

# 舗装劣化の連続量指標を用いた 劣化ハザードモデル

水谷大二郎<sup>1</sup>・貝戸清之<sup>2</sup>・小林潔司<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻・日本学術振興会特別研究員 DC (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)  
E-mail:d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)  
E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>3</sup>フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)  
E-mail:kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

本研究では、高速道路舗装構造の劣化管理指標に対する統計的劣化予測モデルを開発する。舗装管理指標に関して、たわみ量やひび割れ率、平坦性などは連続量として観測される。これらの連続量を離散化し、マルコフ連鎖モデルによって劣化を予測することも可能であるが、より高精度な劣化予測結果を求めるためには、連続量の時間変化を直接的にモデル化することが望ましい。そこで、本研究では、連続量を用いた劣化予測式に、舗装の構造条件や環境条件に応じ変化する誤差分布を組み込んだ比例劣化ハザードモデルを提案し、そのベイズ推定手法を開発する。比例劣化ハザードモデルにより、例えば、任意の力学的な劣化予測式に基づく統計的劣化予測や予測式の妥当性の検証が可能となる。最後に、実在する高速道路において獲得された点検データを用いて、提案する加速度劣化ハザードモデルの有用性を実証的に検証する。

**Key Words :** *proportional hazards model, asset management, continuous volume index*

## 1. はじめに

近年、統計的劣化予測モデルの発展により、現場で膨大に蓄積された調査データをもとに、社会基盤施設の劣化過程を環境条件・構造特性に応じて評価することが可能となってきた。本研究で対象とする道路舗装に対する統計的劣化予測モデルの適用事例には、路面性状調査により得られる路面の損傷状態（ひび割れ、わだち掘れ、平坦性など）の情報を用いて路面の劣化過程を評価した事例<sup>1),2)</sup>がある。しかし、これらの研究事例では、マルコフ劣化ハザードモデル<sup>3)</sup>の考え方に基づく劣化予測を行っており、舗装の路面性状や耐荷力を健全度というレーティングカテゴリーを用いて離散化し、劣化過程を健全度間のマルコフ推移確率を用いて表現している。

例えば、FWD 調査により観測されるたわみ量は、連続量として観測される。マルコフ劣化ハザードモデルでは、連続量として観測されたたわみ量を、レーティングカテゴリーとして離散化することが必要となる。連続量を離散化する段階において多くの情報量の損失が発生するという問題が発生する。また、レーティングカテゴリーの設定に任意性が存在するため、レーティングカテゴリーの設定がパフォーマンスカーブの推定結果に影響を及ぼすこととなる。たわみ量の時間的劣化過程をパフォーマンスカーブとしてより精緻に表現す

るには、FWD 調査により連続量として観測されるたわみ量を直接的に用いて、時間の経過により舗装耐荷力が低下する過程を表現する方法論が必要となる。さらに、個々の道路区間における劣化過程の差異を定量的に表現する必要もある。その際、たわみ量の一般的な劣化過程（全ての道路区間における代表的な劣化過程）を実験などにより理論的に求め、その劣化過程からの差異を求めることが考えられる。しかしながら、現在のところ、舗装の耐荷力の低下過程に関する理論的研究の蓄積が乏しく、耐荷力の低下過程に関する理論的曲線は提案されていない。

以上の問題意識の下に、本研究では、高速道路舗装耐荷力のパフォーマンスカーブを比例劣化ハザードモデルを用いて表現する方法を提案する。その際、舗装構造の特性や道路の使用環境など、舗装の耐荷力低下に影響を及ぼすと考えられる劣化因子を説明変数としてとりあげ、舗装の耐荷力低下に影響を及ぼす要因について分析を試みる。具体的には、1) 任意の関数を近似することを目的として開発されたフレキシブル曲線により、耐荷力の低下過程を表現するパフォーマンス曲線を近似的に表現し、2) 近似されたパフォーマンス曲線をベースラインモデルとして、説明変数に応じて比例的に劣化過程の変動を表現する比例劣化ハザードモデルを提案する。以下、**2.** で本研究の基本的な考え方を述べる。**3.** では比例劣化ハザードモデルを定式化

し、4. でモデルのベイズ推定方法について詳述する。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 既往研究の概要

目視点検の結果に基づいて、社会基盤施設の劣化過程を予測する統計的劣化予測モデルに関しては、多くの研究蓄積<sup>4)~7)</sup>がある。統計的劣化モデルを推定するためには、一定量のデータの蓄積が必要である。たとえば、津田ら<sup>3)</sup>はマルコフ劣化モデルを安定的に推計するためには、2,000 個程度の点検データが必要となるとしている。統計的予測モデルは、劣化過程のベンチマークとなる力学モデルを内蔵していないため、劣化過程を安定的に表現するために、大量のデータが必要となる。これに対して、力学的劣化モデルは、劣化過程を直接モデル化しているため、(モデル化が正しい限り) より少ないデータを用いて劣化予測を行うことが可能となる。しかし、現実の劣化過程には多様な要因が介在するため、単一の力学モデルを用いて劣化過程を表現するには限界がある。このため、限られたデータを用いて力学モデルを統計的に推計しようとするハイブリッド型劣化予測モデル<sup>8),9)</sup>も提案されている。

### (2) ベースラインモデルと比例性

本研究では、比例ハザードモデルを用いたハイブリッド型劣化予測モデルを提案する。比例ハザードモデルは、Cox の研究<sup>10)</sup>を始め、多様な分析で用いられ、様々な改良が加えられている。Cox の比例ハザードモデルは、ベースラインの寿命関数(ベースラインモデル)の関数形を特定せず、個々の評価単位の異質性を推定可能であることを利点としている。さらに、ベースラインモデルをパラメトリックに特定化し、比例ハザードモデルの比例パラメータを推定する既往研究も存在し、具体的には、ロジスティック関数、ワイブル関数、スプライン関数などがベースラインモデルとして用いられている<sup>11)</sup>。本研究で用いる比例ハザードモデルにおいても、ベースラインモデルを特定化し、定数やハザード形状パラメータを推定する。比例ハザードモデルは、構造物による劣化速度の異質性を表現するが、構造物ごとに定義された損傷発生ハザード関数が交差しないことを仮定する。比例ハザードモデルは、ベースラインモデルをパラメトリックに特定化することにより、パラメータ空間が相対的に絞られるため、限定されたデータによっても劣化予測モデルを推定できる点に利点がある。

これまでに、高速道路舗装の耐荷力の低下過程を表現する理論的曲線は提案されていない。そのため、本研究では、ベースラインモデルを複数種類のフレキシブル

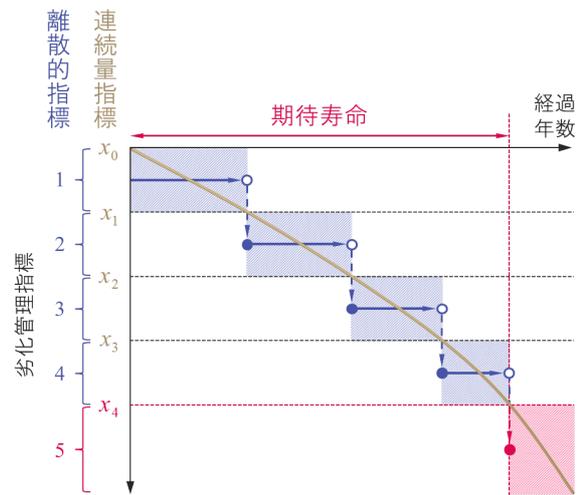


図-1 離散的指標と連続的指標

曲線により表現し、AIC (赤池情報量基準) や BIC (ベイズ情報量基準) などの情報量基準を用いて統計的に最適なベースラインモデルを選択するというアプローチを採用する。このような比例ハザードモデルの枠組みを構築することにより、先験的な力学モデルが存在しない場合には、最適ベースラインモデルの特定化が可能となる。また、既往の力学モデルが存在する場合には、その力学モデルをベースラインモデルとすることが可能となる。さらに、当該モデルの係数を未知パラメータとして推定し、既往の力学モデルの係数との差異を仮説検定することにより、力学モデルが有する実際の劣化過程の再現性を定量的に評価することができる。

### (3) 連続量劣化指標による舗装パフォーマンス評価

従来、図-1 に青色で示すように、連続量として観測されるような舗装構造の劣化指標を離散的な健全度指標に変換して記述された舗装構造の劣化パスがパフォーマンスカーブと呼ばれていた<sup>12)</sup>。離散的な健全度指標による劣化パスを用いて、補修や更新の意思決定を支援することは可能であるが、高々数段階の健全度で個々の舗装構造の有するパフォーマンスを詳細に表現することは不可能であり、このような劣化パスはマネジメントカーブの範疇を出ない。一方、本研究では、図-1 に金色で示すような、連続量として観測されるような舗装構造の劣化指標をパフォーマンスと考え、その時間的推移を直接的に比例ハザードモデルによりモデル化し、連続量指標を用いた劣化パスをパフォーマンスカーブと定義する。このように、連続量として観測される劣化指標を用いて舗装構造の劣化過程をハイブリッド型劣化予測モデルで記述した事例は著者等の知る限

り過去には存在しない。

本研究では、上述のように、連続量指標を高速道路舗装のパフォーマンス指標と捉える。提案する比例劣化ハザードモデルにおいて、パフォーマンスカーブ推定後に、離散的な健全度区分を事後的に設定することにより、従来のモデルにより表現されていた離散的な健全度間の期待寿命を求めることができる。さらに、舗装構造の管理限界に関するリスク管理指標をも連続量指標として設定することが可能となり、リスク管理水準の細分化を通じて、舗装リスクマネジメントの高精度化、相対的劣化評価の高度化に対しても、本研究で提案する比例劣化ハザードモデルは有用な知見をもたらすと考える。

### 3. 比例劣化ハザードモデル

#### (1) 舗装構造の劣化進行プロセス

いま、対象とする地点  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) の耐荷力の逆数を  $x_i$ 、直近の建設（更新）時点からの経過時間を  $t_i$  と表す。すなわち、耐荷力が低下するほど  $x_i$  の値は大きくなる。耐荷力の劣化プロセスを

$$x_i = \exp(-B_i)f(t_i, \beta) \quad (1a)$$

$$B_i = \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}' + \sigma w_i \quad (1b)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

と定式化する。ここで、 $B_i$  は個々の地点  $i$  の劣化特性の異質性を反映する係数であり、式 (1b) に示すように共変量項  $\mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'$  と誤差項  $\sigma w_i$  の和で表せる。 $f(t_i, \beta)$  はベースラインの劣化過程を表す劣化モデル（以下、ベースラインモデルと呼ぶ）であり、 $t_i$  に関して単調増加関数である。また、 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  はベースライン関数を特徴づける未知パラメータである。 $\exp(-B_i) = 1$  が成立する場合、劣化曲線はベースラインモデルに一致する。理論的な劣化曲線が存在する場合、理論的劣化曲線をベースライン劣化曲線として用いることができる。理論モデルが存在しない場合、たとえばフレキシブル関数を用いてベースラインモデルを近似的に表現することが必要となる。また、式 (1b) において、 $\mathbf{z}_i = (z_i^1, \dots, z_i^m)$  は耐荷力の劣化に影響を及ぼす共変量ベクトル、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^m)$  はパラメータベクトル、 $w_i$  は地点  $i$  に固有な劣化要因を表す確率誤差項、 $\sigma$  は偏差パラメータを表す。右辺の地点特性係数  $B_i$  は、個々の地点における耐荷力の低下速度が、舗装特性  $\mathbf{z}_i$  と誤差項  $w_i$  に応じて異質であることを表現している。

比例劣化ハザードモデルでは、劣化状態がある管理水準に到達するまでの経過時間（寿命）の対数値を、劣化・損傷の共変量  $\mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'$  と誤差項  $\sigma w_i$  の線形和として表現する。式 (1a) の両辺の対数をとれば、比例劣化ハ

ザードモデル

$$y_i = \ln f(t_i, \beta) \quad (2)$$

$$= \ln x_i + \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}' + \sigma w_i \quad (i = 1, \dots, I) \quad (3)$$

を得る。ただし、 $y_i = \ln f(t_i, \beta)$  は非線形化された寿命インデックスである。確率変動項  $w_i$  が確率密度関数

$$g_w(w_i) = \exp\{-w_i - \exp(-w_i)\} \quad (4)$$

で表現される標準ガンベル分布に従うと仮定する。ただし、 $E(w_i) = \gamma$  であり、 $\gamma (= 0.57722 \dots)$  はオイラー定数である。式 (3) を

$$w_i = \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

と書き直し、確率密度関数 (4) の変数変換を行う。その結果、舗装特性  $\mathbf{z}_i$  を有する地点  $i$  の耐荷力が、管理水準  $x_i$  に到達するまでの寿命インデックス  $y_i$  の条件付分布を表す確率密度関数は、

$$\begin{aligned} h_y(y_i|x_i, \mathbf{z}_i) &= \frac{1}{\sigma} g_w \left( \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表すことができる。寿命インデックス  $y_i = \ln f(t_i, \beta)$  には未知パラメータ  $\beta$  が含まれている。式 (2) を用いて式 (6) の変数変換を試みる。ここで、寿命インデックスの1階微分を  $f_d(t_i, \beta) = df(t_i, \beta)/dt_i$  と表記すれば、

$$dy_i = \frac{f_d(t_i, \beta)}{f(t_i, \beta)} dt_i \quad (7)$$

が成立する。したがって、管理水準  $x_i$  に到達するまでの実寿命  $t_i$  の条件付分布を表す確率密度関数は、

$$\begin{aligned} \tau(t_i|x_i, \mathbf{z}_i) &= \frac{f_d(t_i)}{\sigma f(t_i)} \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - \mathbf{z}_i\boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。さらに、確率密度関数 (4) より、生存関数は

$$\begin{aligned} S_w(w_i) &= 1 - \int_{-\infty}^{w_i} f_w(w) dw \\ &= 1 - \exp\{-\exp(-w_i)\} \end{aligned} \quad (9)$$

と表現される。舗装特性  $\mathbf{z}_i$  を有する地点  $i$  において、寿命インデックス  $y_i$  が経過した時点で、耐荷力が管理水準  $x_i$  まで到達していない確率は、生存関数

$$\begin{aligned} S_y(y_i|x_i, \mathbf{z}_i) &= S_w \left( \frac{y_i - \ln x_i - \boldsymbol{\theta}'\mathbf{z}_i}{\sigma} \right) \\ &= 1 - \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{y_i - \ln x_i - \boldsymbol{\theta}'\mathbf{z}_i}{\sigma} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

を用いて表現できる。さらに、寿命インデックス  $y_i = \ln f(t_i)$  を与件とすれば、実経過時間  $t_i$  に関する生存関

数は、

$$S_t(t_i|x_i, z_i) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - z_i \theta'}{\sigma} \right) \right\} \quad (11)$$

と表現される。

このように、比例劣化ハザードモデルに対しても、生存関数 (11) を導出することができる。伝統的なハザードモデル<sup>13)–16)</sup>は、対象物の寿命が確率分布すると仮定しているのに対して、比例劣化ハザードモデルでは、個別部材の中性化速度係数の異質性が寿命分布の原因となっていることに留意する必要がある。また、生存関数は、舗装の耐荷力インデックスが所与の管理水準  $x_i$  に到達するまでの経過時間の分布を示したものである。当然のことながら、確率変動項  $w_i$  の確率分布として、ガンベル関数以外の確率分布（例えば、対数正規分布、ロジスティック分布等）を採用することも可能である。ガンベル分布は、ハザード率が経過時間に対して一定、増減となるような変化過程を表現できるという柔軟な構造を有している。以上の理由により、本研究では確率誤差変動としてガンベル分布を採用することとする。

## (2) 尤度関数の定式化

いま、地点  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) ごとに時間軸上の異なる時点で FWD 調査を実施し、舗装耐久力を実測している場合を考える。ただし、ある地点の舗装に対し、更新が行われた場合、地理的には同一の地点であるが、更新前後で異なる地点  $i$  を設定する。各地点で観測された耐荷力指標の時系列データを用いて、比例劣化ハザードモデルを推定する。地点  $i$  に対して、 $t_0^i = 0$  を初期時点（供用開始時点、あるいは、更新時点）とするサンプル時間軸  $t_0^i, t_1^i, t_2^i, \dots$  を定義する。サンプル時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。時点  $t_h^i$  ( $h = 1, \dots, H_i$ ) は、地点  $i$  の舗装耐荷力に対する  $h$  回目の観測時点である。舗装耐荷力の観測時点間隔を  $d_h^i = t_h^i - t_{h-1}^i$  と定義する。本研究では、舗装耐荷力の観測状況に応じて、2 種類の尤度関数を定式化する。ただし、舗装耐荷力指標  $x_h^i$  ( $h = 1, \dots, H_i$ ) は、その値が大きくなるほど耐荷力が減少していることを表す。図-2 には、本研究で対象とする 2 種類のデータ獲得パターンを示している。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は、実際に観測され、モデル推定に利用可能なデータであることを意味する。同図の各点において観測される部分的な情報を用いて、灰色で示した連続量指標の連続時間的推移を推定することを考える。図-2(a) では、地点  $i$  において、供用開始時点、あるいは、直近の補修・更新時点が獲得されている場合を想定し、1 回目の点検間隔  $\bar{d}_1^i$

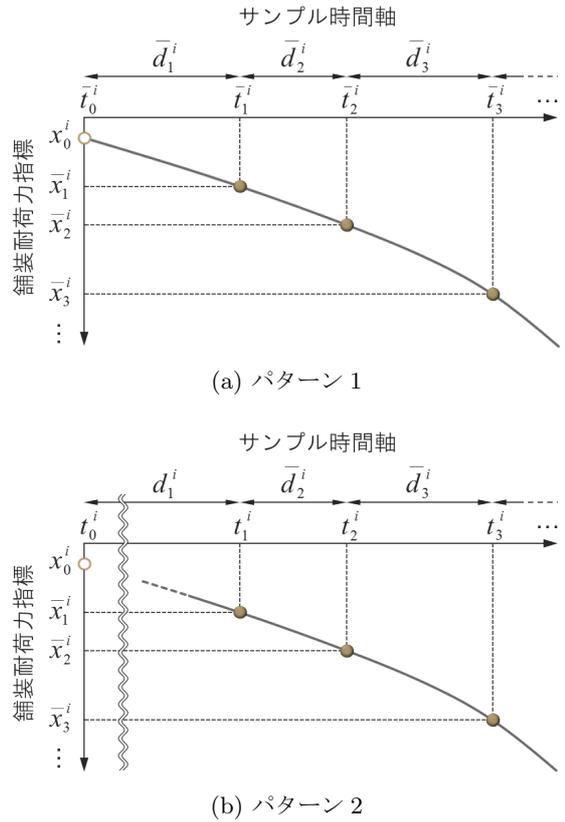


図-2 データ獲得パターン

は点検データとして既知である。一方、図-2(b) では、供用開始時点、あるいは、直近の補修・更新時点が獲得されていない場合を想定し、1 回目の点検間隔  $d_1^i$  は未知である。なお、本研究の実証分析で対象とした道路区間においては、供用開始時点、あるいは、直近の補修・更新時点での耐荷力指標は観測されていなかったため、両図において、時点  $t_0^i$  での耐荷力指標  $x_0^i$  は未知としている。

地点  $i$  の耐荷力に関する点検サンプルの情報  $\bar{\xi}_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) を  $\bar{\xi}_i = (\bar{x}_i, \bar{d}_i, \bar{z}_i)$  と表す。ただし、 $\bar{z}_i = (\bar{z}_1^i, \dots, \bar{z}_M^i)$  は地点  $i$  の舗装特性を表すベクトルであり、 $\bar{z}_m^i$  ( $m = 1, \dots, M$ ) は地点  $i$  の  $m$  番目の舗装特性を表している。また、 $\bar{z}_i$  は時間的に一定であると仮定する。さらに、点検間隔ベクトル  $\bar{d}_i$  に関して、パターン 1 では、 $\bar{d}_i = (\bar{d}_1^i, \dots, \bar{d}_{H_i}^i)$ 、パターン 2 では、 $\bar{d}_i = (\bar{d}_2^i, \dots, \bar{d}_{H_i}^i)$  とする。 $\bar{x}_i = (\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_{H_i}^i)$  である。また、地点  $i = 1, \dots, I'$  ではパターン 1 で、地点  $i = I' + 1, \dots, I$  ではパターン 2 で点検データが獲得されているとする。

### a) パターン 1

まず、データ獲得パターン 1 での尤度関数は、実寿命の条件付き確率密度関数 (8) により、

$$\mathcal{L}_i(\bar{\xi}_i, \beta, \theta, \sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{h=1}^{H_i} \tau(\bar{t}_h^i | \bar{x}_h^i, \bar{z}_i) \\
&= \prod_{h=1}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\bar{t}_h^i)}{\sigma f(\bar{t}_h^i)} \right. \\
&\quad \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right\} \right] \quad (12) \\
&\quad (i = 1, \dots, I')
\end{aligned}$$

と表現できる。ただし、 $\bar{t}_h^i = \sum_{a=1}^h \bar{d}_a^i$  である。

## b) パターン 2

続いて、データ獲得パターン 2 での尤度関数を定式化する。パターン 2 においては、1 回目の点検間隔  $d_1^i = t_1^i$  が観測されていないため、寿命  $t_1^i$  を確率変数として取り扱う。寿命  $t_1^i$  と実点検間隔  $(\bar{d}_2^i, \dots, \bar{d}_{H_i}^i)$  の同時生起確率は、寿命  $t_1^i$  の生起確率  $\tau(t_1^i | \bar{x}_1^i, \bar{z}_i)$  と比例劣化ハザードモデルによる寿命の生起確率  $\tau(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i | \bar{x}_h^i, \bar{z}_i)$  の混合確率モデルとして表現できる。このとき、点検データ  $\bar{\xi}_i$  に関する尤度関数は、積分計算により、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_i(\bar{\xi}_i, \beta, \theta, \sigma) \\
&= \int_0^\infty \tau(t_1^i | \bar{x}_1^i, \bar{z}_i) \prod_{h=2}^{H_i} \tau\left(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i | \bar{x}_h^i, \bar{z}_i\right) dt_1^i \\
&= \int_0^\infty \frac{f_d(t_1^i)}{\sigma f(t_1^i)} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(t_1^i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{\ln f(t_1^i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right\} \\
&\quad \cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \frac{f_d(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{\sigma f(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)} \right. \\
&\quad \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \frac{\ln f(t_1^i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'}{\sigma} \right\} \right] dt_1^i \\
&\quad (i = I' + 1, \dots, I) \quad (13)
\end{aligned}$$

と表現することができる。

本研究では、MCMC 法の反復計算により、比例劣化ハザードモデルの未知パラメータの事後分布に従う乱数を発生させ、統計量を算出することによりモデル推定を行う。その際、尤度関数 (13) 内の積分計算に起因した計算負荷が問題となる。本研究では、尤度関数の完備化操作により、その計算負荷を軽減したような、比例劣化ハザードモデルの推定法を提案する。

## (3) 舗装リスクマネジメント指標

舗装耐荷力の低下過程に劣化カテゴリ間の異質性が存在し、カテゴリ毎の劣化進展特性が異なる。比例劣化ハザードモデルでは、舗装耐荷力の寿命が確率分布する。個々の劣化カテゴリに対して、初期時点からある一定の時間  $T_i$  が経過した時点での舗装耐荷力指標の確率分布も知ることができる。このように、舗装耐荷力の低下に関するリスク管理指標を「舗装耐荷力指標」と呼ぶ。一方、比例劣化ハザードモデルを用いた場合、任意の経過時間に対して、舗装耐荷力が管理水準  $x_i$  まで到達していない確率を生存関数 (11) を用いて表現できる。生存関数は舗装耐荷力指標が所与の管理水準まで到達する経過時間分布を表している。生存関数 (11) を用いて、舗装耐荷力指標が所与の水準に到達するまでの経過時間に関するリスク管理指標 (余寿命指標と呼ぶ) を定式化できる。本研究では、舗装耐荷力の低下特性を表すリスク指標として、1) 舗装耐荷力指標、2) 余寿命指標を設定する。

### a) 舗装耐荷力指標

初期時点から一定の時間  $T_i$  が経過した現時点を考える。未知パラメータ  $(\beta, \theta, \sigma)$  を所与としたとき、比例劣化ハザードモデル (3) より、舗装耐荷力  $x_i$  は

$$x_i = \exp(-\bar{z}_i \hat{\theta}' - \hat{\sigma} w_i) f(T_i, \hat{\beta}) \quad (14)$$

と表される。ただし、記号「 $\hat{\cdot}$ 」は推定値を意味する。ここで、確率誤差項  $w_i$  が式 (4) の確率密度関数  $g_w(w_i)$  に従うことを考慮すれば、変数変換

$$w_i = \frac{\ln f(T_i, \hat{\beta}) - \ln x_i - \bar{z}_i \hat{\theta}'}{\hat{\sigma}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (15)$$

により、経過時間  $T_i$  における対数舗装耐荷力  $\ln x_i$  の条件付分布を表す確率密度関数は、

$$f_i(\ln x_i | T_i, \bar{z}_i) = \frac{1}{\hat{\sigma}} f_w \left( \frac{\ln f(T_i, \hat{\beta}) - \ln x_i - \bar{z}_i \hat{\theta}'}{\hat{\sigma}} \right) \quad (16)$$

と表すことができる。さらに、変数変換  $x_i = \exp(\ln x_i)$  より、経過時間  $T_i$  における舗装耐荷力  $x_i$  の条件付確率密度関数は、

$$\begin{aligned}
f_{x_i}(x_i | T_i, \bar{z}_i) &= \frac{1}{\hat{\sigma} x_i} f_w \left( \frac{\ln f(T_i, \hat{\beta}) - \ln x_i - \bar{z}_i \hat{\theta}'}{\hat{\sigma}} \right) \\
&= \frac{\kappa x_i^{\kappa-1}}{\rho_i(T_i)} \exp \left( -\frac{x_i^\kappa}{\rho_i(T_i)} \right) \quad (17)
\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、

$$\kappa = \frac{1}{\hat{\sigma}} \quad (18a)$$

$$\rho_i(T_i) = \left\{ \exp \left( \frac{\bar{z}_i \hat{\theta}' - \ln f(T_i, \hat{\beta})}{\hat{\sigma}} \right) \right\}^{-1} \quad (18b)$$

である。すなわち、舗装耐荷力  $x_i$  はワイブル分布  $\mathcal{W}(\mu(T_i), \nu^2(T_i))$  に従うことになる。ただし、 $\mu(T_i)$ 、 $\nu^2(T_i)$  はワイブル分布の期待値、および分散で

あり

$$\mu(T_i) = \rho(T_i)^{1/\kappa} \Gamma(\kappa^{-1} + 1) \quad (19a)$$

$$\nu^2(T_i) = \rho(T_i)^{2/\kappa} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\kappa} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\kappa} + 1\right) \right\} \quad (19b)$$

と表せる。  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。さらに、舗装耐荷力の確率分布を表す分布関数  $H(x_i|T_i, \mathbf{z}_i)$  は

$$H(x_i|T_i, \mathbf{z}_i) = 1 - \exp\left\{-\frac{x_i^\kappa}{\rho(T_i)}\right\} \quad (20)$$

と表せる。このとき、リスク管理水準を  $\varepsilon \times 100\%$  とした VaR (Value at Risk) 指標  $x_{[\text{VaR}],i}(\varepsilon)$  は

$$H(x_{[\text{VaR}],i}(\varepsilon)|T_i, \mathbf{z}_i) = 1 - \varepsilon \quad (21)$$

を満足するような  $x_{[\text{VaR}],i}(\varepsilon)$  として定義できる。すなわち、 $x_{[\text{VaR}],i}(\varepsilon)$  は、経過時間  $T_i$  において、それを満たさない（指標自体の数値が上回るような）舗装耐荷力が出現するような超過確率が  $\varepsilon$  となるような臨界的な舗装耐荷力を表す。また、経過時間  $T_i$  における期待舗装耐荷力  $E[x_i]$  は、式 (19a) より

$$E[x_i] = \Gamma\left(\frac{1}{\kappa} + 1\right) \exp\left(\frac{\ln f(T_i, \hat{\beta}) - \mathbf{z}_i \hat{\theta}'}{\kappa \hat{\sigma}}\right) \quad (22)$$

となる。さらに、上式において経過時間  $T_i$  の値を変化させ、経過時間  $T_i$  と期待舗装耐荷力  $E[x_i]$  の関係を表した曲線を本研究では「舗装パフォーマンスカーブ」と呼ぶ。

#### b) 余寿命指標

舗装耐荷力に対して管理水準  $\underline{X}$  を設定する。舗装の新設から管理水準  $\underline{X}$  まで到達するまでの経過時間を寿命  $\eta_i$  と呼ぶこととする。現時点において、地点  $i$  の耐荷力の低下が管理水準にまで到達せず、寿命  $\eta_i$  に対して  $\eta_i > T_i$  が成立している場合を考える。耐荷力が管理水準  $\underline{X}$  まで到達していないという条件の下で、今後さらに  $\tau$  以上の期間にわたって当該施設を補修しないで供用できる条件付確率（以下、余寿命分布と呼ぶ） $\tilde{F}(\tau|\underline{X}, T_i)$  は

$$\tilde{F}_i(\tau|\underline{X}, T_i) = Pr\{\eta_i \geq T_i + \tau | \underline{X}, \eta_i \geq T_i\} \quad (23)$$

と定義できる。すなわち、確率  $\tilde{F}_i(\tau|\underline{X}, T_i)$  は、経過時間  $T_i$  の地点  $i$  の管理水準  $\underline{X}$  に到達するまでの余寿命が  $\tau$  以上となる確率を表している。さらに、生存確率  $S_t(T_i|\underline{X}, \mathbf{z}_i)$  を用いれば、余寿命分布  $\tilde{F}_i(\tau|\underline{X}, T_i)$  は

$$\tilde{F}_i(\tau|\underline{X}, T_i) = \frac{S_t(T_i + \tau|\underline{X}, \mathbf{z}_i)}{S_t(T_i|\underline{X}, \mathbf{z}_i)} \quad (24)$$

と表される。ただし、 $S_t(T_i|\underline{X}, \mathbf{z}_i)$  は、比例劣化ハザードモデルの生存関数であり、式 (11) で表される。舗装耐荷力指標が管理水準に到達した時点で地点  $i$  の舗装の補修を実施する場合、余寿命分布は、補修タイミングの確率分布を表している。さらに、舗装耐荷力の低

下が管理水準以上に進展する超過確率を  $\zeta$  に設定すれば、それと対応する補修タイミング  $\tau^*$  は

$$\tilde{F}_i(\tau^*) = 1 - \zeta \quad (25)$$

を満足するような  $\tau^*$  として求まる。なお、期待余寿命 (Remaining Mean Distribution) は、部分積分により

$$\begin{aligned} RMD(T_i) &= E[\eta_i - T_i | \eta_i \geq T_i] \\ &= \frac{\int_{T_i}^{\infty} (u - T_i) d\tilde{F}_i(u) du}{\tilde{F}_i(T_i)} \\ &= \frac{1}{\tilde{F}_i(T_i)} \int_{T_i}^{\infty} \tilde{F}_i(u) du \end{aligned} \quad (26)$$

と表される。初期時点における地点  $i$  の舗装耐荷力の期待寿命は

$$RMD(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \tilde{F}_i(u) du \quad (27)$$

となる。

## 4. 推定手法

### (1) 尤度関数の非凸性とベイズ推定

比例劣化ハザードモデルの尤度関数 (13)、あるいは、次節で定式化する完備化尤度関数は、分散パラメータ  $\sigma$  に関して凸性が保証されない。最尤推定法による比例劣化ハザードモデルの尤度関数最大化問題を考えた場合、尤度関数の非凸性により、直接探索法とニュートン・ラフソン法を組み合わせた段階的な最尤推定法を用いる必要があった。一方、本研究では、MCMC 法により分散パラメータ  $\sigma$  を含む全ての未知パラメータを事後分布として同時推定する。このことにより、モデルの推定作業の効率化と、尤度関数の局所的な凸性を、未知パラメータの多峰的な事後分布として明示的に評価することができる。

さらに、本研究で提案する比例劣化ハザードモデルは、ベースライン関数として任意の  $f(t_i)$  と積分計算を尤度関数に内包している。このような複雑な構造を持つ尤度関数に対しては、最尤推定が困難となる場合も少なくない。本研究では、MCMC 法によるベイズ推定を用いることにより、比例劣化ハザードモデルを推定することを可能とする。

### (2) 尤度関数の完備化操作

ここで、仮に、地点  $i = I' + 1, \dots, I$  における 1 回目の点検間隔  $d_1^i = t_1^i$  が  $l_i$  として観測された場合を考える。このとき、データ獲得パターン 2 での点検データ  $\tilde{\xi}_i$  と点検間隔  $l_i$  に関する尤度関数は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\tilde{\xi}_i, l_i, \beta, \theta, \sigma) \\ = \tau(l_i | \bar{x}_1^i, \mathbf{z}_i) \prod_{h=2}^{H_i} \tau\left(l_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i | \bar{x}_h^i, \mathbf{z}_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_d(\ell_i)}{\sigma f(\ell_i)} \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \\
&\cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{\sigma f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)} \right. \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \left. \right] \\
&\quad (i = I' + 1, \dots, I) \quad (28)
\end{aligned}$$

と表現でき、パターン 1 の尤度関数 (13) に一致する。以上の操作を完備化という。完備化された尤度関数 (以下、完備化尤度関数) (28) は、通常の尤度関数 (13) より大幅に簡略化されていることが理解できる。ただし、完備化尤度関数の中に含まれる潜在変数ベクトル  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_{I'+1}, \dots, \ell_I)$  は、観測できない変数である。そこで完備化尤度関数を用いて、潜在変数の確率分布を推定することを考える。完備化尤度関数を用いて、潜在変数  $\ell_i$  ( $i = I' + 1, \dots, I$ ) に関する全条件付き事後確率  $\Pr[\ell_i | \bar{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma]$  は、

$$\begin{aligned}
&\Pr[\ell_i | \bar{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma] \\
&\propto \frac{f_d(\ell_i)}{f(\ell_i)} \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) - \frac{\ln f(\ell_i)}{\sigma} \right\} \\
&\cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)} \right. \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{\sigma} \right\} \left. \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

と表現できる。全条件付き事後確率 (29) には、未知パラメータ  $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma$  が含まれるため、潜在変数  $\ell_i$  の全条件付き事後確率を先験的に求めることは不可能である。そこで、本研究では、全条件付き事後確率 (29) を用いて潜在変数  $\ell_i$  を MCMC 法により、未知パラメータ  $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma$  と同時に反復的にランダム発生させる。このような手続きにより、完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推定値が、尤度関数 (13) を用いて求めたパラメータの最尤推定値に収束することが証明されている<sup>17)</sup>。

### (3) 事前確率密度関数の設定

比例劣化ハザードモデルの未知パラメータ  $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma$  のベイズ推定を考える。まず、それぞれの未知パラメータに対し、事前確率密度関数を設定する。 $\boldsymbol{\beta}$  は、ベースラインモデルの未知パラメータであり、その要素数を  $N_1$  とする。 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{N_1}, \dots, \beta_{N_1})$  の要素それぞれに対し、別個に事前分布を設定する。本研究で用いるベースラインモデルでは、 $\beta_{N_1}$  の定義域は  $(-\infty, \infty)$  または  $[0, \infty)$  を取る。事前分布として、前者のパラメータに対しては正規分布を用い、 $\beta_{N_1} \sim \mathcal{N}(a_{\beta_{N_1}}, b_{\beta_{N_1}})$  と、後者のパラメータに対してはガンマ分布を用い、 $\beta_{N_1} \sim \mathcal{G}(a_{\beta_{N_1}}, b_{\beta_{N_1}})$  とする。ただし、 $a_{\beta_{N_1}}$  は、正規分布の期待値、または、ガンマ分布の形状パラメータ、 $b_{\beta_{N_1}}$  は、正規分布の分散、または、ガンマ分布の尺度パラメータを表す。 $\boldsymbol{a}_\beta = (a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_{N_1}})$ 、 $\boldsymbol{b}_\beta = (b_{\beta_1}, \dots, b_{\beta_{N_1}})$  とする。 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_I)$  に対しては、 $I$  次元正規分布を事前分布として用いる。 $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{a}_\theta, \boldsymbol{b}_\theta)$  であり、 $\boldsymbol{a}_\theta$  は期待値ベクトル、 $\boldsymbol{b}_\theta$  は分散共分散行列である。 $\sigma$  に関しては、 $\sigma \sim \mathcal{G}(a_\sigma, b_\sigma)$  とし、形状パラメータ  $a_\sigma$ 、尺度パラメータ  $b_\sigma$  のガンマ分布を事前分布とする。

### (4) 事後確率密度関数の定式化

事後確率密度関数は、尤度関数と事前確率密度関数との積で表現できる。 $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_I)$ 、 $\boldsymbol{\ell} = (\ell_{I'+1}, \dots, \ell_I)$  を所与としたときの、完備化事後確率密度関数  $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma | \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell})$  は、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \sigma | \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}) \\
&\propto \prod_{i=1}^{I'} \prod_{h=1}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\bar{t}_h^i)}{\sigma f(\bar{t}_h^i)} \right. \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \left. \right] \\
&\cdot \prod_{i=I'+1}^I \left[ \frac{f_d(\ell_i)}{\sigma f(\ell_i)} \right. \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \\
&\cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{\sigma f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)} \right. \\
&\cdot \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \left. \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{n_1=1}^{N_1} \left[ \left[ \exp \left\{ -\frac{(\beta_{n_1} - a_{\beta_{n_1}})^2}{2b_{\beta_{n_1}}} \right\} \right]^{\psi_{n_1}(\chi)} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left\{ \beta_{n_1}^{a_{\beta_{n_1}}-1} \exp \left( -\frac{\beta_{n_1}}{b_{\beta_{n_1}}} \right) \right\}^{1-\psi_{n_1}(\chi)} \right] \\
& \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}_\theta) \mathbf{b}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}_\theta)' \right\} \\
& \cdot \left\{ \sigma^{a_\sigma-1} \exp \left( -\frac{\sigma}{b_\sigma} \right) \right\} \quad (30)
\end{aligned}$$

と定式化できる．ただし， $\psi_{n_1}(\chi)$  は，ベースラインモデル  $\chi$  の  $n_1$  番目のパラメータの定義域が  $(-\infty, \infty)$  のとき 1 を， $[0, \infty)$  のとき 0 を取るダミー変数である．

### (5) 条件付き事後確率密度関数の定式化

MH 法により，比例劣化ハザードモデルの未知パラメータの同時事後確率密度関数 (30) と潜在変数の全条件付き事後確率 (29) から，単一のアゴリズム内で未知パラメータと潜在変数を同時に反復的にサンプリングすることを考える．その際，モデルの全ての未知パラメータあるいは潜在変数を同時に更新するマルチムーブサンプラーでは，未知パラメータベクトルの次元数により，収束が遅くなることが懸念される．そこで，本研究では，未知パラメータベクトルの各要素に対し定義される条件付き事後確率密度関数を用いたギブスサンプラーによる，シングルムーブサンプラーを用いることで，次元の呪いを解消する．さらに，ギブスサンプラーにおいて，同時事後確率密度関数ではなく，条件付き事後確率密度関数から各未知パラメータ要素をサンプリングすることにより，計算負荷も軽減することが可能となる．以下では，個々の未知パラメータに対し，その条件付き事後確率密度関数を定式化する．

未知パラメータベクトル  $\boldsymbol{\beta}$  から要素  $\beta_{n_1}$  を除いた部分ベクトルを  $\boldsymbol{\beta}_{-n_1}$  とする． $\boldsymbol{\beta}_{-n_1}, \boldsymbol{\theta}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}$  を所与としたときのベースラインモデルのパラメータ  $\beta_{n_1}$  ( $n_1 = 1, \dots, N_1$ ) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\beta_{n_1} | \boldsymbol{\beta}_{-n_1}, \boldsymbol{\theta}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell})$  は，

$$\begin{aligned}
& \Pi(\beta_{n_1} | \boldsymbol{\beta}_{-n_1}, \boldsymbol{\theta}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}) \\
& \propto \prod_{i=1}^{I'} \prod_{h=1}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\bar{t}_h^i)}{f(\bar{t}_h^i)} \right] \\
& \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i)}{\sigma} \right\} \\
& \cdot \prod_{i=I'+1}^I \left[ \frac{f_d(\ell_i)}{f(\ell_i)} \right] \\
& \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) - \frac{\ln f(\ell_i)}{\sigma} \right\} \\
& \cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \frac{f_d(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i)}{\sigma} \right\} \Bigg] \\
& \cdot \prod_{n_1=1}^{N_1} \left[ \left[ \exp \left\{ -\frac{(\beta_{n_1} - a_{\beta_{n_1}})^2}{2b_{\beta_{n_1}}} \right\} \right]^{\psi_{n_1}(\chi)} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left\{ \beta_{n_1}^{a_{\beta_{n_1}}-1} \exp \left( -\frac{\beta_{n_1}}{b_{\beta_{n_1}}} \right) \right\}^{1-\psi_{n_1}(\chi)} \right] \quad (31)
\end{aligned}$$

と表現できる．

未知パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  から要素  $\theta_i$  を除いた部分ベクトルを  $\boldsymbol{\theta}_{-i}$  とする． $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-i}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}$  を所与としたときのパラメータ  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\theta_i | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-i}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell})$  は，

$$\begin{aligned}
& \Pi(\theta_i | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-i}, \sigma, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}) \\
& \propto \prod_{i=1}^{I'} \prod_{h=1}^{H_i} \\
& \quad \left[ \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) + \frac{\bar{z}_i \theta_i}{\sigma} \right\} \right] \\
& \cdot \prod_{i=I'+1}^I \\
& \quad \left[ \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) + \frac{\bar{z}_i \theta_i}{\sigma} \right\} \right. \\
& \quad \cdot \prod_{h=2}^{H_i} \\
& \quad \left. \left[ \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. + \frac{\bar{z}_i \theta_i}{\sigma} \right\} \right] \right] \\
& \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}_\theta) \mathbf{b}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}_\theta)' \right\} \quad (32)
\end{aligned}$$

と表現できる．

$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}$  を所与としたときのパラメータ  $\sigma$  の条件付き事後確率密度関数  $\Pi(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell})$  は，

$$\begin{aligned}
& \Pi(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\ell}) \\
& \propto \prod_{i=1}^{I'} \prod_{h=1}^{H_i} \left[ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \right] \\
& \cdot \prod_{i=I'+1}^I \left[ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\exp \left( -\frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\ln f(\ell_i) - \ln \bar{x}_1^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'}{\sigma} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{h=2}^{H_i} \left[ \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta^i}{\sigma} \right) - \frac{\ln f(\ell_i + \sum_{a=2}^h \bar{b}_a^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta^i}{\sigma} \right\} \frac{1}{\sigma} \right] \cdot \left\{ \sigma^{a_\sigma - 1} \exp \left( - \frac{\sigma}{b_\sigma} \right) \right\} \quad (33)$$

と表現できる.

また, 潜在変数の全条件付き事後確率密度は式 (29) ですでに与えられている. 個々の条件付き事後確率密度関数 (29), (31)~(33) から未知パラメータ, 潜在変数のサンプリングを行う. 比例劣化ハザードモデルでは, 条件付き事後確率密度関数を用いた場合でも, それらの分布を解析に求めることが不可能であるため, MH 法により, 反復的に条件付き事後確率密度からのサンプリングを行うことにより, 未知パラメータの事後分布と, 潜在変数分布を推定し, 推定された分布に関する統計量を用いて劣化過程やその特性を記述する.

## (6) 推定フロー

比例劣化ハザードモデルのベイズ推定法の具体的な推定フローを以下と図-3 で説明する.

### ステップ 1 初期設定

事前分布のパラメータ  $a_\beta, b_\beta, a_\theta, b_\theta, a_\sigma, b_\sigma$  を設定する. 未知パラメータの初期値  $\beta^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}$  を設定する. 潜在変数についても, 初期値  $\ell^{(0)}$  を設定する. これらの初期値の影響は, サンプリング回数  $n$  が増加するにつれ薄くなる. MCMC 法のバーンイン回数  $\bar{n}$ , アルゴリズムの終了回数  $\bar{n}$  を設定する.  $n = 1$  とする.

### ステップ 2 未知パラメータのサンプリング

未知パラメータ  $\beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}$  をサンプリングする.

#### ステップ 2-1 $\beta^{(n)}$ のサンプリング

◇  $\Pi(\beta_1^{(n)} | \beta_{-1}^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  から  $\beta_1^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

⋮

◇  $\Pi(\beta_{N_1}^{(n)} | \beta_{-N_1}^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  から  $\beta_{N_1}^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

#### ステップ 2-2 $\theta^{(n)}$ のサンプリング

◇  $\Pi(\theta_1^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta_{-1}^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  から  $\theta_1^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

⋮

◇  $\Pi(\theta_I^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta_{-I}^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  から  $\theta_I^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

#### ステップ 2-3 $\sigma^{(n)}$ のサンプリング

◇  $\Pi(\sigma^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  から  $\sigma^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

### ステップ 1

- 事前分布のパラメータ  $a_\beta, b_\beta, a_\theta, b_\theta, a_\sigma, b_\sigma$  を設定する
- 未知パラメータの初期値  $\beta^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}$  を設定する
- 潜在変数の初期値  $\ell^{(0)}$  を設定する
- バーンイン  $\bar{n}$ , アルゴリズムの終了回数  $\bar{n}$  を設定する
- $n = 1$  とする

### ステップ 2

- 未知パラメータ  $\beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}$  を以下の順序で反復的にサンプリングする

#### ステップ 2-1

- ✓ 未知パラメータ  $\beta_1^{(n)}$  を  $\Pi(\beta_1^{(n)} | \beta_{-1}^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  からランダムサンプリングする
- ⋮
- ✓ 未知パラメータ  $\beta_{N_1}^{(n)}$  を  $\Pi(\beta_{N_1}^{(n)} | \beta_{-N_1}^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  からランダムサンプリングする

#### ステップ 2-2

- ✓ 未知パラメータ  $\theta_1^{(n)}$  を  $\Pi(\theta_1^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta_{-1}^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  からランダムサンプリングする
- ⋮
- ✓ 未知パラメータ  $\theta_I^{(n)}$  を  $\Pi(\theta_I^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta_{-I}^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  からランダムサンプリングする

#### ステップ 2-3

- ✓ 未知パラメータ  $\sigma^{(n)}$  を  $\Pi(\sigma^{(n)} | \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \bar{\xi}, \ell^{(n-1)})$  からランダムサンプリングする

### ステップ 3

- 潜在変数  $\ell^{(n)}$  を反復的にサンプリングする
- ✓ 潜在変数  $\ell_{I+1}^{(n)}$  を  $\Pr[\ell_{I+1}^{(n)} | \bar{\xi}_{I+1}, \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}]$  からランダムサンプリングする
- ⋮
- ✓ 潜在変数  $\ell_I^{(n)}$  を  $\Pr[\ell_I^{(n)} | \bar{\xi}_I, \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}]$  からランダムサンプリングする

### ステップ 4

- 収束判定
- No  $n > \bar{n}$  Yes
- $\beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \ell^{(n)}$  を記録

### ステップ 5

- アルゴリズムの終了判定
- No  $n \geq \bar{n}$  Yes

アルゴリズムの終了

図-3 推定フロー

### ステップ 3 潜在変数のサンプリング

◇  $\Pr[\ell_{I+1}^{(n)} | \bar{\xi}_{I+1}, \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}]$  から  $\ell_{I+1}^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

⋮

◇  $\Pr[\ell_I^{(n)} | \bar{\xi}_I, \beta^{(n)}, \theta^{(n)}, \sigma^{(n)}]$  から  $\ell_I^{(n)}$  をランダムサンプリングする.

#### ステップ4 収束判定

サンプリング回数  $n$  が予め設定したバーンイン回数  $n$  より大きい場合、 $\beta^{(n)}$ ,  $\theta^{(n)}$ ,  $\sigma^{(n)}$ ,  $\ell^{(n)}$  を記録し、ステップ5へ進む。それ以外の場合、 $n = n + 1$  とし、ステップ2へ戻る。

#### ステップ5 アルゴリズムの終了判定

サンプリング回数  $n$  が予め設定したアルゴリズム終了回数  $\bar{n}$  に到達した場合、アルゴリズムを終了する。それ以外の場合、それ以外の場合、 $n = n + 1$  とし、ステップ2へ戻る。

## 5. おわりに

本研究では、連続量指標により観測される舗装劣化指標を直接的に用いて劣化過程を予測するための方法論を提案した。具体的には、対象とする劣化事象の代表的な劣化過程を表現するベースラインモデルと、それに対して比例的に変動する異質性項により構成される比例劣化ハザードモデルを定式化した。さらに、提案した比例劣化ハザードモデルのベイズ推定法を定式化した。その際、不可観測的な点検間隔を考慮するために、完備化尤度関数を定式化し、潜在変数を用いたMCMC法による方法論を構築した。今後の課題としては、多様なベースラインモデルの候補に対して検討を重ね、ベースラインモデルの精度を向上させてゆくことがあげられる。また、比例劣化ハザードモデル自体の適用事例も蓄積し、方法論の逐次改善が重要となる。

なお、研究発表会当日は、実在の高速道路舗装で獲得された点検データを用いた適用事例も紹介する。

#### 参考文献

- 1) 貝戸清之, 熊田一彦, 林秀和, 小林潔司: 階層型指数劣化ハザードモデルによる舗装ひび割れ過程のモデル化, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.3, pp.386-402, 2007.
- 2) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.

- 3) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 4) Shin, H.C. and Madanat, S.: Development of a stochastic model of pavement distress initiation, *Journal of Infrastructure Planning & Management*, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
- 5) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 6) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 7) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 8) 下村泰造, 小濱健吾, 貝戸清之, 小林潔司: 空港舗装アセットマネジメントのためのハイブリッド型地盤沈下モデル, 土木学会論文集 F, Vol.64, No.4, pp.463-482, 2008.
- 9) 田中尚, 藤森裕二, 貝戸清之, 小林潔司, 安野貴人: 加速劣化ハザードモデル: コンクリート中性化予測への適用, 土木学会論文集 D, Vol.66, No.3, pp.329-341, 2010.
- 10) 中村剛: Cox 比例ハザードモデル, 医療統計学シリーズ, 朝倉書店, 2001.
- 11) J. P. Klein and M. L. Moeschberger: *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data (Statistics for Biology and Health)*, Springer-Verlag, 1997.
- 12) 大井明, 宮崎文平, 小濱健吾, 貝戸清之, 小林潔司, 山口清人: 定期的な FWD 調査データを用いた高速道路舗装の劣化予測, 土木学会論文集 E1, Vol.70, No.2, pp.11-25, 2014.
- 13) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 14) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 15) Lee, E. T. and Wang, J. W.: *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, John Wiley & Sons, 2003.
- 16) Cox, D.R. and Oakes, D.: *Analysis of Survival Data*, Chapman & Hall/CRC, 1998.
- 17) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of Finite Mixture Distributions through Bayesian Sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.

(2015. 4. 24. 受付)

## A DETERIORATION HAZARD MODEL OF PAVEMENT STRUCTURE EMPLOYING CONTINUOUS VOLUME INDEX

Daijiro MIZUTANI, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI