

vine コピュラに基づく 社会基盤施設の劣化総合評価

早矢仕廉太郎¹・小濱健吾²・貝戸清之³・小林潔司⁴

¹学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail:r.hayashi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学特任助教 大学院工学研究科 NEXCO 西日本 高速道路学共同研究講座 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-8)

E-mail:k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

⁴フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail:kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

管理者は、社会基盤施設に発現する複数の劣化事象から、施設の状態を多角的に評価しなければならない。その際、複数の劣化事象の間には相互作用が存在する可能性があり、その影響は、劣化事象の組み合わせによって異なる。本研究では、複数の劣化事象間の異なる相関関係を考慮した多角的劣化過程モデルを提案する。具体的には、個別劣化事象の進展過程を異質性パラメータを導入した混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて記述するとともに、異質性パラメータの同時分布関数をコピュラを用いて表すことで、複数指標間の相関関係を記述する。その際、vine コピュラ概念に基づき、劣化事象間の異なる相関関係を詳細に表現する。最後に、下水道管渠に対する点検データを用いた実証分析を通じて、本研究で提案する手法の有効性を検証する。

Key Words : vine copula, multidimensional deterioration evaluation, mixed Markov hazard model

1. はじめに

社会基盤施設には、複数の劣化事象が発現する。また、各々の劣化事象が複雑に絡み合うことにより、社会基盤施設の劣化は複合的に進展する。したがって、管理者は発現する劣化事象に応じて多様な点検を定期的の実施し、それらの結果に基づいて施設の健全性を総合的に評価しなければならない。点検データに基づき、総合的に施設の劣化を評価する方法として、個別の劣化事象に重み付けをし、単一の評価指標に総合化することで一元的な評価を実施する方法があげられる。本研究で対象とする下水道管渠においても、腐食、たるみ、破損などの個別の劣化事象を、単一の評価指標である緊急度として総合化することで、一元的な評価が実施されている¹⁾。しかし、重みの付け方や、個別の劣化事象間の相互作用を考慮していないなど、工学的な観点から十分な有効性を示すことができていないのが実状である。

単一の評価指標に基づく施設の劣化評価について、点検データに基づく統計的劣化予測技術に関する研究が蓄積されている。なかでも、マルコフ劣化ハザードモデル²⁾の開発は、離散的な健全度評価がなされた社会基盤施設の劣化予測精度を飛躍的に向上させた。また、混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾の開発により、施設単

位や部材単位、あるいは管理者側が実際の管理体制に応じて設定した評価単位（以下、施設カテゴリ）ごとの劣化特性（異質性）の計量化が可能となった。

一方、社会基盤施設は多様な要因により劣化が進行する。劣化要因が異なれば、劣化の進展メカニズムも異なり、さらに、劣化事象間に相互作用が存在する可能性もある。したがって、総合化された単一の評価指標のみでは、必ずしも社会基盤施設の劣化過程を適切に表現しているとはいえない。水谷等は劣化事象間に介在する相互作用が、異質性間の相関性によって表現可能であると考え、異質性パラメータの同時分布をコピュラ（接合分布関数）⁴⁾を用いて表現した⁵⁾。これにより、社会基盤施設の劣化過程を、劣化事象間の相互作用を考慮した上で、多角的に評価することが可能となった。しかし、同方法論では、モデル化する際、全ての劣化事象間の相関構造が同一であるという条件を仮定しているため、劣化事象間の異なる相関関係を適切に表現できないという課題がある。

以上の問題意識の下、本研究では、社会基盤施設に発現する複数の劣化事象から、施設の状態を多角的に評価することを目的として、劣化事象間の異なる相関関係を詳細に分析するための方法論を提案する。具体的には、個別の評価指標を用いた劣化過程を異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルにより表現

する。さらに、異質性パラメータの同時分布関数をコピュラを用いて表すことで、複数の劣化事象間の相関関係を記述する。その際、劣化事象間の異なる相関関係を詳細に記述するために、劣化事象全体の相関構造を表すコピュラを、2つの劣化事象間の相関構造を表す2変量コピュラ（以下、ペア・コピュラ）によって分解する。以下、2.で、本研究の基本的な考え方を述べる。3.で、多元的劣化過程モデルを記述するとともに、劣化事象間で異なる相関関係を vine コピュラ の概念を用いて定式化する。4.では、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたモデルの推定手法を詳述する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 既往研究の概要

近年、社会基盤施設のアセットマネジメントを支援する統計的劣化予測技術が急速に発展した。施設の劣化状態が離散的な健全度として評価される場合、マルコフ連鎖モデルを用いて施設の劣化過程をモデル化することができる。マルコフ劣化ハザードモデル（多段階指数ハザードモデル）²⁾の開発により、点検情報に基づく劣化予測精度は飛躍的に向上した。また、ハザード率に内包される特性変数では表現しきれない要因（不可観測要因）の影響を確率変数で表現したような、混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾が提案されている。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、劣化速度を表す混合ハザード率が異質性パラメータと健全度別標準ハザード率を用いて、

混合ハザード率

$$= \text{異質性パラメータ} \times \text{健全度別標準ハザード率} \quad (1)$$

と表現される。混合マルコフ劣化ハザードモデルの開発により、任意の評価単位における劣化予測を通じて、評価単位ごとの補修優先順位の決定や予算配分といった、政策の意思決定を体系的に実施することが可能となった。

上記の統計的劣化予測モデルは、いずれも社会基盤施設の劣化状態を単一の評価指標で評価することを想定している。しかし、社会基盤施設は複数の劣化要因により劣化が進行する。劣化要因が異なれば、劣化の進展メカニズムも異なるために、単一の評価指標ではなく、複数の評価指標を用いて評価する方が望ましい場合が少なくない。このような社会基盤施設の多元的劣化過程のモデル化に関して、競合的劣化ハザードモデルに関する研究事例がある⁶⁾。競合的劣化ハザードモデルは、極めて相関性の高い劣化事象の競合関係をモデル化していることを目的としていたため、任意の劣化事象による多元的劣化過程をモデル化できるような柔軟性をもっていなかった。水谷等は、劣化事象間の相

互作用が劣化事象の異質性に介在するとみなし、異質性パラメータの同時分布をコピュラを用いて表現した多元的劣化過程モデル⁵⁾を開発し、施設の多元的劣化過程全体を、多次元の混合マルコフ劣化ハザードモデルシステムで表現することを可能とした。多元的劣化過程モデルの開発により、施設の劣化評価に対して、単一の劣化事象内での劣化速度の相対比較だけでなく、複数の劣化事象での劣化速度を考慮した多元的なグルーピングを行うことが可能となった。これにより、施設に対して、重点的な監視のみならず、各劣化事象に対応した詳細な補修計画の立案が可能となった。

一方で、水谷等により提案された多元的劣化過程モデルでは、対象とする複数の劣化事象の異質性パラメータ間の相関構造が全て同一であると仮定している。しかし、多様に異なる劣化事象間において、全てが同一の相関構造を有するとは考え難い。複数の劣化事象が発現する施設の多元的な劣化過程を表現するためには、劣化事象間の相関構造を詳細に記述することが重要となる。本研究では、劣化事象の異質性全体の相関構造を表すコピュラを vine の概念に基づき分解し、異質性パラメータ間の異なる相関構造をペア・コピュラによって表現する。

(2) 劣化事象間の異なる相関関係

多元的劣化過程モデルでは、施設の劣化状態を複数の健全度指標で表現し、各劣化事象の進展過程を混合マルコフ劣化ハザードモデルによって記述する。その際、異質性パラメータ値が施設カテゴリーごとの劣化特性の異質性だけでなく、複数の劣化事象の相互作用による劣化速度の異質性によって表現されると考え、各劣化事象の異質性の関係性を同時分布で表す。劣化事象間の相互作用が各劣化事象の異質性に介在するとみなせば、同時分布に存在する相関性によってその影響を表すことができる。図-1には、コピュラ、異質性パラメータの周辺分布、異質性パラメータの同時分布の3者の関係を模式的に示している。図-1は、複数の社会基盤施設の劣化状態を2種類の劣化事象 A 、 B を用いて評価する場合を想定している。同図左下に示すように、各社会基盤施設の劣化速度の異質性を ε_A 、 ε_B という2種類の異質性パラメータで表現している。それぞれの施設カテゴリーの劣化特性は、2次元空間上におけるポジショニングにより表現される。また、縦軸、横軸にはそれぞれの劣化事象の異質性パラメータの値を表している。異質性パラメータの組 $(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ は、2次元空間において同時確率密度関数 $f(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ に従って分布していると考えられる。また、異質性パラメータの同時分布は、周辺分布とコピュラに分解される。図-1では、周辺分布関数に従い分布する異質性パ

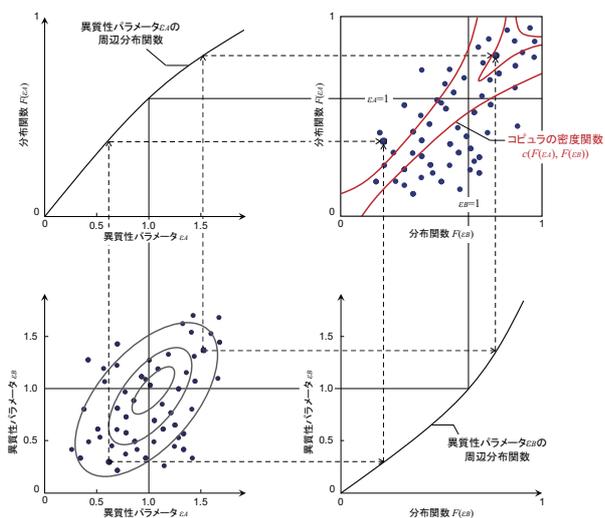


図-1 異質性パラメータの同時分布とコピュラ

ラメータの値を用いて、それぞれの劣化事象の劣化速度に関する相対評価を行うことができる。さらに、個別の劣化事象に関する劣化速度の相対評価結果を用いて、2次元空間上における相対評価を行うことが可能になる。このようにコピュラは周辺分布関数と同時分布関数を接合することを目的としており、劣化事象による相対評価と多次元空間上の相対評価の整合性を確保しながら、異質性パラメータの相関構造を同時確率分布関数として推定することが可能になるという利点がある。

一方、施設に発現する複数の劣化事象において、全ての劣化事象間が、同一の相関構造を有しているとは限らない。図-2には、社会基盤施設の劣化状態を3つの劣化事象A、B、Cを用いて評価した場合の各劣化事象の異質性パラメータの散布図を例示している。図-2左上に示す劣化事象A、Bの異質性パラメータの関係と、図-2右上に示す劣化事象A、Cの異質性パラメータの関係を比較すると、各異質性パラメータ間で相関の強さが異なることが見てとれる。一方、同じ相関の強さを有していたとしても、異質性パラメータ間の相関構造が異なる場合もある。図-2右下の劣化事象B、Cの異質性パラメータは、図-2左上劣化事象A、Bの異質性パラメータと同様の相関の強さを有しているにも関わらず、裾の構造が異なるため、異なる相関構造を有していることが確認できる。このように、相関構造は、相関の強さと裾の構造の相違によって表現される。異質性パラメータ間によって異なる相関構造を表現するためには、異質性パラメータの同時分布の相関構造を表現するコピュラをより詳細に記述する必要がある。

多変量コピュラを詳細に記述する方法として、vine (ブドウの木) の概念に基づき、ペア・コピュラによ

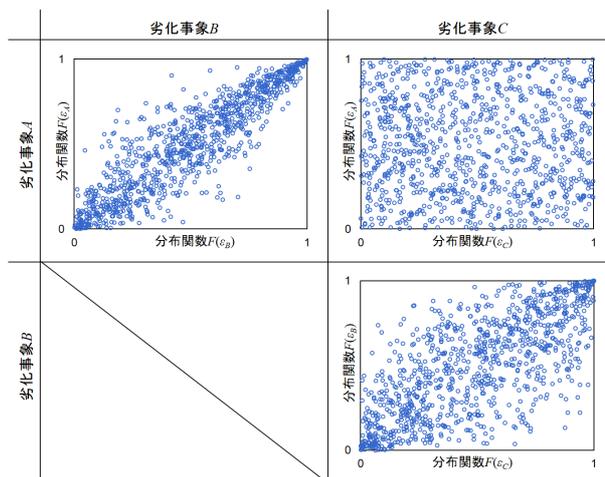


図-2 複数の劣化事象の異質性パラメータの同時分布

て分解する方法論が提案されている⁷⁾。vine の概念に基づき分解されたコピュラ (以下、vine コピュラ) は、グラフ理論から発達した手法であり、計量経済学の分野などでも多く用いられ、体系的にも整理されている^{8),9)}。vine コピュラを用いることで、異質性パラメータ間で異なる相関構造をペア・コピュラによって詳細に表現することが可能である。さらに、各劣化事象の異質性パラメータ間の相関構造を表すペア・コピュラは、多変量コピュラと異なり、負の相関構造を考慮することが可能である。また、推定したパラメータの事後分布を用いることで、従来、管理者の先験的情報によって仮定していた相関関係の有無を、統計的な見地に基づいて検定することが可能となる。

(3) パラメータの同時推定と段階的推定

コピュラを用いたモデルの推定では、コピュラのパラメータと周辺分布の確率密度関数のパラメータを同時に推定する方法が考えられる。水谷等は、多元的劣化過程モデルの推定において、各劣化事象の劣化過程を表す混合マルコフ劣化ハザードモデルと、異質性パラメータの同時分布を用いて尤度関数を定義し、階層ベイズ法を用いて、パラメータの同時推定を行っている⁵⁾。しかし、本研究で提案するvine コピュラを用いた多元的劣化過程モデルは、ペア・コピュラによってコピュラの相関構造を表現するに伴い推定すべきパラメータが増加するため、全てのパラメータを同時に推定する場合、計算不可の増大、および推定精度の低下が生じる可能性が高い。コピュラのパラメータを推定する際の計算不可の増大や推定精度の低下を考慮し、まず周辺分布を規定するパラメータを推定した上で、コピュラのパラメータの推定を行うような段階的な推定手法が多く提案されている¹⁰⁾。また、段階的な推定手

法は、実務的に許容可能な推定精度が担保されることが確認されている¹¹⁾。さらに Joe は、コンピュータに関する段階的推定法は、多変量を扱う場合や vine コピュラを援用するといった多くのパラメータを推定する場合に有効であることを示唆している¹⁰⁾。したがって、本研究では、モデルの推定に際して段階的な推定手法を採用し、まず、周辺分布を規定するパラメータを推定した後に、コンピュータのパラメータを推定する。

本研究で取り扱う異質性パラメータは、劣化事象間の異質性のみでなく、施設カテゴリーが各劣化事象に対して有する劣化特性も表現するため、直接観測することができない。そのため、周辺分布を規定するパラメータを、異質性パラメータを用いて直接推定することができず、また、コンピュータのパラメータを推定する際においても、異質性パラメータを用いることができない。異質性パラメータを内包した混合マルコフ劣化ハザードモデルの推定においては、平均化操作を行うことで、標準ハザード率に内包される未知パラメータと周辺分布の確率密度関数を規定するパラメータを推定し、その後、異質性パラメータの最適解を求める段階的な最尤推定法を提案している³⁾。そこで、本研究ではまず、各劣化事象の劣化過程を表す混合マルコフ劣化ハザードモデルを個々に推定する。その際、小濱等の提案手法と同様に、異質性パラメータの平均化操作を行うことで、標準ハザード率に関する未知パラメータと異質性パラメータの周辺分布を規定するパラメータを同時に推定する。その後、推定したパラメータを与件とし、コンピュータのパラメータ、および異質性パラメータを同時に推定する手法を採用する。

3. 多元的劣化過程モデル

(1) モデル化の前提条件

社会基盤施設が有する多元的な劣化事象 d ($d = 1, \dots, D$) の進展過程を表現する問題を考える。当面の間、劣化事象 d ($d = 1, \dots, D$) に着目し議論を進めることとし、表記を簡略化するため、 d に関する添え字は省略する。カレンダー時刻 s_0 を初期時点 $t = 0$ とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots$ を考え、離散的時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。単位時間幅を 1 に基準化する。時点 t における健全度を状態変数 $h(t) = i$ ($i = 1, \dots, I; t = 0, 1, \dots$) を用いて表現する。劣化事象が進展する過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し、離散時間軸上における健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する。劣化事象の進展過程を表す推移確率は、時点 t における健全度 $h(t) = i$ を与件とし、次の時点 $t+1$ における健全度 $h(t+1) = j$ ($j \geq i$)

が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[h(t+1) = j | h(t) = i] = \pi_{ij} \quad (2)$$

を用いて定義される。マルコフ推移確率 (2) は所与の 2 つの時点 $t, t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり、対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$ ($i > j$) が成立する。推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して、

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} &\geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} &= 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が成立する。健全度 I は、補修がない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立する。なお、マルコフ連鎖モデルでは、健全度が $i-1$ から i に推移した時点にかかわらず、時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみ依存するというマルコフ性を満足する¹⁵⁾。

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデル

いま、施設カテゴリーごとに、劣化速度が異なると考える。施設カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) の施設 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) で発生する劣化事象の健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) のハザード率を、個別ハザード率

$$\lambda_i^k = \tilde{\lambda}_i^k \varepsilon^k \quad (4)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K)$$

を用いて表す。ここに、 $\tilde{\lambda}_i^k$ は、施設カテゴリー k の施設 l_k が有する劣化事象の健全度 i の平均的なハザード率 (以下、標準ハザード率) である。異質性パラメータ ε^k は、施設カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) における劣化事象の標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^k$ からの乖離の程度を表す確率変数であり、 $\varepsilon^k \geq 0$ が成立すると仮定する。異質性パラメータ ε^k の値が大きくなるほど、当該施設カテゴリー k に含まれる全ての施設の劣化事象の劣化速度が、標準ハザード率に対して大きいことを表す。式 (4) において、全ての健全度のハザード率に、同一の確率変数 ε^k が含まれる。このことは、ある健全度において劣化速度が大きい場合、他の健全度の劣化速度も相対的に大きくなることを意味する。

施設カテゴリー k ($k = 1, \dots, K$) の劣化事象に関する異質性パラメータ ε^k の値を $\bar{\varepsilon}^k$ に固定する。施設カテゴリー k のある任意の施設に関して劣化事象の健全度 i の寿命が y 以上となる確率 $\tilde{G}_i(y|\bar{\varepsilon}^k)$ を、指数ハザード率 (4) を用いて

$$\tilde{G}_i(y|\bar{\varepsilon}^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^k \bar{\varepsilon}^k y) \quad (5)$$

と表す。劣化事象に関して、施設カテゴリー k のある

施設 l_k の第 1 回目の点検時刻 $\Lambda_A^{l_k}$ で健全度が i と判定され、次の点検時刻 $\Lambda_B^{l_k} = \Lambda_A^{l_k} + z^{l_k}$ においても健全度が i と判定される確率 $\pi_{ii}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k)$ は、

$$\pi_{ii}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \quad (6)$$

となる。また、点検時刻 $\Lambda_A^{l_k}$ と $\Lambda_B^{l_k} = \Lambda_A^{l_k} + z^{l_k}$ の間で健全度が i から j ($> i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k)$ は、式 (4) より、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k) &= \sum_{s=i}^j \prod_{w=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_w^{l_k}}{\tilde{\lambda}_w^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \exp(-\tilde{\lambda}_s^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \\ &= \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_s^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \quad (7) \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I; k = 1, \dots, K) \end{aligned}$$

と表すことができる²⁾。ただし、 $\tilde{\lambda}^{l_k} = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k})$ である。また、 $\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k})$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) = \prod_{w=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_w^{l_k}}{\tilde{\lambda}_w^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \quad (8)$$

となり、標準ハザード率のみの関数で表される。ただし、表記上の規則として、

$$\begin{cases} \prod_{w=i}^{s-1} \frac{\lambda_w^{l_k}}{\lambda_w^{l_k} - \lambda_s^{l_k}} = 1 & (s = i \text{ の時}) \\ \prod_{w=s}^{j-1} \frac{\lambda_w^{l_k}}{\lambda_{w+1}^{l_k} - \lambda_s^{l_k}} = 1 & (s = j \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える。さらに、表記の便宜上、

$$\begin{aligned} &\prod_{w=i, \neq s}^{j-1} \frac{\lambda_w^{l_k}}{\lambda_w^{l_k} - \lambda_s^{l_k}} \\ &= \prod_{w=i}^{s-1} \frac{\lambda_w^{l_k}}{\lambda_w^{l_k} - \lambda_s^{l_k}} \prod_{w=s}^{j-1} \frac{\lambda_w^{l_k}}{\lambda_{w+1}^{l_k} - \lambda_s^{l_k}} \end{aligned}$$

と簡略化する。また、 $\pi_{iI}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k)$ に関しては、

$$\pi_{iI}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z^{l_k}|\bar{\varepsilon}^k) \quad (9)$$

と表すことができる。なお、マルコフ劣化ハザードモデルを用いれば、アセットマネジメントのためのリスク管理指標を導出できる。すなわち、当該健全度にはじめて到達した時点から、劣化が進展して次の健全度に進むまでの期待期間長（以下、期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\tilde{G}_i(y_i)$ を用いて

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \tilde{G}_i(y|\bar{\varepsilon}^k) dy \quad (10)$$

と表される¹⁶⁾。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数 $\tilde{G}_i(y_i)$ が式 (5) で表されることに留意すれば、期待寿命は次式で表される。

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k y) dy = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k} \quad (11)$$

式 (11) を用いることにより、初期時点からの経過年数とインフラ施設の平均的な健全度との対応関係を求めることができる。

期間 $[\Lambda_A^{l_k}, \Lambda_B^{l_k})$ における施設 l_k の劣化事象の進展過程を個別ハザード率 $\lambda_i^{l_k} = \tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k$ ($i = 1, \dots, I-1$) を用いて表現する。健全度 I はマルコフ連鎖の吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_I^{l_k}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_I^{l_k} = 0$ となる。施設の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K$) は施設の特徴ベクトル $\mathbf{x}^{l_k} = (x_1^{l_k}, \dots, x_M^{l_k})$ に依存すると考え、標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ を

$$\tilde{\lambda}_i^{l_k} = \exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}_i') \quad (12)$$

と表す。ただし、 $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ ($m = 1, \dots, M$) による行ベクトル、記号 ' $'$ ' は転置操作を表す。また、 $x_1^{l_k} = 1$ より、 $\beta_{i,1}$ は定数項を表す。

(3) コピュラによる相関構造のモデル化

D 種類の劣化事象の異質性パラメータ ε_d^k の同時確率分布をコピュラ C を用いて表す。コピュラの詳細は参考文献^{4),17)}に譲るが、モデルの定式化に先立ち、読者の便宜を図るためにコピュラの概要を説明する。以降では、劣化事象に関する添え字 d ($d = 1, \dots, D$) を改めて表記する。周辺分布関数 F_1, \dots, F_D を持つ D 個の確率変数 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D$ の連続な同時分布関数を $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ とすると、スクラーの定理¹⁸⁾より、

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D) \\ = C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \end{aligned} \quad (13)$$

を満たすコピュラ C が一意に存在する。スクラーの定理から、コピュラ C に周辺分布 F_1, \dots, F_D を適用することで生成される $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ は、周辺分布を区間 $[0, 1]$ とする同時分布関数である。また、

- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について、 $C(u_1, \dots, u_{d-1}, 0, u_{d+1}, \dots, u_D) = 0$
- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について、 $C(1, \dots, 1, u_d, 1, \dots, 1) = u_d$
- $u_d^1 \leq u_d^2$ を満たす全ての (u_1^1, \dots, u_D^1) , $(u_1^2, \dots, u_D^2) \in [0, 1]^D$ に対して、

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_D=1}^2 (-1)^{\sum_{s=1}^D i_s} C(u_1^{i_1}, \dots, u_D^{i_D}) \geq 0$$

の 3 つの性質を全て満たすような関数 C がコピュラとして定義される¹⁷⁾。 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ とすると、同時確率密度関数 $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ は、コピュラの分布関数 $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ あるいは確率密度関数

$c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ を用いて,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\partial^D C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))}{\partial F_1(\varepsilon_1) \cdots \partial F_D(\varepsilon_D)} \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \\ &= c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \end{aligned} \quad (14)$$

と表現できる．ここに、 f_d は周辺分布関数 F_d の確率密度関数であり、ガンマ分布

$$f_d(\varepsilon_d) = \frac{(\phi_d)^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} (\varepsilon_d)^{\phi_d-1} \exp(-\phi_d \varepsilon_d) \quad (15)$$

を仮定する．なお、ガンマ分布 (15) は形状パラメータが ϕ_d 、尺度パラメータが $1/\phi_d$ であり、平均 1、分散 $1/\phi_d$ をとる．これにより、個別ハザード率の期待値が標準ハザード率と一致する．

(4) vine コピュラによる相関構造の分解

D 種類の劣化事象の異質性パラメータの同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varepsilon}) &= f_1(\varepsilon_1) \cdot f_2(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \cdot f_3(\varepsilon_3|\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &\quad \cdots f_D(\varepsilon_D|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{D-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

と分解することができる．ここで、式 (16) に含まれる条件付き確率密度関数 $f_2(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$ に着目すると、 $f_2(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$ は式 (14) を用いて

$$f_2(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = \frac{f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{f_1(\varepsilon_1)} = c(F_1(\varepsilon_1), F_2(\varepsilon_2)) \cdot f_2(\varepsilon_2) \quad (17)$$

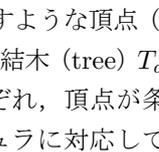
と表すことができる．一般に、条件付き確率密度関数 $f_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v})$ は

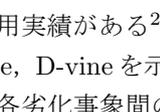
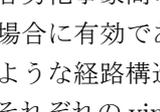
$$f_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v}) = c(F_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v}^{-g}), F_g(v_g|\boldsymbol{v}^{-g})) \cdot f(\varepsilon_d|\boldsymbol{v}^{-g}) \quad (18)$$

によって表される．ただし、 \boldsymbol{v}^{-g} はベクトル \boldsymbol{v} から v_g を除いたベクトルである．また、条件付き周辺分布関数 $F_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v})$ は

$$F_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v}) = \frac{\partial C(F_d(\varepsilon_d|\boldsymbol{v}^{-g}), F_g(v_g|\boldsymbol{v}^{-g}))}{\partial F_g(v_g|\boldsymbol{v}^{-g})} \quad (19)$$

となる¹⁹⁾．式 (18) を繰り返し用いることで、同時確率密度関数 $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ は、ペア・コピュラと異質性パラメータの確率密度関数の積として表現することができる．言い換えれば、本研究で扱うような多変量コピュラは、ペア・コピュラによって分解することが可能である．ペア・コピュラによる分解の方法として vine の概念に基づく手法が提案されており⁷⁾、体系的に整理されている^{8),9)}．

vine は、に示すような頂点 (node) と辺 (edge) を用いて表現される連結木 (tree) T_d ($d = 1, \dots, D-1$) の集合である．それぞれ、頂点が条件付き周辺分布関数、辺がペア・コピュラに対応しており、 D 変量のコ

ピュラは、 $D(D-1)/2$ 個のペア・コピュラによって分解される．Bedford and Cooke によって提案されたレギュラー・vine は、考えられうる多くの構造をペア・コピュラによって記述することが可能である⁷⁾．一方で、経験的に事象間の相関構造が明らかである場合には、レギュラー・vine の特殊ケースである canonical-vine (以下、c-vine) や D-vine が有用である．c-vine や D-vine はコピュラの構造が簡単に記述できることから数多くの適用実績がある^{20),21)}．には、 $D = 5$ の場合の c-vine、D-vine を示している．c-vine は、特定の劣化事象が各劣化事象間の相互作用の中心となることが明らかなる場合に有効である．一方、D-vine は  (b) に示すような経路構造を有している場合にメリットがある．それぞれの vine を用いた場合のコピュラの確率密度関数 $c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ は c-vine の場合が

$$\begin{aligned} c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) &= \prod_{g=1}^{D-1} \prod_{r=1}^{D-g} \\ & c(F_g(\varepsilon_g|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g-1}), F_{g+r}(\varepsilon_{g+r}|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g-1})) \end{aligned} \quad (20)$$

であり、D-vine の場合、

$$\begin{aligned} c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) &= \prod_{g=1}^{D-1} \prod_{r=1}^{D-g} \\ & c(F_r(\varepsilon_r|\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_{r+g-1}), \\ & F_{g+r}(\varepsilon_{g+r}|\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_{r+g-1})) \end{aligned} \quad (21)$$

となる．なお、式 (16) を対象とした場合に獲得されるコピュラは、c-vine によって分解された vine コピュラに相当する．また、本適用事例では、 $D = 3$ 個の劣化事象で構成される施設を取り扱うが、その際の c-vine、D-vine による分解構造は一致する．

(5) 各劣化事象の異質性間の相関構造

vine コピュラを構成するペア・コピュラは、各劣化事象の異質性間の相関構造を表す．周辺分布に関する情報を用いて同時確率分布を表現するために様々なコピュラが提案されている．本研究では、金融工学の分野での使用実績が十分にある、正規コピュラ、tコピュラ、1パラメータ・アルキメディアン・コピュラ⁴⁾であるガンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラ、フランク・コピュラによって表現する．

正規コピュラと tコピュラは、代表的な楕円形コピュラであり、スクラーの定理¹⁸⁾を用いて求めることができる．いま、任意の 2 種類の劣化事象 d_1, d_2 の周辺分布関数をそれぞれ $F_{d_1}(\varepsilon_{d_1}) = u_{d_1}, \dots, F_{d_2}(\varepsilon_{d_2}) = u_{d_2}$ とすると、正規コピュラと tコピュラはそれぞれ、

$$C(u_{d_1}, u_{d_2}) = \Phi_a(\Phi^{-1}(u_{d_1}), \Phi^{-1}(u_{d_2})) \quad (22)$$

$$C(u_{d_1}, u_{d_2}) = t_{a,\nu}(t_\nu^{-1}(u_{d_1}), t_\nu^{-1}(u_{d_2})) \quad (23)$$

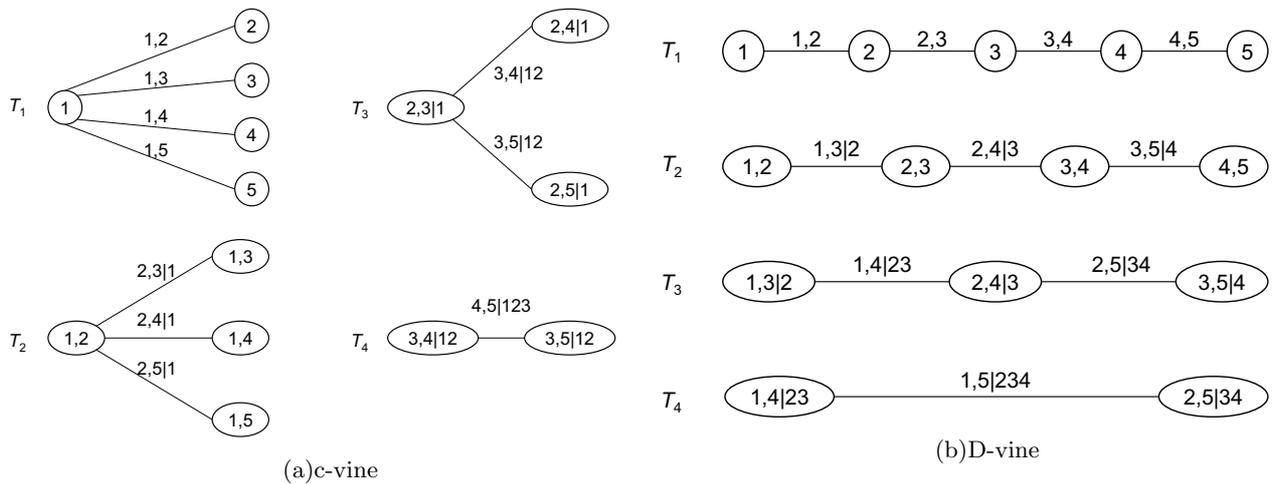


図-3 代表的な vine コピュラ ($D = 5$)

と表される。ただし、劣化事象間の相関関係を表すパラメータ a は $a \in (-1, 1)$ を、自由度 ν は $\nu \geq 2$ を満たす。また、 $\Phi_a(\cdot), \Phi^{-1}(\cdot)$ は、それぞれ線形相関 a を有する 2 変量標準正規分布関数、単変量標準正規分布関数の逆関数を表す。同様に、 $t_{a,\nu}(\cdot), t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ は、それぞれ相関 a を有する自由度 ν の 2 変量 t 分布の分布関数、自由度 ν の単変量 t 分布の分布関数の逆関数を表す。式 (22),(23) は、いずれも同時分布の裾が上下対称の構造を有する。一方、アルキメディアン・コピュラは、同時分布の裾が上下非対称の構造を表現することが可能である。2 変量間の 1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラの分布関数 $C(u_{d_1}, u_{d_2})$ は、生成関数 $\zeta(u_{d_1}), \zeta(u_{d_2})$ を用いて、

$$C(u_{d_1}, u_{d_2}) = \zeta^{-1}(\zeta(u_{d_1}) + \zeta(u_{d_2})) \quad (24)$$

と表現できる。ただし、生成関数 $\zeta(\cdot)$ は、 $\zeta(1) = 0$ を満たし、 $[0, \infty]$ の定義域を有する単調減少凸関数である¹⁷⁾。本研究の実証分析においては、アルキメディアン・コピュラとしてガンベル・コピュラ²²⁾、クレイトン・コピュラ²³⁾、フランク・コピュラ²⁴⁾の 3 種類のコピュラをとりあげる。表-1 にガンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラ、フランク・コピュラの生成関数、分布関数、確率密度関数を示している。また、ガンベル・コピュラのパラメータは $a \in [1, \infty)$ 、クレイトン・コピュラは $a \in [-1, \infty) \neq 0$ 、フランク・コピュラのパラメータは $a \in (-\infty, \infty) \neq 0$ を満たす。

(6) 尤度関数

いま、施設カテゴリー k に関する異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_D^k)$ に着目する。ここで、施設カテゴリー k の異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_D^k)$ が観測されていれば、式 (14) を用いて尤度関数を定義することで、vine コピュラに関する未知パラメータベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_{D(D-1)/2})$ 及び異質性パラメー

タの周辺分布関数を規定する未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_D)$ を推定することができる。しかし、異質性パラメータ ε_d^k は、施設カテゴリー k の劣化事象 d に対する劣化特性のみでなく、その他の劣化事象との間に介在する相互作用の影響を表す。したがって、異質性パラメータ ε_d^k は直接観測することができない潜在変数である。仮に潜在変数である異質性パラメータ ε_d^k が測定できたと考える。さらに、vine コピュラを構成する各ペア・コピュラの確率密度関数を c_b ($b = 1, \dots, D(D-1)/2$) と表すと、式 (19) より、 c_b はその他のペア・コピュラを含む。したがって、ペア・コピュラ c_b に関する当該パラメータ a_b ($b = 1, \dots, D(D-1)/2$) だけでなく、その他のペア・コピュラに関するパラメータを用いて表現される。また、異質性パラメータベクトル $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$ 、各劣化事象の周辺分布関数を規定するパラメータ $\boldsymbol{\phi}$ についても同様である。以上のことを明示的に表すために、種類 b のペア・コピュラの確率密度関数を $c_b(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\phi} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k)$ と表すこととする。このとき、施設カテゴリー k における D 種類の異質性パラメータの同時確率密度関数は

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\phi} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k) = \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} c_b(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\phi} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k) \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d^k) \quad (25)$$

と表せる。

他方、施設カテゴリー k に属する施設 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) の劣化事象 d に関して 2 回の点検が実施されたと考える。なお、以降では、省略していた各劣化事象を区別するための添え字 d を改めて表記する。点検が実施されたカレンダー時刻を $(\Lambda_{A,d}^k, \Lambda_{B,d}^k)$ と表す。ただし、 $\Lambda_{A,d}^k$ は第 1 回の点検時刻であり、 $\Lambda_{B,d}^k$ は第 2 回目の点検が実施されたカレンダー時刻である。施設 l_k の点検サンプルには、第 1 回目の点検から第 2 回目の点検が実施された時刻までの期間長 z_d^k と、これら 2 回の点検で観測された施設の健全度 $\bar{h}(\Lambda_{A,d}^k), \bar{h}(\Lambda_{B,d}^k)$

表-1 代表的なアルキメディアン・コピュラ (2変量の場合)

コピュラ	生成関数 $\zeta(u_d)$	分布関数 $C(u_{d_1}, u_{d_2})$	確率密度関数 $c(u_{d_1}, u_{d_2}) = \frac{\partial^2 C(u_{d_1}, u_{d_2})}{\partial u_{d_1} \partial u_{d_2}}$
ガンベル $a \in [1, \infty)$	$(-\ln u_d)^a$	$\exp\left[-\left\{\sum_{g=1}^2 (-\ln u_{d_g})^a\right\}^{\frac{1}{a}}\right]$	$C(u_{d_1}, u_{d_2})^{\frac{\{(\ln u_{d_1})(\ln u_{d_2})\}^{a-1}}{u_{d_1} u_{d_2}}}$ $\cdot \{(-\ln u_{d_1})^a + (-\ln u_{d_2})^a\}^{(-\frac{1}{a}-2)}$ $\cdot \left\{\left\{(-\ln u_{d_1})^a + (-\ln u_{d_2})^a\right\}^{\frac{1}{a}} + a - 1\right\}$
クレイトン $a \in [-1, \infty) \neq 0$	$\frac{1}{a}(u_d^{-a} - 1)$	$\{(u_{d_1})^{-a} + (u_{d_2})^{-a} - 1\}^{-\frac{1}{a}}$	$(1+a)\{(u_{d_1})^{-a-1} \cdot (u_{d_2})^{-a-1}\}$ $\cdot \{(u_{d_1})^{-a} + (u_{d_2})^{-a} - 1\}^{(-\frac{1}{a}-2)}$
フランク $a \in (-\infty, \infty) \neq 0$	$\frac{\ln\{\exp(-au_d) - 1\}}{-\ln\{\exp(-a) - 1\}}$	$-\frac{1}{a} \ln\left[1 + \frac{\prod_{g=1}^2 \{\exp(-au_{d_g}) - 1\}}{\exp(-a) - 1}\right]$	$\frac{-a \exp(-au_{d_1}) \exp(-au_{d_2}) \{\exp(-a) - 1\}}{\{\exp(-a) - 1\} + \prod_{g=1}^2 \{\exp(-au_{d_g}) - 1\}^2}$

に関する情報が記載されている。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は、実測値であることを意味している。点検時点における健全度に基づいて、ダミー変数 $\bar{\delta}_{ij,d}^{lk}$ ($i = 1, \dots, I-1, j = i, \dots, I; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K; d = 1, \dots, D$) を

$$\bar{\delta}_{ij}^{lk,d} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\Lambda_{A,d}^{lk}) = i, \bar{h}(\Lambda_{B,d}^{lk}) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (26)$$

と定義する。また、ダミー変数ベクトルを $\bar{\delta}_d^{lk} = (\bar{\delta}_{11,d}^{lk}, \dots, \bar{\delta}_{I-1,I,d}^{lk})$ 、施設の劣化速度に影響を及ぼす施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{x}_d^{lk} = (\bar{x}_{1,d}^{lk}, \dots, \bar{x}_{M,d}^{lk})$ と表す。さらに、施設 l_k の劣化事象 d に関する点検サンプルが有する情報を $\bar{\xi}_d^{lk} = (\bar{\delta}_d^{lk}, \bar{z}_d^{lk}, \bar{x}_d^{lk})$ と表す。

式(6), (7), (9)より、施設 l_k における劣化事象 d の進展過程を表すマルコフ推移確率は、各健全度における標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i,d}^{lk}$ ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K; d = 1, \dots, D$) と異質性パラメータ $\hat{\varepsilon}_d^k$ を用いて表現できる。また、式(12)に示すように、標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i,d}^{lk}$ は施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトル \bar{x}_d^{lk} と未知パラメータベクトル β^d によって表現される。

以上を踏まえ、各劣化事象の標準ハザード率に関する未知パラメータベクトルを $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^D)$ 、点検データ全体を Ξ と表せば、尤度関数は、全ての施設カテゴリ K 個の異質性パラメータベクトルに関する同時生起確率密度関数として

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{a}, \phi, \beta | \hat{\varepsilon}, \Xi) &= \prod_{k=1}^K f(\mathbf{a}, \phi | \hat{\varepsilon}^k) \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{l_k=1}^{L_k} \pi_{ij}(\beta^d, \hat{\varepsilon}_d^k, \bar{\xi}_d^{lk}) \\ &= \prod_{k=1}^K \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} c_b(\mathbf{a}, \phi | \hat{\varepsilon}^k) \\ &\cdot \prod_{d=1}^D \frac{(\phi_d)^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} (\hat{\varepsilon}_d^k)^{\phi_d-1} \exp(-\phi_d \hat{\varepsilon}_d^k) \end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{l_k=1}^{L_k} \left[\sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{lk}) \exp(-\tilde{\lambda}_{s,d}^{lk} \hat{\varepsilon}_d^k \bar{z}_d^{lk}) \right]^{\bar{\delta}_{ij}^{lk,d}} \quad (27)$$

と表せる。ただし、異質性パラメータを D 行 K 行の行列 $\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}^1, \dots, \hat{\varepsilon}^K)$ と表記する。

4. モデルの推定法

(1) 推定手法の概要

本研究では、多元的劣化過程モデルに対して、モデルに含まれるパラメータを段階的に推定するような方法論を提案する。具体的には、まず、劣化事象 d の平均的な進展過程を表す標準ハザード率に関する未知パラメータ β^d と異質性パラメータの周辺分布を規定する未知パラメータ ϕ_d を、混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて、劣化事象 d ごとに個別に推定する。これは、小濱等によって提案された混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾に関する2段階推定法の第1段階に他ならず、最尤推定法²⁾の他、ベイズ推定法²⁵⁾を用いることにより推定することが可能である。つぎに、推定したパラメータベクトル $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\phi})$ を与件として、尤度関数(27)を用いて、コピュラに関する未知パラメータベクトル \mathbf{a} を推定する。さらに、式(27)には、潜在変数である異質性パラメータが $D \times K$ 個含まれる。これらのパラメータを同時に推定するために、本研究では、MCMC法^{12),13)}を利用したベイズ推定を実施する。

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデルの推定

いま、異質性パラメータ ε_d^k が式(15)の確率密度関数から抽出された確率標本であると考え、まず、点検間隔 z_d^{lk} の下で健全度 i から健全度が推移しないマルコフ推移確率は、

$$\begin{aligned} \pi_{ii}(z_d^{lk}) &= \int_0^\infty \pi_{ii}(z_d^{lk} | \varepsilon_d^k) f(\varepsilon_d^k) d\varepsilon_d^k \\ &= \int_0^\infty \left[\exp\left\{-\tilde{\lambda}_{i,d}^{lk} \varepsilon_d^k z_d^{lk}\right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} (\varepsilon_d^k)^{\phi_d-1} \exp(-\phi_d \varepsilon_d^k) \Big] d\varepsilon_d^k \\
& = \frac{\phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} \\
& \cdot \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d\right) \varepsilon_d^k\right\} (\varepsilon_d^k)^{\phi_d-1} d\varepsilon_d^k \\
& (i = 1, \dots, I-1) \tag{28}
\end{aligned}$$

と表すことができる. ここで, $\eta_{i,d}^k = (\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d) \varepsilon_d^k$ と置き, 確率密度関数の変数変換を行えば

$$\begin{aligned}
\pi_{ii}(z_d^{l_k}) & = \frac{\phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} \int_0^\infty \left[\exp(-\eta_{i,d}^k) \right. \\
& \cdot \left. \left(\frac{\eta_{i,d}^k}{\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d} \right)^{\phi_d-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d} \right] d\eta_{i,d}^k \\
& = \frac{\phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d} \right)^{\phi_d} \\
& \cdot \int_0^\infty \exp(-\eta_{i,d}^k) (\eta_{i,d}^k)^{\phi_d-1} d\eta_{i,d}^k \\
& = \frac{\phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d} \right)^{\phi_d} \Gamma(\phi_d) \\
& = \frac{\phi_d^{\phi_d}}{(\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d)^{\phi_d}} \tag{29}
\end{aligned}$$

を得る. さらに, 点検間隔 $z_d^{l_k}$ の下で健全度 i から $j (\geq i)$ へ推移するマルコフ推移確率は,

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}(z_d^{l_k}) & = \int_0^\infty \pi_{ij}(z_d^{l_k} | \varepsilon_d^k) f(\varepsilon_d^k) d\varepsilon_d^k \\
& = \int_0^\infty \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{l_k}) \exp\left\{-\tilde{\lambda}_{s,d}^{l_k} \varepsilon_d^k z_d^{l_k}\right\} f(\varepsilon_d^k) d\varepsilon_d^k \\
& = \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{l_k}) \phi_d^{\phi_d}}{\Gamma(\phi_d)} \\
& \cdot \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\tilde{\lambda}_{s,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d\right) \varepsilon_d^k\right\} (\varepsilon_d^k)^{\phi_d-1} d\varepsilon_d^k \\
& = \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{l_k}) \phi_d^{\phi_d}}{(\tilde{\lambda}_{s,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d)^{\phi_d}} \tag{30}
\end{aligned}$$

と表せる.

式 (29), (30) より, 劣化事象の平均的な進展過程を表すマルコフ推移確率は, 各健全度における標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k}$ ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K; d = 1, \dots, D$) と異質性パラメータの分散パラメータ ϕ_d を用いて表現できる. また, 式 (12) に示すように, 標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_{i,d}^{l_k}$ は施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトル \mathbf{x}^{l_k} と未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}^d$ によって表現される. いま, 劣化事象 d に関する点検データ全体を $\bar{\Xi}_d$ と表せば, 劣化事象 d に関する全点検サンプルから観察できる尤度関数は, マルコフ推移確率の同時確率密度関数

を用いて,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^d, \phi_d | \bar{\Xi}_d) & = \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^d, \phi_d | \xi_d^{l_k}) \\
& = \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \pi_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_d^{l_k}, \bar{z}_d^{l_k} | \boldsymbol{\beta}_i^d, \phi_d) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k, d}} \\
& = \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left[\sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{l_k}) \phi_d^{\phi_d}}{(\tilde{\lambda}_{s,d}^{l_k} z_d^{l_k} + \phi_d)^{\phi_d}} \right]^{\delta_{ij}^{l_k, d}} \tag{31}
\end{aligned}$$

と表すことができる. ここで, $\boldsymbol{\theta}$ は, 未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \phi)$ を表しており, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{I-1})$ である. パラメータの推定値は, 既往研究で用いられた最尤推定法³⁾の他に, ベイズ推定法²⁵⁾によって求めることが可能である.

(3) 事前確率密度関数の設定

4.(2) で推定したパラメータ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を与件として, コピュラに関する未知パラメータベクトル \mathbf{a} を, ベイズ推定法を用いて推定する. 一般的なベイズ推定法では, パラメータの事前分布と観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて, パラメータの事後分布を推定する. いま, 尤度関数の未知パラメータベクトル \mathbf{a} が確率変数で, 事前確率密度関数 $\pi(\mathbf{a})$ に従うと仮定する. また, 異質性パラメータ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は潜在変数行列である. 観測値データ $\bar{\Xi}$ が与件であるときに, パラメータ \mathbf{a} の同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi})$ はベイズの定理より,

$$\pi(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi}) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi}) \pi(\mathbf{a})}{\int_{\Theta} \mathcal{P}(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi}) \pi(\mathbf{a}) d\mathbf{a}} \tag{32}$$

と表すことができる. ただし, Θ はパラメータ空間である. このとき, 式 (32) の分母は基準化定数であることから, 同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi})$ は

$$\pi(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi}) \propto \mathcal{P}(\mathbf{a} | \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi}) \pi(\mathbf{a}) \tag{33}$$

と表すことができる. ここで, 事前確率密度関数 $\pi(\mathbf{a} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\Xi})$ は

$$\pi(\mathbf{a}) = \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} \pi(a_b) \tag{34}$$

と展開できる. 式 (34) より, 事前確率密度関数は, vine コピュラの未知パラメータ a_b の事前確率密度関数 $\pi(a_b)$ で構成される.

vine コピュラの未知パラメータ a_b ($b = 1, \dots, D(D-1)/2$) の事前確率密度関数を以下のように設定する. 3.(5) で説明したように, コピュラの種類によりパラメータ a_b の定義域が異なるため, コピュラごとに具体的な事前分布を設定する必要がある. 本研究では, $a_b \in (-1, 1)$ の制約がある正規コピュラ, t コピュラについては, a_b の事前分布として定義域 $(-1, 1)$ を有する切断正規分布

$\mathcal{TN}(\alpha_b^0, \gamma_b^0)$ を設定する。また、 $a_b \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラに関しては $v = a_b - 1$ と変数変換し、 $v \sim \mathcal{G}(\alpha_b^0, \gamma_b^0)$ とする。同様に、 $a_b \in (-1, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラに関しては $v = a_b + 1$ と変数変換し、 $v \sim \mathcal{G}(\alpha_b^0, \gamma_b^0)$ とする。さらに、フランク・コピュラについて、 a_b の事前分布として正規分布 $\mathcal{N}(\alpha_b^0, \gamma_b^0)$ を設定する。ただし、これらの事前確率密度関数が推定結果に与える影響は、点検データの増加に伴い薄れていく。

(4) 同時事後確率密度関数の定式化

4.(3) で設定したパラメータ \mathbf{a} の事前確率密度関数と式 (27), (34) を、式 (33) に代入することで、同時事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{a}|\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}}) &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} c(\mathbf{a}|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ &\cdot \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{l_k=1}^{L_k} \left[\sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_d^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_{s,d}^{l_k} \varepsilon_d^k z_d^{l_k}) \right]^{\delta_{ij}^{l_k, d}} \\ &\cdot \frac{(\hat{\phi}_d)^{\hat{\phi}_d}}{\Gamma(\hat{\phi}_d)} (\varepsilon_d^k)^{\hat{\phi}_d - 1} \exp(-\hat{\phi}_d \varepsilon_d^k) \\ &\cdot \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma_b^0} (a_b - \alpha_b^0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ただし、式 (35) では、例として vine コピュラを構成する全てのペア・コピュラがフランク・コピュラである場合を示した。本研究で取り扱う5種類のペア・コピュラでは、パラメータの定義域が異なるため、コピュラの種類に応じて事後確率密度関数を定式化する必要がある。任意のペア・コピュラに対して、パラメータに $a_b \in (-1, 1)$ の制約がある正規コピュラ、tコピュラを用いるときの同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a}|\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ は、式 (35) において $\pi(a_b)$ を

$$\pi(a_b) = \frac{\varphi\left(\frac{a_b - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right)}{\gamma_b^0 \left(\Phi\left(\frac{1 - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right) \right)} \quad (36)$$

に置換すればよい。ただし、 $\varphi(\cdot), \Phi(\cdot)$ は、それぞれ単変量標準正規確率密度関数、単変量標準正規分布関数を表す。また、パラメータに $a_b \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラを用いるときの同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a}|\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ は、式 (35) において $\pi(a_b)$ を

$$\pi(a_b) = \frac{(a_b - 1)^{\alpha_b^0 - 1}}{(\gamma_b^0)^{\alpha_b^0} \Gamma(\alpha_b^0)} \exp\left(-\frac{a_b - 1}{\gamma_b^0}\right) \quad (37)$$

と置換すればよい。さらに、パラメータに $a_b \in (-1, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラを用いるときの同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a}|\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ は、式 (35) において

$\pi(a_b)$ を

$$\pi(a_b) = \frac{(a_b + 1)^{\alpha_b^0 - 1}}{(\gamma_b^0)^{\alpha_b^0} \Gamma(\alpha_b^0)} \exp\left(-\frac{a_b + 1}{\gamma_b^0}\right) \quad (38)$$

と置換すればよい。

(5) 同時事後確率密度関数の推定

同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a}|\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ を求めるために、条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリング¹³⁾を用いる手法がある。ここでは、他のパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数を用いて、式 (35) を算出する。なお、ギブスサンプリングにおける各パラメータの条件付き事後確率密度関数の算出に際しては、事後分布から直接サンプリングすることが困難なために、それぞれに対してメトロポリス・ヘイスティング法（以下、MH法）を用いる必要がある。

多元的劣化過程モデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して、同時事後確率密度関数を導出する。vine コピュラに関する未知パラメータベクトル \mathbf{a} から a_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, D(D-1)/2$) を除いたベクトルを \mathbf{a}_{-e_1} 、異質性パラメータ行列 $\boldsymbol{\varepsilon}$ から $\varepsilon_{e_2}^{e_3}$ ($e_2 = 1, \dots, D; e_3 = 1, \dots, K$) を除いたベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}^{-e_3}$ と表す。 \mathbf{a}_{-e_1} 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を既知とした時の a_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\pi(a_{e_1}|\mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ は、

$$\pi(a_{e_1}|\mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}}) \propto \pi(a_{e_1}) \prod_{k=1}^K c(a_{e_1}|\mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}^k, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \quad (39)$$

と表せる。ただし、 $\pi(a_{e_1})$ には、採用するコピュラに応じて次式を代入する。

$$\pi(a_{e_1}) = \begin{cases} \frac{\varphi\left(\frac{a_{e_1} - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right)}{\gamma_b^0 \left(\Phi\left(\frac{1 - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - \alpha_b^0}{\gamma_b^0}\right) \right)} & \text{(正規コピュラ, } t \text{ コピュラの場合)} \\ \frac{(a_{e_1} - 1)^{\alpha_b^0 - 1}}{(\gamma_b^0)^{\alpha_b^0} \Gamma(\alpha_b^0)} \exp\left(-\frac{a_{e_1} - 1}{\gamma_b^0}\right) & \text{(ガンベル・コピュラの場合)} \\ \frac{(a_{e_1} + 1)^{\alpha_b^0 - 1}}{(\gamma_b^0)^{\alpha_b^0} \Gamma(\alpha_b^0)} \exp\left(-\frac{a_{e_1} + 1}{\gamma_b^0}\right) & \text{(クレイトン・コピュラの場合)} \\ \exp\left\{ -\frac{1}{2\gamma_b^0} (a_{e_1} - \alpha_b^0)^2 \right\} & \text{(フランク・コピュラの場合)} \end{cases} \quad (40)$$

また、式 (35) より、 \mathbf{a} 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}^{-e_3}$ を既知とした時の $\varepsilon_{e_2}^{e_3}$ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\varepsilon_{e_2}^{e_3}|\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}^{-e_3}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}})$ は、

$$\pi(\varepsilon_{e_2}^{e_3}|\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}^{-e_3}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\Xi}}) \propto \prod_{b=1}^{D(D-1)/2} c(a_b|\mathbf{a}_{-b}, \boldsymbol{\varepsilon}^{e_3}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

$$\prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{l_{e_3}=1}^{L_{e_3}} \left[\sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}_{e_2}^{l_{e_3}}) \exp(-\tilde{\lambda}_{s, e_2}^{l_{e_3}} \varepsilon_{e_2}^{e_3} z_{e_2}^{l_{e_3}}) \right]^{\delta_{ij}^{l_{e_3}, e_2}}$$

$$\cdot \frac{(\hat{\phi}_{e_2})^{\hat{\phi}_{e_2}}}{\Gamma(\hat{\phi}_{e_2})} (\varepsilon_{e_2}^{e_3})^{\hat{\phi}_{e_2}-1} \exp(-\hat{\phi}_{e_2} \varepsilon_{e_2}^{e_3}) \quad (41)$$

と表せる。

これらの条件付き事後確率密度関数に対して MH 法を用いてサンプリングをおこない、式 (35) の同時事後確率密度関数を算出する。MH 法では事後分布（目標分布）からのサンプリングが難しい場合に、これを近似するような分布（提案分布）からサンプリングを行う。これと同時に目標分布と提案分布の差異を修正する。これらの操作をギブスサンプリングと同様の手順に従い繰り返したとき、十分に大きな繰り返し回数においてサンプリングされた標本は目標分布からランダムサンプリングされた標本とみなすことができる¹²⁾。

コピュラに関するパラメータ a_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, D(D-1)/2$) を例に、サンプリング方法を説明する。いま、目標分布を $\pi(\hat{a}_{e_1} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)$ 、提案分布の確率密度関数を $q(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)})$ と表す。提案分布を用いて n 回目のサンプリングで事後分布からの標本の候補として $q(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)})$ に従う標本 \hat{a}'_{e_1} を発生させる。提案された標本 \hat{a}'_{e_1} は目標分布 $\pi(\hat{a}_{e_1} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)$ からの標本でないために、その差を修正するために、確率

$$\chi_a(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\hat{a}'_{e_1} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi) q(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)})}{\pi(\hat{a}_{e_1}^{(n-1)} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi) q(\hat{a}_{e_1}^{(n-1)} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)})}, 1 \right] \quad (42)$$

に従って受容され、 $\hat{a}_{e_1}^{(n)} = \hat{a}'_{e_1}$ とする。また棄却された場合には $\hat{a}_{e_1}^{(n)} = \hat{a}_{e_1}^{(n-1)}$ とする。本研究では、各サンプリングに対して独立 MH 法を適用する。独立 MH 法は、事後分布の制約を考慮した提案分布を用いる方法の 1 つであり、広く利用されている。具体的には、 $q(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)}) = q(\hat{a}'_{e_1})$ のような確率密度を有する提案分布を用いる方法である。条件付き事後確率密度関数 $\pi(a_{e_1} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)$ は、定義域が 0 以上という制約を有している。本研究では、これを満たす提案分布として 4.(3) で設定した各パラメータの事前分布をそれぞれ採用することにする。例えば、正規コピュラを採用した場合、提案分布 $\mathcal{TN}(\hat{a}'_{e_1} | \alpha_{e_1}^0, \gamma_{e_1}^0)$ より発生させた n 回目の候補 \hat{a}'_{e_1} が受容される確率は、

$$\chi_a(\hat{a}'_{e_1} | \hat{a}_{e_1}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\hat{a}'_{e_1} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)}{\pi(\hat{a}_{e_1}^{(n-1)} | \mathbf{a}_{-e_1}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)}, 1 \right] \quad (43)$$

と表現できる。実際の数値計算では区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布 $\mathcal{U}(0, 1)$ から、一様乱数 $\rho \sim \mathcal{U}(0, 1)$ を発生させ、 $\hat{a}_{e_1}^{(n)}$ を以下のルールに従い決定する。

$$a_{e_1}^{(n)} = \begin{cases} \hat{a}_{e_1}^{(n-1)} & \rho > \chi_a \\ \hat{a}'_{e_1} & \rho \leq \chi_a \end{cases} \quad (44)$$

また、他のコピュラを採用した場合や

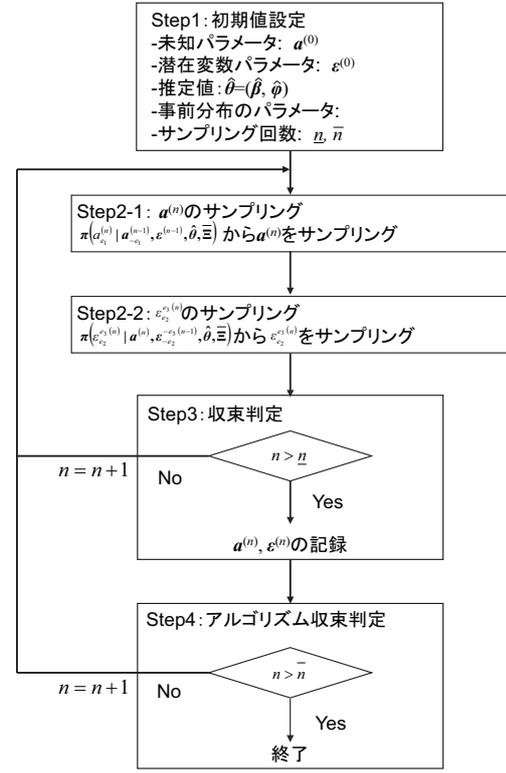


図-4 推定フロー

$\pi(\varepsilon_{e_2}^{e_3} | \mathbf{a}, \varepsilon_{-e_2}^{-e_3}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)$ も同様である。

条件付き事後確率密度関数 (39), (41) を用いた具体的な推計手順を図-4 に示している。推計手順は以下のステップで構成される。

Step1

施設に発現する D 種類の劣化事象の進展過程を表す混合マルコフ劣化ハザードモデルに関するパラメータを事前に推定し、推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を獲得する。事前分布のパラメータ値 α_b^0, γ_b^0 ($b = 1, \dots, D(D-1)/2$) を任意に設定する。また、コピュラに関するパラメータベクトル \mathbf{a} 及び異質性パラメータ行列 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の初期値 $\mathbf{a}^{(0)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ を任意に設定する。 $n = 1$ に設定する。また、サンプリング回数 n, \bar{n} を設定する。

Step2

サンプリング回数 n のコピュラに関する未知パラメータベクトル $\mathbf{a}^{(n)}$ 及び異質性パラメータ行列 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ を次のようにサンプリングする。

Step2-1

サンプリング回数 n の未知パラメータ $a_{e_1}^{(n)}$ ($e_1 = 1, \dots, D(D-1)/2$) を $\pi(a_{e_1}^{(n)} | \mathbf{a}_{-e_1}^{(n-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)$ から独立 MH 法によりサンプリングする。

Step2-2

サンプリング回数 n の異質性パラメータ $\varepsilon_{e_2}^{e_3(n)}$ ($e_2 = 1, \dots, D : e_3 = 1, \dots, K$) を

$\pi(\varepsilon_{e_2}^{e_3(n)} | \mathbf{a}^{(n)}, \varepsilon_{-e_2}^{-e_3(n-1)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\Xi})$ からサンプリングする。

Step3

十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\mathbf{a}^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ を記録する。

Step4

$n = \bar{n}$ ならば計算を終了する。 $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ として **Step2** に戻る。

十分大きな \underline{n} に対して、このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば、独立 MH 法を用いたサンプリングによる \mathbf{a} ($n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n}$) のサンプリングは、(33) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\mathbf{a} | \varepsilon, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\Xi})$ からのサンプリングと等しくなる。したがって、サンプリングによって得られるこれらの標本を用いて、パラメータベクトル \mathbf{a} の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することが可能となる。

(6) 事後分布に関する検定統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて、コピュラに関するパラメータベクトル \mathbf{a} に関する推定値を決定することができる。いま、MCMC 法により得られた標本を $\mathbf{a} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_{D(D-1)/2}^{(n)})$ ($n = 1, \dots, \bar{n}$) と表すこととする。このうち、最初の \underline{n} 個を事後分布への収束過程からの標本と考え、標本集合から除去する。そのうえで、パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する。このとき、パラメータ \mathbf{a} の同時確率分布関数 $\mathcal{A}(\mathbf{a})$ は、

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \frac{\#\{\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{a}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (45)$$

と表すことができる。ただし、 $\#\{\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{a}, n \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{a}, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である。また、パラメータ \mathbf{a} の事後分布の期待値ベクトル $\hat{\mathbf{a}}$ は、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{D(D-1)/2})' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{a_1^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{a_{D(D-1)/2}^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (46)$$

と表される。また、ギブスサンプリングによる標本を用いて、パラメータ \mathbf{a} の信用域を定義できる。100(1 - 2 κ)%信用域は、標本順序統計量 $(a_b^{\kappa}, \bar{a}_b^{\kappa})$ ($b = 1, \dots, D(D-1)/2$)

$$\begin{aligned} a_b^{\kappa} &= \arg \max_{a_b^*} \\ &\left\{ \frac{\#\{a_b^{(n)} \leq a_b^*, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_b^{\kappa} &= \arg \min_{a_b^{**}} \\ &\left\{ \frac{\#\{a_b^{(n)} \geq a_b^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (47b)$$

表-2 コピュラのパラメータとケンドールの τ の関係

コピュラの種類	ケンドールの τ
正規コピュラ	$(2/\pi) \arcsin(a_b)$
t コピュラ	$(2/\pi) \arcsin(a_b)$
ガンベル・コピュラ	$1 - 1/a_b$
クレイトン・コピュラ	$a_b/(a_b + 2)$
フランク・コピュラ	$1 + (4/a_b)(De(a_b) - 1)$

を用いて $a_b^{\kappa} < a_b < \bar{a}_b^{\kappa}$ と定義できる。

MCMC 法では、初期パラメータ値 $\mathbf{a}^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない。ギブスサンプリングで発生させた \bar{n} 個のサンプルのうち、最初の \underline{n} 個の標本 $\mathbf{a}^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \underline{n}$) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える。その上で、第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本を取り上げる。 $\underline{n} + 1$ 以降の標本が、不変分布である事後分布からの標本であるかを Geweke の方法²⁶⁾を用いて仮説検定を試みる。

さらに、ペア・コピュラでは、式 (46) によって得られたコピュラに関するパラメータの推定値 $\hat{\mathbf{a}}$ を用いて、異質性パラメータ間の関係性を表すケンドールの τ (順位相関係数) を解析的に導出することができる¹⁷⁾。詳細な導出過程については参考文献¹⁷⁾に譲り、表-2 に各コピュラのパラメータとケンドールの τ との関係を示す。ただし、フランク・コピュラとの関係を示す式に含まれる関数 De は

$$De(a_b) = \frac{1}{a_b} \int_0^{a_b} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (48a)$$

で表される 1 次のデバイ関数である。表-2 を用いることで、異なるコピュラによって表現される異質性パラメータ間の相関関係を一意的に評価することが可能となる。

5. おわりに

本研究では、施設に発現する劣化事象間の異なる相関関係を詳細に表現した上で、施設の劣化状態を多元的に評価するための方法論を提案した。具体的には、個別の劣化事象の進展過程を異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルにより表現するとともに、異質性パラメータの同時分布関数をコピュラを用いて表すことで、劣化事象内の異質性間に介在する相関性を定量的に評価した。また、その際、異質性間の相関性を表すコピュラを vine コピュラに基づき詳細に記述することにより、異なる劣化事象間の相関関係を適切に表現することを可能とした。なお、点検データを用いた実証分析に関する詳細は、本発表時に報告させていただきたい。

参考文献

- 1) 国土交通省水管理・国土保全局下水道部：ストックマネジメント手法を踏まえた下水道長寿命化計画策定に関する手引き（案），pp.79-82，2013.
- 2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82，2005.
- 3) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
- 4) Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
- 5) D. Mizutani, K. Kaito and K. Kobayashi: Multidimensional Deterioration Process by Copula Modeling, *10th Annual Inter-University Symposium on Infrastructure Management (AISIM10)*, CD-ROM, No.8, Virginia, 2014.
- 6) 林秀和，貝戸清之，熊田一彦，小林潔司：競合的劣化ハザードモデル：舗装ひび割れ過程への適用，土木学会論文集 D，Vol.65，No.2，pp.143-162，2009.
- 7) Bedford, T. and Cooke, R. M.: Vines—a New Graphical Model for Dependent Random Variables, *Annals of Statistics*, Vol.30, No.4, pp.1031-1068, 2002.
- 8) Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. and Bakken, H.: Pair-copula constructions of multiple dependence, *Insurance: Mathematics and Economics*, pp.182-198, 2009.
- 9) Kurowicka, D. and Joe, H.: Dependence Modeling: Vine Copula Handbook, World Scientific Pub Co Inc, 2011.
- 10) 例えば Joe, H.: Asymptotic Efficiency of the Two-stage Estimation Method for Copula-based Models, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol.94, Issue 3, pp.401-419, 2005.
- 11) Bouye, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. and Roncalli, T.: Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications, Working Paper, Credit Lyonnais, 2000.
- 12) 伊庭幸人：計算統計学のフロンティア 計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.
- 13) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
- 14) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計，土木学会論文集 D3，Vol.68，No.4，pp.255-271，2012.
- 15) 森村英典，高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，1979.
- 16) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 17) 戸坂凡展，吉羽要直：コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説，日本銀行金融研究所，金融研究，pp.115-162，2005.
- 18) Sklar, A.: Random Variables, Joint Distribution Functions, and Copulas, *Kybernetika*, Vol.9, No.6, pp.449-460, 1973.
- 19) Joe, H.: Families of m-variable distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters, IMS Lecture Notes - Monograph Series, Vol.28, pp.120-141, 1996.
- 20) Heinen, A. and Valdesogo, A.: Asymmetric CAPM dependence for large dimensions: the Canonical Vine Autoregressive Model, CORE discussion papers, 2009.
- 21) Brechmann, E.C. and Schepsmeier, U.: Modeling Dependence With C- and D- Vine Copulas: The R Package CDvine, *Journal of Statistical Software*, Vol.52, Issue.3, 2013.
- 22) Gumbel, E. J.: Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
- 23) Clayton, D. G.: A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
- 24) Frank, M. J.: On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.
- 25) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 A，Vol.63，No.2，pp.336-355，2007.
- 26) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in Bernardo, J. M., Berger, J. M., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M.(eds.) : *Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.

(2015. 4. 24 受付)

COMPREHENSIVE EVALUATION OF DETERIORATION FOR INFRASTRUCTURE BASED ON VINE COPULA

Rentaro HAYASHI, Kengo OBAMA, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI