大交通量やクリティカル密度，Backward wave speed が確率的に変動するとすると，Boundary ノード i から j までの累積高さの変化は

$$Z_{ij} = Q_{max}^{ij}(t_j - t_i) - K_c^{ij}(x_j - x_i) \quad \forall i \in \Omega_j \tag{4}$$

と書くことができる．ここで，最大交通量 Q_{max}^{ij}，クリティカル密度 K_c^{ij}，Backward wave speed W^{ij} は任意の ij に対して，i.i.d. な確率分布に従うと仮定する．そ



図–4 点 j にアクセス可能な Boundary ノード集合の分割

の際，それぞれの期待値を $\bar{q}_{max}, \bar{k}_c, \bar{w}$ とすると，確率変数の誤差項部分を分離し，

$$Z_{ij} = \left\{\bar{q}_{max}(t_j - t_i) - \bar{k}_c(x_j - x_i)\right\} + \epsilon_{q_{ij}} + \varepsilon_{k_{ij}} \quad \forall i \in \Omega_j \tag{5}$$

とすることができる．ここで，$\epsilon_{q_{ij}}$，$\varepsilon_{k_{ij}}$ は平均 0 の確率分布に従う．ここで，これらの誤差項が i.i.d. なガンベル分布に従うと仮定する．

(3) Boundary ノードの累積高さによるリンクコスト

次に，Boundary ノードの累積高さの確率的変動が点 j の累積高さに与える影響を解析する．

Boundary ノードの集合 Ω_j を**図–4** のように，上流 Ω_j^u，下流 Ω_j^d，車両境界 Ω_j^p の 3 つの集合に分割する．次に，表記を単純化するために，上流の集合に含まれるノードを対象として，Boundary ノードの累積高さを表すリンクコストの定義を行う．これは下流集合，車両境界集合にも一般化可能である．

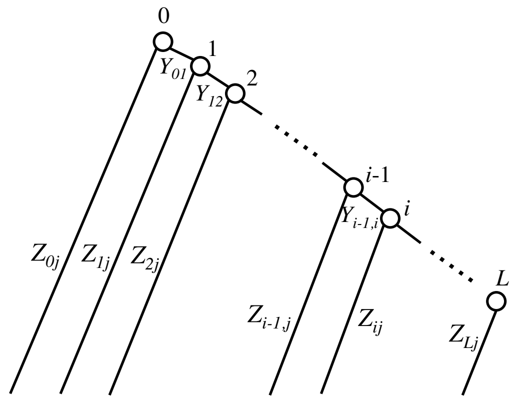
上流 Boundary ノード集合 Ω_j^u に対し，時間の早い順に各ノードに $0, 1, 2, \dots i-1, i, \dots L$ とインデックスをつける．連続する任意のノード $i-1, i$ 間のリンクコストは 2 つのノード間の真の累積高さの差であり，$Y_{i-1,i}$ と定義する．一方で，ノード $i-1$, i 間の観測された累積高さの差は $y_{i-1,i}$ と定義する．真の累積高さの差 $Y_{i-1,i}$ と観測された累積高さの差 $y_{i-1,i}$ との間には誤差 $\varepsilon_{i-1,i}$ が存在するため，以下の関係式が成り立つ．

$$Y_{i-1,i} = y_{i-1,i} + \varepsilon_{i-1,i} \qquad \forall i-1,\ i \in \Omega_j^u \tag{6}$$

次に，インデックス 0 のノードの累積高さを y_0 台目と設定する．このとき，各上流 Boundary ノード集合 Ω_j^u 上の任意のノード $i (i \neq 0)$ の累積高さ Y_i は

$$\begin{aligned} Y_i &= y_0 + \sum_{i=1}^{i} Y_{k-1,k} \\ &= y_0 + \sum_{i=1}^{i} y_{k-1,k} + \sum_{i=1}^{i} \varepsilon_{k-1,k} \end{aligned} \tag{7}$$

として定義できる．ここで，各誤差項 $\varepsilon_{k-1,k}$ はガンベル分布に従うとする．インデックス i が大きくなるにつれて，過去の誤差が累積するため，各ノードがもつ総誤差は独立な分布には従わない．



図–5 経路重複問題の Nested Logit 表現

これらの累積する誤差を取り扱うために，現在考えている問題を，経路重複が存在する確率的交通量配分の問題として捉え直すことにしよう．求めたい確率は上流 Boundary ノード i が Boundary ノード集合内で最後に通過するノードである確率であり，再掲すると

$$P_i^j = Prob(Y_i + Z_{ij} \leq Y_k + Z_{kj} \quad \forall k \neq i,\ i, k \in \Omega_j)$$

である．Z_{ij} が与えられており，各 Z_{ij} が独立であると仮定すると，この確率は上流 Boundary ノード上で経路重複が存在する経路選択モデルとして解釈できる．これは**図–5** で表される Multi-level の Nested Logit モデルとして記述できる．ノード 0,1 間の誤差項 ε_{01} はノード 1 以降の上流 Boundary ノードすべての累積高さに影響を与えるが，ノード $i-1$,i の誤差項 $\varepsilon_{i-1,i}$ はノード i 以降の上流 Boundary ノードの累積高さにしか影響を与えないことを Nested Logit モデルを用いてモデル化する．

ノード $i-1$ からみたとき，$Z_{i-1,j}$ の経路に進むか，ノード i 方向へ進むかの二項選択において，$Z_{i-1,j}$ の経路に進む確率 (Boundary ノード集合内で最後に通過するノードが $i-1$ である確率) は次のように記述できる．

$$P_{i-1}^j = \frac{\exp(-\frac{Z_{i-1,j}}{\theta_{i-1}})}{\exp(-\frac{Z_{i-1,j}}{\theta_{i-1}}) + \exp(-\frac{y_{i-1,i}+X_i}{\theta_{i-1}})} \tag{8}$$

ここで，X_i はノード i 以降のすべての経路の期待最小費用であり，次のような再帰的なログサム変数として記述できる．

$$X_i = \theta_i \log\left(e^{-\frac{Z_{ij}}{\theta_i}} + e^{-\frac{(y_{i,i+1}+X_{i+1})}{\theta_i}}\right) \ \forall i \in \Omega_j^u \tag{9}$$

$$X_L = Z_{Lj} \tag{10}$$

また，θ_i, θ_{i-1} は各ネストにおけるガンベル分布の分散の大きさを決定するスケールパラメータである．

このような Multi-level の Nested Logit モデルは，各ネストにおけるスケールパラメータ θ_i と用いて，各経路間の誤差項の相関を**図–6** に示す共分散構造によって表すことができる．この共分散構造から，重複経路が

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{path}_{0j} & \text{path}_{1j} & \text{path}_{2j} & \text{path}_{3j} & \text{path}_{4j} & & \end{array} & \\
\dfrac{\pi^2}{6} & \begin{bmatrix}
\theta_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & \theta_0^2 & \theta_0^2-\theta_1^2 & \theta_0^2-\theta_1^2 & \theta_0^2-\theta_1^2 & & \\
0 & \theta_0^2-\theta_1^2 & \theta_0^2 & \theta_0^2-\theta_2^2 & \theta_0^2-\theta_2^2 & \cdots & \\
0 & \theta_0^2-\theta_1^2 & \theta_0^2-\theta_2^2 & \theta_0^2 & \theta_0^2-\theta_3^2 & & \\
0 & \theta_0^2-\theta_1^2 & \theta_0^2-\theta_2^2 & \theta_0^2-\theta_3^2 & \theta_0^2 & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & & & & \theta_0^2
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{path}_{0j} \\ \text{path}_{1j} \\ \text{path}_{2j} \\ \text{path}_{3j} \\ \text{path}_{4j} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

図–6 各 Boundary ノードにおける累積高さの誤差項間の相関構造

多い経路，つまり起点ノードから時間方向に大きく離れた Boundary ノードはそれまでの Boundary ノードと相関があることをモデル化できている．

(4) 任意の地点における期待累積高さ

最後に，本研究が求めたい任意の地点 j における期待累積高さは式 (9) で表される再帰的なログサム変数の関係をネストの頂点 0 ノードまで遡ったものとして表現できる．

ログサム変数はそのノードまでの期待最小化費用を表すことが知られている．したがって，Multi-level の Nested Logit モデルのログサム変数を再帰的に頂点ノード 0 まで求めれば，time-space 上の点 j へ向かう全ての経路を考えた場合の期待最小費用（本問題では期待累積高さ）を求めることができる．ここで，得られた期待累積高さから，車両感知器の計測誤差が累積高さに与える影響や FD 形状が累積高さに与える影響を解析することができる．

4. おわりに

本研究の成果をまとめる．これまでの Daganzo の方法では，Variational Theory は deterministic な解しか得ることができなかった．それに対して，本研究は境界条件や FD 形状の確率的な変動が任意の地点の累積高さに与える影響について解析可能なように，Variational Theory を確率的に拡張する一つの方法を提案した．この考え方は交通ネットワーク配分問題における all-or-nothing 配分と確率的交通量配分の関係に相当し，これまでの確率的交通量配分問題で蓄積された多くの研究の知見を用いて，Variational Theory の拡張が可能となることを示している．

例えば，本研究で FD 形状に依存するリンクコストの誤差項を独立と仮定している点を，FD ネットワーク上の重複する経路の選択問題と考えることができる．その場合，原・赤松[6]が提案したような Network GEV 型経路選択モデルによる確率的交通量配分と同様の考え方で，Varitational Theory の確率的拡張を行うことができると想定される．

また，これらの VT の確率的拡張は，川崎ら[7]が行っている VT をシステムモデルとしたデータ同化を行う際にも基礎的な知見として有用である．

本研究の今後の課題として，本研究が提案するモデルを効率的に解くための解法が必要とされる．そのために，本モデルの等価最適化問題を定式化することが重要である．

謝辞:

本研究は文部科学省 委託事業「実世界ビッグデータの利活用のための高性能データ融合解析技術の研究開発」の助成を受けたものです．記して感謝致します．

参考文献

1) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B*, Vol.39, pp.187–196, 2005.
2) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, *Transportation Research Part B*, Vol.39, pp.934–950, 2005.
3) Mehran, B., Kuwahara, M. and Naznin, F.: Implementing kinematic wave theory to reconstruct vehicle trajectories from fixed and probe sensor data, *Transportation Research Part B*, Vol.20, Issue 1, pp.144–163, 2012.
4) 土木学会交通ネットワーク出版小委員会：交通ネットワークの均衡配分 最新の理論と解法, 土木学会, 1998.
5) Daly, A.: Estimating “tree” logit models, *Transportation Research Part B*, Vol.21, No.4, pp.251–267, 1987.
6) 原祐輔, 赤松隆：Network GEV 型経路選択モデルを用いた確率的利用者均衡配分, 土木学会論文集 D3, Vol.70, No.5, pp.611–620, 2014.
7) 川崎洋輔，原祐輔，桑原雅夫：交通流理論の状態空間モデルへの拡張，土木計画学研究・講演集，Vol.51, CD-ROM, 2015.

(2015. 7. 31 受付)

STOCHASTIC EXTENSION OF VARIATIONAL THEORY USING NESTED LOGIT MODEL

Yusuke HARA, Masao KUWAHARA