分岐メカニズムにもとずく都市集積パターンの空間周波数分析

小松 大地[1]・池田 清宏[2]・高山 雄貴[3]

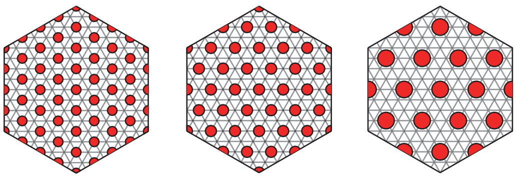
[1]東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: komatsu@msd.civil.tohoku.ac.jp
[2]東北大学教授 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: ikeda@civil.tohoku.ac.jp
[3]東北大学助教 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: takayama@civil.tohoku.ac.jp

都市の空間分布に関して, 今日では新経済地理学モデルを用いた人口の集積・分散の分岐解析によって, 中心地理論で提唱された正六角形状の都市集積パターンの発現が確認されている. しかし, 都市の分布パターンの特徴を捉える定量的な指標が確立されていないため, 前述した正六角形分布と実空間における都市の空間分布との整合性の検証は, いまだ十分にはされていない. そこで本研究では, 群論的分岐理論に基礎をもつ, 都市集積パターンの空間周波数分析手法を提案する. そしてこの手法の特性, 有用性および発展性を示すために, Ikeda et al. で得られたシミュレーション結果ならびにフランクフルト近傍の人口分布を周波数分析し, 分布パターンの特徴を定量的に評価する.

Key Words : *new economic geography: spatial frequency analysis; central place theory; group-theoretic bifurcation theory*

1. はじめに

都市の空間分布の規則性や人口集積のメカニズムに関する代表的な研究として, 経済地理学分野の中心地理論が挙げられる. この理論によれば, 財やサービスの供給を受ける都市はその生産を担う都市を中心として, k システムと呼ばれる正六角形状の分布パターンを形成し, 生産可能な財やサービスの種類によって, 図 1 に示すような異なる六角形市場域を構成する [1]. このように都市の自己組織化を中心地理論では財やサービスに着目して説明しているものの, その導出は幾何学的考察に基づいたものであり, ミクロ経済学的な根拠の欠落が指摘されている [2].



図–1 六角形市場域 (k system)

Ikeda et al.[3] は空間モデルとして 2 次元の 3 角形メッシュにより形成された周期境界を有するひし形領域を考案し, ミクロ経済学的基礎をもつ新経済地理学モデル (Forslid & Ottaviano モデル [4]) を用いた人口集積の分岐解析 [5] を行った. この研究により都市の集積・分散現象で発現可能な分布パターンを網羅的に求めることが可能になり, 二次限無限平面における正六角形状分布パターンの発現がミクロ経済学的根拠に則っていることを証明した. さらに, 境界部を有する正六角形領域を用いた人口集積シミュレーションによって, より現実に近い空間モデルにおける人口分布と中心地理論との整合性を検証した.

しかし, 都市の分布パターンの評価における定量的な指標が存在しないことから, シミュレーション結果と実空間との整合性に関しては, 定性的な議論しかなされていない. 加えて中心地理論が実空間においてどの程度発現しているのかといったことも, 同様の理由で数理的には分析されておらず, 理論の実空間における正当性は定性的な判断にゆだねられていた.

そこで, 本研究では Ikeda and Murota [6] の群論的分岐理論に基礎をもつ人口分布パターンの理論予想を用いた, 人口分布の空間周波数分析手法を提案する. この分析により, 都市の空間分布においてどのような分布パターンがどの程度支配的なのかを定量的に評価可能となり, 実空間と中心地理論や経済モデルを用いたシミュレーションとの整合性の検証ができる.

本稿では, まず空間周波数分析の特性の把握のために, Ikeda et al. の二次元無限平面におけるシュミレーション

結果に対し分析を行う. また, 中心地理論との整合性の検証が不十分であった有限平面におけるシミュレーション結果に対しても分析を行い, 中心地理論との整合性を定量的に評価し, この手法の有用性を示す. そしてとしてフランクフルト周辺の人口分布に対して周波数分析を行い, 複雑な空間分布においても分布の特性が周波数分析によって捉えられていることを示す.

2. 分析手法

(1) 座標変換行列

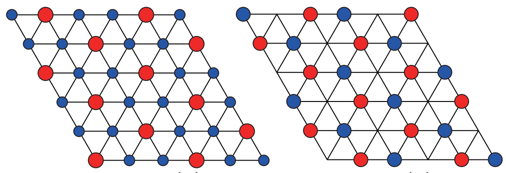
Ikeda & Murota[6] は, 6 × 6 メッシュで分割された場合の座標変換行列 Q を次のように定義している.

$$Q = (Q^{(1)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}, Q^{(9)}, Q^{(12)}, Q^{(36(\mathrm{I}))}, Q^{(36(\mathrm{II}))})$$
$$Q^{(k)} = (\boldsymbol{q}_1^{(k)}, \boldsymbol{q}_2^{(k)}, \ldots), \qquad k = 1, 3, 4, 9, 12, 36(\mathrm{I}), 36(\mathrm{II})$$

上式において, 各ブロック $Q^{(1)}, Q^{(3)}, Q^{(4)}, \ldots$ が 各々正六角形分布に対応しており, $\boldsymbol{q}_1^{(k)}, \boldsymbol{q}_2^{(k)}, \ldots$ は, 同じ都市間距離が $\sqrt{k}$ となる人口分布 (k system) を表現している. ここで各 $\boldsymbol{q}_i^{(k)}$ は具体的には以下のようになる.

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{6}(1, \ldots, 1)^\top \\
Q^{(3)} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(3)}, \boldsymbol{q}_2^{(3)} \,\right] \\
&= [\, \langle \cos(2\pi(n_1 - 2n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(n_1 - 2n_2)/3) \rangle \,] \\
Q^{(4)} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(4)}, \boldsymbol{q}_2^{(4)}, \boldsymbol{q}_3^{(4)} \right] \\
&= [\, \langle \cos(\pi n_1) \rangle,\ \langle \cos(\pi n_2) \rangle,\ \langle \cos(\pi(n_1 - n_2)) \rangle] \\
Q^{(9)} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(9)}, \ldots, \boldsymbol{q}_6^{(9)} \right] \\
&= [\, \langle \cos(2\pi\, n_1/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi\, n_1/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(2\pi(-n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(-n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(2\pi(-n_1 + n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(-n_1 + n_2)/3) \rangle \,] \\
Q^{(12)} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(12)}, \ldots, \boldsymbol{q}_6^{(12)} \right] \\
&= [\, \langle \cos(2\pi(n_1 + n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(n_1 + n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(2\pi(n_1 - 2n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(n_1 - 2n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(2\pi(-2n_1 + n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(2\pi(-2n_1 + n_2)/3) \rangle \,] \\
Q^{(36(\mathrm{I}))} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(36(\mathrm{I}))}, \ldots, \boldsymbol{q}_6^{(36(\mathrm{I}))} \right] \\
&= [\, \langle \cos(\pi\, n_1/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi\, n_1/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(-n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(-n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(-n_1 + n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(-n_1 + n_2)/3) \rangle \,] \\
Q^{(36(\mathrm{II}))} &= \left[\, \boldsymbol{q}_1^{(36(\mathrm{II}))}, \ldots, \boldsymbol{q}_{12}^{(36(\mathrm{II}))} \right] \\
&= [\, \langle \cos(\pi(2n_1 + n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(2n_1 + n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(n_1 - 3n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(n_1 - 3n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(-3n_1 + 2n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(-3n_1 + 2n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(2n_1 - 3n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(2n_1 - 3n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(n_1 + 2n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(n_1 + 2n_2)/3) \rangle, \\
&\qquad \langle \cos(\pi(-3n_1 + 2n_2)/3) \rangle,\ \langle \sin(\pi(-3n_1 + 2n_2)/3) \rangle \,]
\end{aligned}$$

例として $k = 3$ の場合を図示すると, **図–2** に示すような分布となり, $\boldsymbol{q}_1^{(3)}$ が**図–1** に示している $k = 3$ system と対応していることが確認できる. また $\boldsymbol{q}_2^{(3)}$ は $\boldsymbol{q}_1^{(3)}$ を平行移動させるような分布を表現している. なお, 図中の赤丸は人口の増加を, 青丸は人口の減少をそれぞれ表す.



図–2 $k = 3$ system の分布パターン

(2) 評価方法

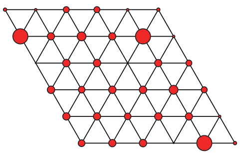
(1) 節で示した $\boldsymbol{q}_i^{(k)}$ と数値解析により得た人口ベクトルとの内積 $p_i^{(k)}$ により, 数値解析解の人口分布がどのような $\boldsymbol{q}_i^{(k)}$ とどの程度近いのかを定量評価する. ここで, $\boldsymbol{q}_1^{(k)}, \boldsymbol{q}_2^{(k)}, \ldots$ は, 同じ都市間距離が $\sqrt{k}$ となる分布を表すため, k system と解析解との整合性は, $\sum_i p_i^{(k)} \boldsymbol{q}_i^{(k)}$ のノルムにより評価する.

3. 周波数分析

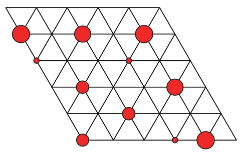
(1) 有限平面から創発した人口分布

a) 分析対象

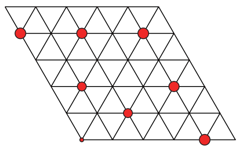
有限平面におけるシミュレーションにより発現した代表的な集積パターン (**図–3** ～ **図–11**) に対して空間周波数分析を行い, 中心地理論との整合性を評価した.



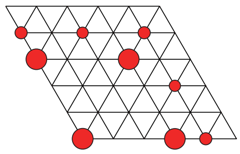
図–3 パターン 1



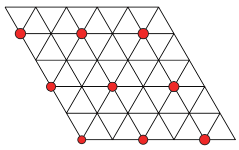
図–4 パターン 2



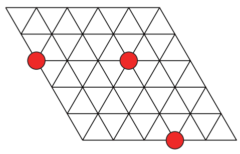
図–5 パターン 3



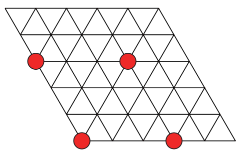
図–6 パターン 4



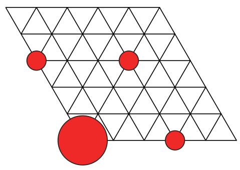
図–7 パターン 5



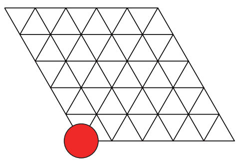
図–8 パターン 6



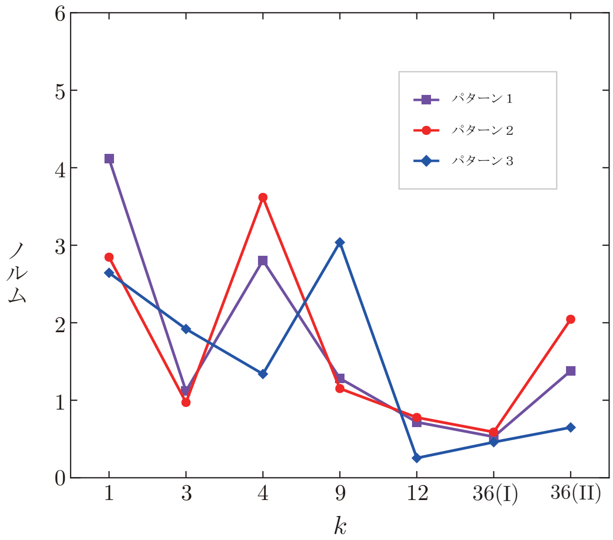
図–9 パターン 7



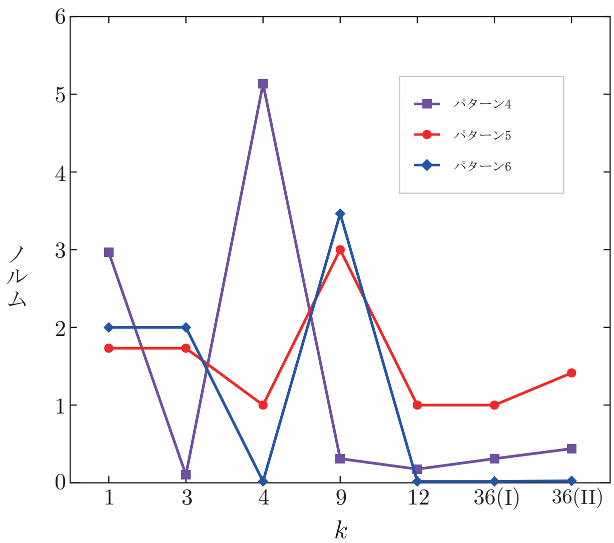
図–10 パターン 8



図–11 パターン 9



図–12 正六角形有限平面における k とノルムの関係

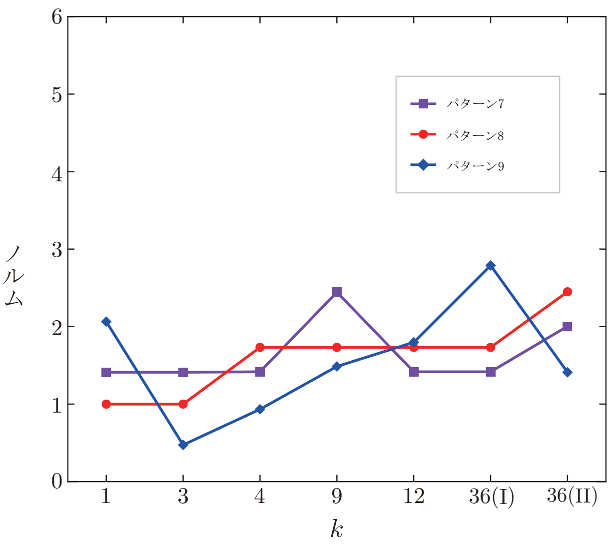


図–13 正六角形有限平面における k とノルムの関係 2

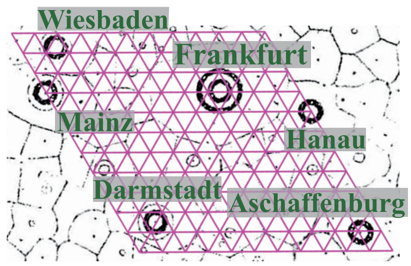
b) 分析結果

パターン 1 では一様分布化から境界付近への人口集積がおきるため, **図–12** に示すように $k = 4$ に関するノルムが卓越する. パターン 2 では境界付近における集積がさらに進み, $k = 4$ に関するノルムがパターン 1 よりも大きな値をとり, ある k における集積の程度がノルムの大きさに反映されていることがわかる. パターン 3 では $k = 9$ system の発現をうけ $k = 9$ に関するノルムと, $k = 9$ system より規模が小さくかつ商業域の重複する $k = 3$ に関するノルムが反応を示している. また無限平面における $k = 9$ system と異なり, 境界部の人口集積の影響を受け $k = 4$ に関するノルムも反応を示している.

パターン 4 では $k = 4$ system が発現しており, $k = 4$ に関するノルムが卓越している (**図–13**). また, 無限平面の場合と異なり境界の影響をうけ, **図–7** に示す赤丸以外の都市へも僅かながら人口が分布しているため, $k = 9, 12, 36(\mathrm{I}), 36(\mathrm{II})$ に関するノルムが無限平面における $k = 4$ system の場合よりも大きな値をとっている. パターン 5 では中心地間距離がより大きくなるように都市が分布しており, パターン 4 と比較することによりノルムのピークが $k = 4$ から $k = 9$ へと移り変わっていることがわかる. また商業域の重複する $k = 3$ に関するノルムも反応を示している. パターン 6 では $k = 9$ system が発現しているため, パターン 5 よりも $k = 3, 9$ に関するノルムが大きな値をとっており, 集積の程度がノルムに反映されていると考えられる. パターン 7 における各都市の中心地間距離は $k = 9$ system と同等であるものの, 人口は一都市が大きな割合を占めているため, $k = 9$ に関するノルムは卓越しているがパターン 6, 7 よりも小さな値をとっている (**図–14**). また一都市への人口分布の偏りをうけ, ノルムが一極集中の分布であ



図–14 正六角形有限平面における k とノルムの関係 3



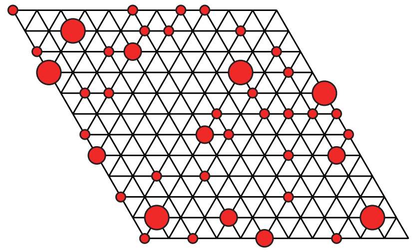
図–15 実空間における分析領域

るパターン 8 のように分布していることもわかる．パターン 9 では一極集中からの再分散によるメガロポリス型の分布パターンの発現をうけて, $k = 36(\mathrm{I})$ に関するノルムが卓越しており, 分布の特徴がノルムによって捉えられていると言える．

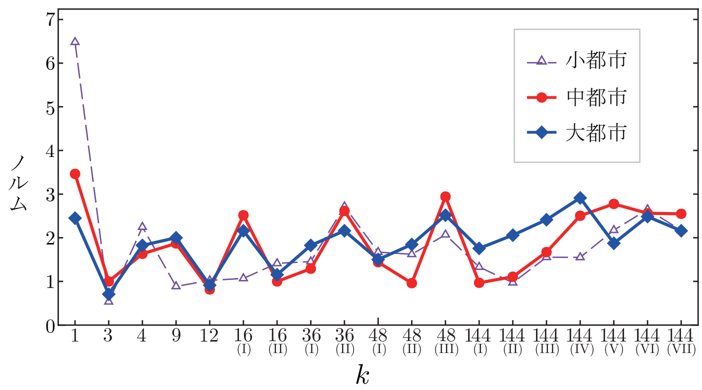
(2) 実際の南ドイツの人口分布

a) 分析対象

Christaller[7] に記載されている南ドイツの都市分布図を用いて周波数分析を行った (**図–15**). 分析領域はフランクフルトおよびその周辺都市とし, Christaller の都市に関する階層区分のうち, 規模の大きい L-place, P-place, G-place を大都市, 中規模の B-place, を中都市, それ以下の規模の都市を小都市としてモデル化した (**図–16**). 分析は大都市, 中都市, 小都市それぞれに対して行い, 周波数分析に際し大中小各層における人口は一様であると仮定した．また大都市では中都市および小都市を, 中都市では小都市をそれぞれ内包しているものとした．なお分析対象とした空間分布の複雑さを考慮し, 12×12 メッシュを用いて分析を行った．



図–16 分析領域のモデル化



図–17 モデル化した実空間における k とノルムの関係

b) 分析結果

図–17 に各都市ごとのノルムを示す．小都市では一様分布, $k = 3$, 中都市では $k = 16(\mathrm{I}), 36(\mathrm{II}), 48(\mathrm{III})$, 大都市では $k = 144(\mathrm{I}), 144(\mathrm{II}), 144(\mathrm{III}), 144(\mathrm{IV})$ に関するノルムがそれぞれ卓越しており, ノルムの大きさにそれぞれの都市の規模が反映されていると考えられる．また中都市と大都市を比較した際に, $k = 3, 4, 9, 12, 16$ といった規模の小さい分布パターンに関するノルムは, 大中都市でほぼ等しい分布をとっており, 大中都市の分布が, 中心地間距離の短い分布に関してはほぼ一致していることを示していると考えられる．

4. まとめ

群論的分岐理論にもとづく座標変換行列を導入した周波数分析により、都市の分布パターンの定量評価を行った．これにより, シミュレーションや実空間データから得られる様々な都市集積パターンの特徴を, 定量的な指標をもって提示することが可能になり, 中心地理論との整合性も数理的に確認できた．

今後の課題としては, 正三角形メッシュのみならず正方形メッシュを用いた分析を行い, 都市の分布パターンを捉える上で、どのようなメッシュが適切なのかを吟味していくことが挙げられる．また, ノルムの他に新たな指標を考案し分布パターンの評価を行っていく必要がある．

参考文献

1) Dicken, P. and Lloyd, P. E.: *Location in Space: Theoretical Perspectives in Economic Geography*, Prentice Hall, 1991.
2) Krugman, P.：自己組織化の経済学ー経済秩序はいかに創発するか，北村行信，妹尾美起訳，東洋経済新報社，1997.
3) Ikeda, K., Murota, K., and Takayama, Y.: Stable Economic Agglomeration Patterns in Two Dimensions: Beyond the Scope of Central Place Theory, METER 2014-24, Univ. of Tokyo, 2014.
4) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P.: An analytically solvable core–periphery model, *Journal of Economic Geography* **3**, 229–240, 2003.
5) 柳本彰仁，池田清宏，赤松隆，河野達仁：計算分岐理論による都市の集積分散モデルの分岐経路追跡法の提案，土木計画学研究・論文集 No.24, pp.191–196, 2007.
6) Ikeda, K. and Murota, K.: *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer, 2014.
7) Christaller, W.: *Die zentralen Orte in Süddeutschland*. Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
8) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer, Jena, 1940. English translation: *The Economics of Location*, Yale University Press, New Haven, 1954.
9) 近藤直己：2 次元多都市モデルにおける分岐解析の体系化と集積パターンの分析に関する研究，東北大学大学院修士論文，2014.
10) 秋吉一樹：核周辺モデルの 2 次元集積挙動における境界条件の影響評価について，東北大学大学院修士論文, 2013.
11) 藤井文夫，大崎純，池田清宏, 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.

(2015 年 7 月 31 日 受付)