２次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

坂口創[1]・水谷大二郎[2]・松島格也[3]・貝戸清之[4]・小林潔司[5]

[1]学生会員　大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: s.sakaguchi@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]学生会員　大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻・日本学術振興会特別研究員 DC（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　京都大学准教授 大学院工学研究科都市社会工学専攻（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂）
E-mail: matsushima.kakuya.7u@kyoto-u.ac.jp
[4]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[5]フェロー会員　京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町）
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

道路付帯機器システムのアセットマネジメントを実施する際には，機器システムの劣化予測を行い，リスク評価とライフサイクル費用を勘案した上で，最適な更新施策を検討しなければならない．また機器システムのような消耗故障系機器に関しては，劣化過程が時間依存性を有していると考えられるため，個々の機器システムが有する劣化加速度の異質性を定量化する必要がある．本研究では，道路付帯機器システムの劣化過程を，故障率の異質性および劣化加速度の異質性を考慮した，２次元混合ワイブル劣化ハザードモデルにより記述する．さらに，２次元異質性をガンマ分布によって表現するとともに，異質性パラメータ間の相関構造を，アルキメディアン・コピュラと２次元異質性の周辺分布を用いた同時分布として表現する方法論を提案する．

Key Words : *two dimensional mixed Weibull deterioration hazard model, copula, Bayesian estimation, asset management*

1.　はじめに

道路交通サービスを支援する道路付帯機器システム（以下，機器システム）は，多様かつ膨大な数の機器群により構成されている．機器システム導入時点から時間が経過するに従って，各機器の劣化が進展し，機器の故障率が増加する．故障した，あるいは劣化の進展した機器に対しては，適宜更新が実施されることになる．このとき更新施策として，1）時間軸上のある時点でシステム内の全ての機器を故障の有無にかかわらず更新する一括更新施策，2）定期的に実施される点検の実施時点に故障している機器のみを更新する逐次更新施策が考えられる．また，一般的な社会基盤施設と比べ，機器システムの保守を実行するためには，部品調達等の在庫問題や，陳腐化した機器システムに対する保守技術者の確保等が必要となる．このような機器の陳腐化に伴うリスク（以下，陳腐化リスク）は，システム導入からの時間経過に伴って増大する．機器システムのアセットマネジメントを実施するためには，機器システムの導入時点において各機器の故障過程を定量化し，一括更新施策および逐次更新施策それぞれにおける期待故障数等を把握することによって，機器の保守業務に関する緻密な計画を策定していくことが重要となる．

機器の故障過程は，ハザードモデル[1)]に代表される生存時間解析に基づいて記述される．社会基盤施設のアセットマネジメントにおいて用いられるワイブル劣化ハザードモデル[2)]では，劣化過程（ハザード率）は劣化速度と劣化加速度で制御され，観測可能な劣化要因は劣化速度に内包される．一方で，不可観測な要因が機器の劣化過程に及ぼす影響が無視できない場合も少なくない．劣化速度に影響を及ぼす観測不可能な要因（以下，異質性）をガンマ分布に従う確率変数（異質性パラメータ）として表現したランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルが提案されている[3)]．ただし，ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルは，劣化速度に介在する異質性を異質性パラメータとして定義して，ハザード率に乗ずることによって個々の機器の劣化過程を表現した比例ハザードモデルであり，同モデルにおいてワイブル劣化ハザードモデルの劣化加速度に介在する異質性は考慮されていない（全ての機器で同一の値を取ることになる）．ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルを用いることにより，例えば，機器タイプ（あるいは機器タイプを使用・環境条件でさらに細分化した機器グループ）ごとに劣化過程を識別することが可能となったが，現実の機器の劣化過程を考えた場合，機器タイプごとに損傷項目が異なることから，劣化加速

度も劣化速度と同様に，多様に変化すると考えられる．さらに，上述の2種類の更新施策（一括更新施策，逐次更新施策）のいずれを採用するかを考えた場合，**2.(3)** で詳述するように，機器タイプごとの劣化加速度が極めて重要な因子となり，劣化速度のみならず，劣化加速度に対しても異質性を考慮する必要がある．

以上の問題意識のもとに，本研究では，機器システムを構成する機器の故障確率の時間的変化を，劣化速度，劣化加速度それぞれに対する 2 種類の異質性を考慮して表現するための 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを開発する．その際に，2 種類の異質性パラメータの周辺分布をガンマ分布として表現するとともに，異質性の相関構造をアルキメディアン・コピュラを用いて表現し，2 種類の異質性の同時分布を定義する．以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を説明する．**3.** では機器システムの故障過程をモデル化し，**4.** で 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの推計手法について述べる．

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

本研究では，道路付帯機器の故障過程をワイブル劣化ハザードモデルで表現するとともに，膨大な種類の機器で構成される道路交通サービスの支援機器の故障特性の異質性をシステム的に分析する方法論を提案する．機器の統計的故障解析に関しては，ハザードモデル[4),5)]を用いた研究事例が蓄積されている．また，アセットマネジメントの分野においても，マルコフ劣化ハザードモデル[6)]をはじめとして，多様な劣化ハザードモデル[7)−10)]が提案されている．道路付帯機器の故障過程を分析する場合，機器の故障事象は，故障の有無という 2 値情報で表現されるために，伝統的なハザードモデルの適用が可能である．すでに，貝戸等は，交通管制システムが膨大な種類の機器類で構成されていることに着目し，多品種・少数の機器群の故障過程をモデル化するために，ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル[3)]を提案している．ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルでは，ベンチマークとなる標準的な故障ハザード関数を異質性パラメータが 1 となる場合のベースライン関数を用いて表現するとともに，個々の機器の故障ハザード関数の異質性を比例的パラメータを用いて表現することを目的としている．本研究では，ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルに劣化加速度の異質性を加えて考慮した 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを開発する．

(2) 道路付帯機器システムの故障過程

情報システムの機器の故障は，機器の劣化とは関係なく故障が発生する偶発的故障と，劣化が原因となって発生する消耗系故障に大別される．偶発的故障の発生過程は指数劣化ハザードモデル，消耗系発生過程はワイブル劣化ハザードモデルにより表現することが可能である．消耗故障系機器では，直近の更新時点からの経過時間が長くなるほど，故障の発生確率（ハザード率）が大きくなる．本研究では，このような消耗故障系機器の寿命分布がワイブル分布に従うと仮定する．さらに，異なる装置を構成する機器のハザード率が，時間の関数として表現できると考える．このようなハザード率の時間的変化を表した関数をハザード関数と呼ぶ．一方，偶発故障系機器の寿命分布は指数分布に従うとする．

高速道路の道路付帯機器システムには，消耗故障系機器と偶発故障系機器が混在していると考えられる．指数劣化ハザードモデルは，ワイブル劣化ハザードモデルの加速度パラメータを 1.0 とした特殊形である．本研究で提案する 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは，加速度パラメータ（**3.** 以降の $m\rho$）の定義域 $(0,\infty)$ に 1 を含み m，ρ を推計する．m は，機器群全体の劣化加速度を規定し，モデルの推計過程では，平均を 1 とする加速度の異質性パラメータ ρ に対する規格化定数の役割も兼ねる．一方，平均値を 1 とする ρ は，個々の機器タイプごとに規定され，機器タイプの劣化加速度の異質性を推計する．推計された $m\rho$ が 1 に近づけば，当該機器タイプでは偶発故障が卓越し，$m\rho$ が大きくなるにつれ消耗故障が卓越する．このように，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを推計することにより，それぞれの機器タイプの故障特性を明示的に識別することができる．

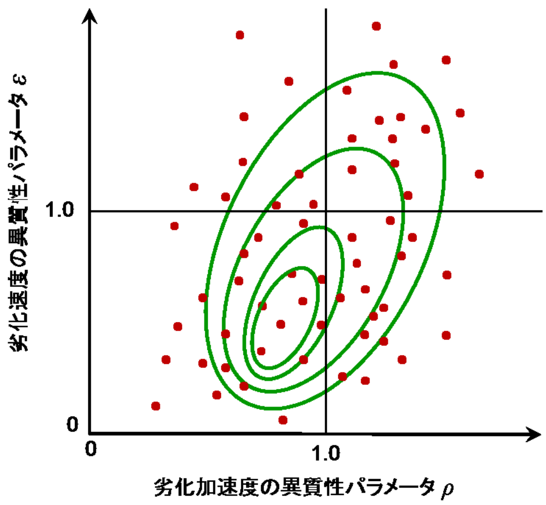
道路付帯機器システムは数多くの機器で構成されるが，各道路付帯システムを構成する機器の数は十分でない場合が多い．2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルは，ベースライン関数となるワイブル劣化ハザード関数のパラメータと，道路付帯機器システムにおけるの異質性分布を表す確率分布のパラメータを推計することにより，道路付帯機器システム間のハザード率の異質性を容易に表現できる．一方，ワイブル劣化ハザード率の異質性を混合確率モデルで表現しない場合，同一の故障特性を有する機器タイプごとに異なるワイブル劣化ハザードモデルを推計することが必要となる．しかし，各道路付帯機器システムを構成する機器の数が少ない場合，ワイブル劣化ハザードモデルを推計することが困難となる．以上のことを考慮すると，機器間の劣化速度の異質性をハザード率に乗ずる確率分布として，劣化加速度の異質性を加速度パラメータに乗

ずる確率分布として，それぞれ表現可能な 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルは，多品種・少数の機器構成を有する道路付帯機器システムの故障過程を表現するために優れた性質を有しているといえる．

(3)　異質性の 2 次元配置の定量化と更新施策

本研究で提案する 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは，劣化速度の異質性と劣化加速度の異質性を 2 次元的に表現する．道路付帯機器システムに限らず，社会基盤施設の劣化過程には施設の種類や設置箇所の違いに起因した異質性が存在することが少なくない．これまでに混合マルコフ劣化ハザードモデル[8)]やランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル[3)]のような，ハザード率に対する比例的な異質性を表現した劣化予測モデルが開発されている．しかし，道路付帯機器システムでは，その供用経過時間が劣化加速度としてハザード率に大きく影響するため，劣化加速度の異質性を考慮した上でシステム全体の点検・更新政策を検討することが望ましい．例えば，消耗故障系機器では，供用開始からある程度時間が経過した時点で，複数の機器が一斉に故障し始める．同時に供用が開始された複数の消耗故障系機器に対して，逐次更新施策を行った場合，供用開始直後では，更新対象の機器が極めて少なく，ある程度時間が経過した後はリスク管理水準を満足しない，あるいは，逐次更新で相当数の機器を更新するという不経済が生じてしまう．そのため，このような消耗故障系機器に対しては，ある時間が経過した時点で一括更新を行う施策が，リスク管理水準を満足しつつ，ライフサイクル費用を最小とする最適施策であると考えられる．一方で，偶発故障系機器に対しては，同様の議論を通じて，逐次更新施策が最適施策となると考えられる．**2.(2)** で述べたように，ある機器タイプにおいて，偶発故障，消耗故障のいずれが卓越するかは，劣化加速度の異質性として表現でき，劣化加速度の異質性を推計することにより，機器に対して，一括更新施策と逐次更新施策のいずれを採用すべきかという問題を解決することができる．このように，機器の更新施策の決定を目的として，劣化加速度の異質性を定量的に評価した事例は，筆者らが知る限り過去には存在しない．

2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルでは，劣化速度と劣化加速度の 2 種類の異質性を点検・更新施策の評価単位ごとに推計する．劣化速度の異質性は点検間隔や更新間隔に，また，上述のように，劣化加速度の異質性は更新施策に主に影響する．**図–1** には，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを用いて導出できる 2 次元異質性プロットを模式的に示している．個々のプロットは，それぞれの評価単位を表し，横軸は劣化加速度の異質性パラメータ，縦軸は劣化速度の異質性パラメータを表す．同図を用いることにより，劣化速度の大きく，重点監視を行うべき機器タイプや設置箇所を抽出できる．さらに，評価単位に応じて，一括更新施策と逐次更新施策のどちらが最適施策となるか明確に決定できる．



図–1　2 次元異質性パラメータと同時分布

さらに，本研究では，劣化速度の異質性と劣化加速度の異質性の同時分布を各異質性パラメータの周辺分布とコピュラ[11),12)]を用いて定義する．コピュラは，複数の確率変数の周辺分布関数とそれらの同時分布関数を接合する関数であり，接合分布関数とも呼ばれる．コピュラを推計することにより，平均値を 1 とする個々の異質性分布の確率構造を保持しながら同時分布を推計することができる．これにより，2 種類の異質性間の相関関係も定量的に評価できる．2 種類の異質性の同時分布を推計することにより，**図–1** に併せて示した異質性の 2 次元プロットを定量化することができる．2 種類の異質性プロットの定量化により，システムを構成する機器群の内，どの程度の個数の機器に対して，一括更新あるいは逐次更新がどの時点で必要なのかを求めることができる．**1.** で述べたように，高速道路付帯機器システムにおいては，技術的陳腐化が起因し，その保守業務に必要な資源数を予め把握しておくことが極めて重要となる．本研究で提案する方法論は，更新施策の最適化のみならず，管理者が保有する機器システム全体に対して，将来必要となる保全のための資源数をシステムの導入時に把握することを可能とし，システム導入の計画段階においても非常に有用となる．

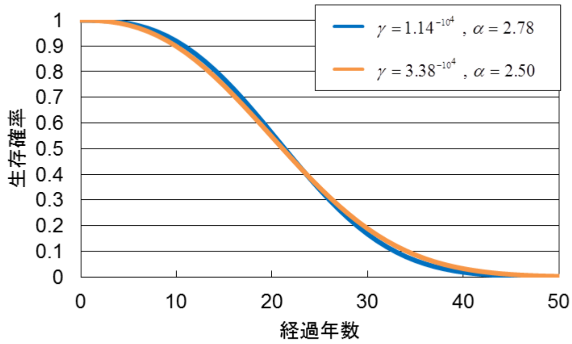
(4) パラメータの識別不可能性問題

本研究では，機器の故障過程をワイブル劣化ハザードモデルにより表現する．機器の使用時間が s のとき，ワイブル劣化ハザード関数は，尺度パラメータ γ と形状パラメータ α を用いて，

$$\lambda(s, \gamma, \alpha) = \gamma\alpha s^{\alpha-1} \tag{1}$$

と表現でき，その時間的推移は，パラメータペア (γ, α) を所与とすると一意に定まる．**図–2** には，2 種類のパラメータペア $(1.41^{-10^4}, 2.78)$，$(3.38^{-10^4}, 2.50)$ それぞれに対して，ワイブル劣化ハザード関数の時間的推移を生存関数として示した．同図では，2 種類のワイブルハザード関数のパラメータペアが異なるにも関わらず，生存関数の形状が類似している．**3.** 以降では，γ は $\varepsilon\exp(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}')$ に，α は ρm にそれぞれ相当する．ε，$\boldsymbol{\beta}$，ρ，m は未知パラメータであり，観測された複数の使用時間を用いて定義される尤度関数に基づき推計される．ここで，**図–2** に示した生存関数が実際の観測データを表している場合を考える．このとき，パラメータペア $(1.41^{-10^4}, 2.78)$，$(3.38^{-10^4}, 2.50)$ では，観測データの生起確率である尤度関数に優位な差が無く，$(1.41^{-10^4}, 2.78)$，$(3.38^{-10^4}, 2.50)$ のいずれを満たすパラメータを推定結果とするかが一意に定まらない．これを本研究では，ワイブル劣化ハザード関数のパラメータの識別不可能性問題と呼ぶ．ただし，個々の異質性パラメータの期待値を 1 に規格化し周辺分布を設定しているため，γ が定まると ε と $\boldsymbol{\beta}$ は一意に定まり，α が定まると ρ と m は一意に定まる．なお，パラメータの識別不可能性問題は，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルに限らず，ワイブル劣化ハザードモデルにおける本質的な問題であるが，劣化加速度に対しても異質性を考慮した 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルにおいては，特にこの問題が顕著となる．

本研究では，パラメータの識別不可能性問題を，コピュラを用いた 2 種類の異質性パラメータの同時分布をパラメトリックに設定することにより解消する．上述のように，ε と $\boldsymbol{\beta}$，ρ と m はそれぞれ識別性条件を満足しているため，対象とするパラメータの識別不可能性問題は 2 種類の異質性パラメータ ε と ρ の間に識別性を満足させることにより解消することができる．**3.** で定式化する 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの尤度関数には，2 種類の異質性パラメータの同時分布が含まれる．そのため，$\boldsymbol{\beta}$ と m を与件としたときにハザード関数に優位な差が生じない 2 つの (ε,ρ) のペアに対しても，それらの同時生起確率が異なるため尤度関数も異なり，2 種類の異質性パラメータ (ε,ρ) は一意に定まり，パラメータの識別不能性問題を解消することができる．



図–2 パラメータと生存関数の関係

3. 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

(1) ワイブル劣化ハザードモデル

カレンダー時刻 s_0 を初期時点 $t = 0$ とする離散的時間軸を考える．時間軸上の点を時点と呼び，カレンダー時刻と区別する．初期時点 $t = 0$ に機器が更新され，それが故障するまでの期間（以下，寿命と呼ぶ）に着目する．記述が煩雑となるのを防ぐため，機器のタイプに関する添え字を本節に限り省略する．さらに，機器は連続して使用されており，日常的な道路巡回や高速道路利用者の通報などにより，機器の故障の有無は常時観測されていると考える．機器の寿命を確率変数 ζ で表し，ζ は確率密度関数 $f(\zeta)$，分布関数 $F(\zeta)$ に従って分布すると考える．ただし，寿命 ζ の定義域は $[0, \infty)$ であり，$f(0) = 0$，$F(0) = 0$ が必ず成立する．いま，直近の更新時点から任意の使用期間 $s \in [0, \infty)$ に対して，機器が故障しないで生存する確率（以下，生存確率と呼ぶ）$\tilde{F}(s)$ は，全事象確率 1 から使用期間 s の間に機器が故障する累積故障確率 $F(s)$ を差し引いた値

$$\tilde{F}(s) = 1 - F(s) \tag{2}$$

により定義できる．ここで，機器が使用時間 s にわたり生存し，かつ期間 $[s, s + \Delta s]$ 中にはじめて故障する確率は

$$\lambda(s)\Delta s = \frac{f(s)\Delta s}{\tilde{F}(s)} \tag{3}$$

と表せる．機器が使用期間 s にわたり生存し，かつその瞬間に故障する確率密度 $\lambda(s)$ を「劣化ハザード関数」と呼ぶ．式 (2) の両辺を s に関して微分することにより，

$$\frac{d\tilde{F}(s)}{ds} = -f(s) \tag{4}$$

を得る．この時，式 (3) は

$$\lambda(s) = \frac{f(s)}{\tilde{F}(s)} = \frac{d}{ds}\left(-\log \tilde{F}(s)\right) \tag{5}$$

と変形できる．ここで，$\tilde{F}(0)=1-F(0)=1$ を考慮し，式 (5) を積分すれば

$$\int_0^s \lambda(u)du = -\log \tilde{F}(s) \tag{6}$$

を得る．したがって，劣化ハザード関数 $\lambda(u)$ を用いれば，使用期間 s まで機器が生存する確率 $\tilde{F}(s)$ は

$$\tilde{F}(s) = \exp\left[-\int_0^s \lambda(u)du\right] \tag{7}$$

と表される．このように，劣化ハザード関数 $\lambda(u)$ の関数形を決定すれば，機器の生存確率 $\tilde{F}(s)$ を導出することができる．さらに，$\tilde{F}(s)=1-F(s)$ より，機器の累積故障確率 $F(s)$ を求めることができる．ここで，劣化ハザード関数としてワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda(s) = \gamma m s^{m-1} \tag{8}$$

を考える．ただし，γ は，到着密度を表すパラメータ，m は，時間を通じたハザード率の増加傾向を表す加速度パラメータである．ワイブル劣化ハザード関数を用いた場合，機器寿命の確率密度関数 $f(s)$，および機器の生存確率 $\tilde{F}(s)$ は，それぞれ

$$f(s) = \gamma m s^{m-1}\exp(-\gamma s^m) \tag{9a}$$

$$\tilde{F}(s) = \exp(-\gamma s^m) \tag{9b}$$

と表される．

(2)　2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデル

ここで，タイプ i $(i=1,\cdots,I)$ の機器 l_i $(l_i=1,\cdots,L_i)$ に着目する．機器が更新されてから経過した使用時間を s と表す．タイプ i の機器の故障事象のハザード率の時間的変化は，機器タイプ毎に異なると考え，2 次元混合ワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda_i(s) = \gamma m \varepsilon_i \rho_i \{s\}^{m\rho_i - 1} \tag{10}$$

に従うと考える．ε_i はタイプ i の劣化速度の異質性[13),14)]を表すパラメータ，ρ_i は劣化加速度の異質性を表すパラメータである．これらの異質性パラメータは，同一タイプの機器に対して共通の値をとるように設定する．このとき，タイプ i の機器の寿命分布を表す確率密度関数 $f_i(s)$，および生存確率 $\tilde{F}_i(s)$ は，それぞれ

$$f_i(s) = \gamma m \varepsilon_i \rho_i s^{(m\rho_i - 1)} \exp\left(-\gamma \varepsilon_i s^{m\rho_i}\right) \tag{11a}$$

$$\tilde{F}_i(s) = \exp\left(-\gamma \varepsilon_i s^{m\rho_i}\right) \tag{11b}$$

と表される．

ここで，異質性パラメータ ε_i, ρ_i がそれぞれ別個のガンマ分布に従うと仮定する．一般に，ガンマ分布 $R(\alpha,\beta)$ の確率密度関数 $r(\varepsilon_i:\alpha,\beta)$ は

$$r(\varepsilon_i:\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \varepsilon_i^{\alpha-1}\exp(-\frac{\varepsilon_i}{\beta}) \tag{12}$$

と定義できる．$r(\varepsilon_i:\alpha,\beta)$ は ε_i を変数とする関数であり，パラメータ α，β に応じて変化する．そのことを明示するために記号「:」を用いている．ガンマ分布 $R(\alpha,\beta)$ の平均は $\mu=\alpha\beta$，分散は $\sigma^2=\alpha\beta^2$ である．また，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．異質性パラメータの平均値を 1 に基準化するために，平均値 1，分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $g(\varepsilon_i:\phi)$

$$g(\varepsilon_i:\phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon_i^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon_i) \tag{13}$$

に異質性パラメータ ε_i が従うと考える．同様に，劣化の進行加速度に関する異質性パラメータ ρ_i に関しても，ガンマ分布の確率密度関数 $h(\rho_i:\psi)$

$$h(\rho_i:\psi) = \frac{\psi^\psi}{\Gamma(\psi)} \rho_i^{\psi-1}\exp(-\psi\rho_i) \tag{14}$$

に従うと仮定する．本研究では，ガンマ分布 (13)，(14) のパラメータ ϕ，ψ も機器の点検データを用いて推計する．具体的には，ϕ，ψ をハイパーパラメータとする階層ベイズモデルを構築する．このことにより，異質性パラメータの推計精度を向上させることが可能となる．

(3)　2 次元異質性の相関構造

異質性パラメータ ε_i，ρ_i の同時確率分布をコピュラ C を用いて表す．コピュラの詳細は参考文献[11),12)]に譲るが，読者の便宜を図るためにコピュラの概要を説明する．周辺分布関数 G，H を持つ確率変数 ε_i，ρ_i の連続な同時分布関数を $F(\varepsilon_i,\rho_i)$ とすると，スクラーの定理[15)]より，

$$F(\varepsilon_i,\rho_i) = C(G(\varepsilon_i),H(\rho_i)) \tag{15}$$

を満たすコピュラ C が一意に存在する．スクラーの定理から，コピュラ C に周辺分布 G，H を適用することで生成される $C(G(\varepsilon_i),H(\rho_i))$ は，周辺分布を区間 $[0,1]$ とする同時分布関数である．また，

- 任意の $u=G(\varepsilon_i)\in[0,1]$ について $C(u,0)=0$
- 任意の $u=G(\varepsilon_i)\in[0,1]$ について $C(u,1)=u$
- 任意の $v=H(\rho_i)\in[0,1]$ について $C(0,v)=0$
- 任意の $v=H(\rho_i)\in[0,1]$ について $C(1,v)=v$
- $u_1 \le u_2$，$v_1 \le v_2$ を満たすすべての (u_1,v_1)，$(u_2,v_2)\in[0,1]^2$ に対して，

$$\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2(-1)^{i+j}C(u_i,v_j)\ge 0$$

の 3 つの性質を全て満たすような関数 C がコピュラとして定義される[12)]．同時確率密度関数 $f(\varepsilon_i,\rho_i)$ は，コピュラの分布関数 $C(G(\varepsilon_i),H(\rho_i))$ あるいは確率密度関数 $c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i))$ を用いて，

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i,\rho_i) &= \frac{\partial^2 C(G(\varepsilon_i),H(\rho_i))}{\partial G(\varepsilon_i)\partial H(\rho_i)} g(\varepsilon_i)h(\rho_i) \\ &= c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i))g(\varepsilon_i)h(\rho_i) \end{aligned} \tag{16}$$

表–1 代表的なアルキメディアン・コピュラ

コピュラ	生成関数 $\zeta(x)$ $(x=u,v)$	分布関数 $C(u,v)$	確率密度関数 $c(u,v)=\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u\partial v}$
ガンベル $a\in(1,\infty)$	$(-\ln x)^a$	$\exp[-\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}}]$	$\exp[-\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}}]\frac{\prod_{x=u,v}\ln x^{-a-1}}{uv}$ $\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a-2}}[\{\sum_{x=u,v}(-\ln x)^a\}^{\frac{1}{a}}+a-1]$
クレイトン $a\in(0,\infty)$	$\frac{1}{a}(x^{-a}-1)$	$(\sum_{x=u,v}x^{-a}-1)^{-\frac{1}{a}}$	$(1+a)(\prod_{x=u,v}x^{-a-1})$ $(\sum_{x=u,v}x^{-a}-1)^{-\frac{1}{a}-2}$
フランク $a\in(0,\infty)$	$\ln\{\exp(-ax)-1\}$ $-\ln\{\exp(-a)-1\}$	$-\frac{1}{a}\ln\left[1+\frac{\prod_{x=u,v}\{\exp(-ax)-1\}}{\{\exp(-a)-1\}}\right]$	$\frac{-a\prod_{x=u,v}\exp(-ax)(\exp(-a)-1)}{\{(\exp(-a)-1)+\prod_{x=u,v}\exp(-ax)-1\}}$

注）ただし，任意の関数 $f(\cdot)$ に関して，$\sum_{x=u,v}f(x)=f(u)+f(v)$，$\prod_{x=u,v}f(x)=f(u)f(v)$ が成立する．

と表現できる．周辺確率密度関数 $g(\varepsilon_i)$，$h(\rho_i)$ はそれぞれガンマ分布の確率密度関数式 (13),(14) で表現される．本研究では周辺分布に関する情報を用いて同時確率分布を表現するために様々なコピュラが提案されている．本研究では，乱数発生方法が知られているなど実務的にも扱いやすい，1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラ[11]を用いる．周辺分布関数をそれぞれ $G(\varepsilon_i)=u$，$H(\rho_i)=v$ とする 2 変量間の 1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラの分布関数 $C(u,v)$ は，生成関数 $\zeta(x)$ $(x=u,v)$ を用いて，

$$C(u,v)=\zeta^{-1}(\zeta(u)+\zeta(v)) \tag{17}$$

と表現できる．本研究の実証分析においては，アルキメディアン・コピュラとしてガンベル・コピュラ[16]，クレイトン・コピュラ[17]，フランク・コピュラ[18]の 3 種類のコピュラをとりあげる．**表–1** にガンベル・コピュラ，クレイトン・コピュラ，フランク・コピュラの生成関数，分布関数，確率密度関数を示している．また，ガンベル・コピュラのパラメータは $a\in(1,\infty)$，クレイトン・コピュラ，フランク・コピュラのパラメータは $a\in(0,\infty)$ を満たす．Romano[19]は経験コピュラ[20]との相違が最小となるコピュラを選定する方法を提案している．一方，Breymann 等[21]は，パラメータ数の異なるコピュラ間での選定を考慮し，AIC（赤池情報量基準）[22]をコピュラ選定基準としている．本研究では，コピュラを内包したワイブルハザードモデル間でのモデル比較を行うため，後者の AIC をコピュラ選定基準として採用する．

このように，コピュラを用いることにより，各異質性パラメータはそれぞれのガンマ分布に従い，平均値が 1 となるというベンチマーキングモデルの特性を維持しつつ，異質性パラメータの同時分布を表現することができる．本研究では，コピュラのパラメータ a，周辺分布のパラメータ ϕ，ψ を推計することにより，2 種類の異質性パラメータの同時分布を推計する．

4. モデルの推計手法

(1) 尤度関数の定式化

いま，タイプ i の機器 l_i $(l_i=1,\cdots,L_i)$ に対して，それぞれの故障事象に関するデータ $\bar{s}_{l_i}$，$\bar{\delta}_{l_i}$ が得られていると考える．$\bar{s}_{l_i}$ は機器が更新されてからの使用時間であり，$\bar{\delta}_{l_i}$ は故障の有無を表すダミー変数であり，

$$\bar{\delta}_{l_i}=\begin{cases}1 & \text{故障している時}\\ 0 & \text{故障していない時}\end{cases} \tag{18}$$

と定義する．記号「$\bar{}$」は観測値であることを表す．ここで，機器 l_i の劣化速度が交通量などの可観測な特性変数に応じて変化すると考える．機器 l_i の z $(z=1,\cdots,Z)$ 番目の特性変数を $\bar{x}_{l_i,z}$ とする．2 次元混合ワイブル劣化ハザード関数 (10) の γ を

$$\gamma_{l_i}=\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}') \tag{19}$$

とする．$\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}=(\bar{x}_{l_i,1},\cdots,\bar{x}_{l_i,Z})$ は特性変数ベクトルである．$\boldsymbol{\beta}_{l_i}=(\beta_1,\cdots,\beta_Z)$ は未知パラメータベクトルである．記号「$'$」は転置操作を表す．式 (11) に $\gamma=\gamma_{l_i}$ を代入して定義される機器 l_i の 2 次元混合ワイブルハザード関数の確率密度関数を $f_{l_i}(s)$，生存確率を $\tilde{F}_{l_i}(s)$ と表す．さらに，機器 l_i に関する観測値を $\bar{\xi}_{l_i}=(\bar{s}_{l_i},\bar{\delta}_{l_i},\bar{x}_{l_i})$ とする．さらに，観測値データベクトルを $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i=(\bar{\xi}_1,\cdots,\bar{\xi}_{L_i})$ と表す．また，観測値データ全体を $\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ と表す．

いま，機器 l_i に関する観測値 $\bar{\xi}_{l_i}$ を与件とする．この時，$\bar{\xi}_{l_i}$ が獲得できる尤度は，劣化ハザードモデル，異質性パラメータの周辺確率密度関数，コピュラを用いて，

$$\begin{aligned}&\ell_{l_i}(\bar{\xi}_{l_i}:\boldsymbol{\beta},m,\varepsilon_i,\rho_i,a,\phi,\psi)\\&=\{f_{l_i}(\bar{s}_{l_i}:\boldsymbol{\beta},m,\varepsilon_i,\rho_i)\}^{\bar{\delta}_{l_i}}\{\tilde{F}_{l_i}(\bar{s}_{l_i}:\boldsymbol{\beta},m,\varepsilon_i,\rho_i)\}^{1-\bar{\delta}_{l_i}}\\&\cdot\ c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)g(\varepsilon_i:\phi)h(\rho_i:\psi)\\&=\{\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')m\varepsilon_i\rho_i\bar{s}_{l_i}^{m\rho_i-1}\}^{\bar{\delta}_{l_i}}\\&\cdot\ \exp\{-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_i\bar{s}^{m\rho_i}\}\\&\cdot\ c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)g(\varepsilon_i:\phi)h(\rho_i:\psi)\end{aligned} \tag{20}$$

と表現できる．この時，全ての観測値データ集合 $\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ が

観測される尤度 $\mathcal{L}(\bar{\Xi}:\boldsymbol{\theta})$ は，

$$\mathcal{L}(\bar{\Xi}:\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{I}\prod_{l_i=1}^{L_i}\ell_{l_i}(\bar{\xi}_{L_i}:\boldsymbol{\beta},m,\varepsilon_i,\rho_i,a,\phi,\psi) \tag{21}$$

と表現できる．ただし，$\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\beta},m,a,\phi,\psi)$ はパラメータベクトルを表し，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_I)$，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\cdots,\rho_I)$ は異質性パラメータベクトルである．

(2)　事前確率密度関数の設定

一般的なベイズ推計手法では，パラメータの事前分布と，観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて，パラメータの事後分布を推計する．いま，尤度関数を $\mathcal{L}(\bar{\Xi}:\boldsymbol{\theta})$ と表す．ここで，パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が確率変数で，同時事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta})$ に従うと仮定する．目視点検データ $\bar{\Xi}$ が与件であるときに，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\Xi})$ はベイズの定理より，

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\Xi})\propto\mathcal{L}(\bar{\Xi}:\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}) \tag{22}$$

と表される．同時事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta})$ を，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta})&=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,a)\\&=\boldsymbol{\chi}_{\beta}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\chi}_m(m)\boldsymbol{\chi}_{\phi}(\phi)\boldsymbol{\chi}_{\psi}(\psi)\boldsymbol{\chi}_a(a)\end{aligned} \tag{23}$$

と展開する．このように，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\beta},m,a,\phi,\psi)$ の各要素は独立であると考える．また，同時事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta})$ に異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_I)$，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\cdots,\rho_I)$ は含まれておらず，本研究では，個々の異質性パラメータを潜在変数として捉えていることに留意されたい．式 (23) のように，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの事前確率密度関数は，ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}_{\beta}(\boldsymbol{\beta})$，異質性パラメータの分散を規定するパラメータ ϕ，ψ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}_{\phi}(\phi)$，$\boldsymbol{\chi}_{\psi}(\psi)$，コピュラの未知パラメータ a の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}_a(a)$ で構成される．

まず，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\chi}_{\beta}(\boldsymbol{\beta})$ として多次元正規分布 $\boldsymbol{\beta}\sim\mathcal{N}_Z(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ を用いる．ただし，$\mathcal{N}_Z(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ は期待値ベクトルを $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ とした Z 次元正規分布である．また，加速度パラメータ m，分散パラメータ ϕ，ψ，コピュラのパラメータ a の事前確率密度関数として，ガンマ分布を $m\sim\mathcal{G}(p_m^0,q_m^0)$，$\phi\sim\mathcal{G}(p_\phi^0,q_\phi^0)$，$\psi\sim\mathcal{G}(p_\psi^0,q_\psi^0)$，$a\sim\mathcal{G}(p_a^0,q_a^0)$ と設定する．ここに，p_m^0，p_ϕ^0，p_ψ^0，p_a^0 はガンマ分布の形状パラメータ，q_m^0，q_ϕ^0，q_ψ^0，q_a^0 は尺度パラメータである．ただし，$a\in(1,\infty)$ の制約があるガンベル・コピュラに関しては $u=a-1$ と変数変換し，$u\sim\mathcal{G}(p_a^0,q_a^0)$ とする．これらの事前確率密度関数が推計結果に与える影響は，点検データの増加に伴い薄れていく．階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法（以下，MH 法）を組み合わせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている．

(3)　同時事後確率密度関数の定式化

尤度関数（21）と事前確率密度関数（23）を用いて，ベイズの定理（22）より，同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\Xi})$ を定式化することができる．本稿で提案する 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\Xi})$ は具体的に以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\Xi})\\&\propto\prod_{i=1}^{I}\prod_{l_i=1}^{L_i}\Big[\{\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')m\varepsilon_i\rho_i\bar{s}_{l_i}^{m\rho_i-1}\}^{\bar{\delta}_{l_i}}\\&\cdot\ \exp\{-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_i\bar{s}^{m\rho_i}\}\\&\cdot\ \frac{\phi^{\phi}}{\Gamma(\phi)}\varepsilon_i^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon_i)\frac{\psi^{\psi}}{\Gamma(\psi)}\rho_i^{\psi-1}\exp(-\psi\rho_i)\\&\cdot\ c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)\Big]\\&\cdot\ \exp\Big\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})'\Big\}\\&\cdot\ \frac{1}{(q_m^0)^{p_m^0}\Gamma(p_m^0)}m^{p_m^0-1}\exp\left(-\frac{m}{q_m^0}\right)\\&\cdot\ \frac{1}{(q_\phi^0)^{p_\phi^0}\Gamma(p_\phi^0)}\phi^{p_\phi^0-1}\exp\left(-\frac{\phi}{q_\phi^0}\right)\\&\cdot\ \frac{1}{(q_\psi^0)^{p_\psi^0}\Gamma(p_\psi^0)}\psi^{p_\psi^0-1}\exp\left(-\frac{\psi}{q_\psi^0}\right)\\&\cdot\ \frac{1}{(q_a^0)^{p_a^0}\Gamma(p_a^0)}\tilde{a}^{p_a^0-1}\exp\left(-\frac{\tilde{a}}{q_a^0}\right)\end{aligned} \tag{24a}$$

$$G(\varepsilon_i)=\frac{\tilde{\gamma}(\phi,\phi\varepsilon_i)}{\Gamma(\phi)} \tag{24b}$$

$$H(\rho_i)=\frac{\tilde{\gamma}(\psi,\psi\rho_i)}{\Gamma(\psi)} \tag{24c}$$

$$\begin{aligned}&c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)\\&=\begin{cases}\exp[-\{(-\ln G(\varepsilon_i))^a+(-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}}]\\\cdot\{(\ln G(\varepsilon_i))(\ln H(\rho_i))\}^{a-1}/\{G(\varepsilon_i)H(\rho_i)\}\\\cdot\{(-\ln G(\varepsilon_i))^a+(-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}-2}\\\cdot\{(-\ln G(\varepsilon_i))^a+(-\ln H(\rho_i))^a\}^{\frac{1}{a}+a-1}\\\qquad\qquad\text{ガンベル・コピュラ}\\(1+a)\{(G(\varepsilon_i)H(\rho_i))^{-a-1}\}\\\cdot(G(\varepsilon_i)^{-a-1}+H(\rho_i)^{-a-1}-1)^{-1/a-2}\\\qquad\qquad\text{クレイトン・コピュラ}\\-a\exp(-aG(\varepsilon_i))\exp(-aH(\rho_i))\\\cdot\{\exp(-a)\}/[\{\exp(-a)\}\\+\{\exp(-aG(\varepsilon_i))-1\}\{\exp(-aH(\rho_i))-1\}]^2\\\qquad\qquad\text{フランク・コピュラ}\end{cases}\end{aligned} \tag{24d}$$

ただし，$\tilde{\gamma}(\cdot,\cdot)$ は不完全ガンマ関数である．また，ガンベル・コピュラのとき $\tilde{a}=a-1$，クレイトン・コピュラとフランク・コピュラのとき $\tilde{a}=a$ である．なお，$G(\varepsilon_i:\phi)$，$H(\rho_i:\psi)$ は，異質性パラメータの周辺分布関数であり，$G(\varepsilon_i)$，$H(\rho_i)$ と簡略化して表記している．

(4)　同時事後確率密度関数の推計

2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを推計するためには，複数の未知パラメータと異質性パラメータを推計する必要がある．本研究では，これら全てのパラメータを MCMC 法により同時推計する．MCMC 法において，次元の呪いを解消するために，これらのパラメータをギブスサンプリングすることを考える．以下で，各パラメータの条件付き事後確率密度関数を定義する．

いま，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の要素 β_{e_1} $(e_1=1,\cdots,Z)$ を除く部分ベクトルを $\boldsymbol{\beta}_{-e_1}$ と表す．このとき，同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ を用いて，$\boldsymbol{\beta}_{-e_1}$，$m$，$\phi$，$\psi$，$a$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの β_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\beta_{e_1}|\boldsymbol{\beta}_{-e_1},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\beta_{e_1}|\boldsymbol{\beta}_{-e_1},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\exp\Big[\sum_{i=1}^{I}\sum_{l_i=1}^{L_i}\big\{\bar{\delta}_{l_i}\bar{x}_{l_i,e_1}\beta_{e_1}-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_i\bar{s}^{m\rho_i}\big\}\\ &\qquad-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})'\Big]\end{aligned}\tag{25}$$

と表現できる．$\boldsymbol{\beta}$，ϕ，ψ，a，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの m の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(m|\boldsymbol{\beta},\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(m|\boldsymbol{\beta},\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{i=1}^{I}\prod_{l_i=1}^{L_i}\Big[(m\bar{s}^{m\rho_i-1})^{\bar{\delta}_{l_i}}\exp\big\{-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_i}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_i\bar{s}^{m\rho_i}\big\}\Big]\\ &\cdot\ m^{p_m^0-1}\exp\left(-\frac{m}{q_m^0}\right)\end{aligned}\tag{26}$$

と表現できる．$\boldsymbol{\beta}$，m，ψ，a，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの ϕ の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\phi|\boldsymbol{\beta},m,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\phi|\boldsymbol{\beta},m,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{i=1}^{I}\left\{\frac{\phi^{\phi}}{\Gamma(\phi)}\varepsilon_i^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon_i)c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)L_i\right\}\\ &\cdot\ \phi^{p_\phi^0-1}\exp\left(-\frac{\phi}{q_\phi^0}\right)\end{aligned}\tag{27}$$

と表現できる．$\boldsymbol{\beta}$，m，ϕ，a，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの ψ の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\psi|\boldsymbol{\beta},m,\phi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\psi|\boldsymbol{\beta},m,\phi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{i=1}^{I}\left\{\frac{\psi^{\psi}}{\Gamma(\psi)}\rho_i^{\psi-1}\exp(-\psi\rho_i)c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)L_i\right\}\\ &\cdot\ \psi^{p_\psi^0-1}\exp\left(-\frac{\psi}{q_\psi^0}\right)\end{aligned}\tag{28}$$

と表現できる．$\boldsymbol{\beta}$，m，ϕ，ψ，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの a の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(a|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(a|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{i=1}^{I}\{c(G(\varepsilon_i),H(\rho_i):a)L_i\}\,\tilde{a}^{p_a^0-1}\exp\left(-\frac{\tilde{a}}{q_a^0}\right)\end{aligned}\tag{29}$$

と表現できる．さらに，異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ の要素 ε_{e_2} $(e_2=1,\cdots,I)$ を除く部分ベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}$，異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\rho}$ の要素 ρ_{e_3} $(e_3=1,\cdots,I)$ を除く部分ベクトルを $\boldsymbol{\rho}_{-e_3}$ と表す．このとき，$\boldsymbol{\beta}$，m，ϕ，ψ，a，$\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの ε_{e_2} の条件付き確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon_{e_2}|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon_{e_2}|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2},\boldsymbol{\rho},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{l_{e_2}=1}^{L_{e_2}}\Big[\varepsilon_{e_2}^{\bar{\delta}_{l_{e_2}}}\exp\big\{-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_{e_2}}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_{e_2}\bar{s}^{m\rho_{e_2}}\big\}\Big]\\ &\cdot\ L_{e_2}c(G(\varepsilon_{e_2}),H(\rho_{e_2}):a)\end{aligned}\tag{30}$$

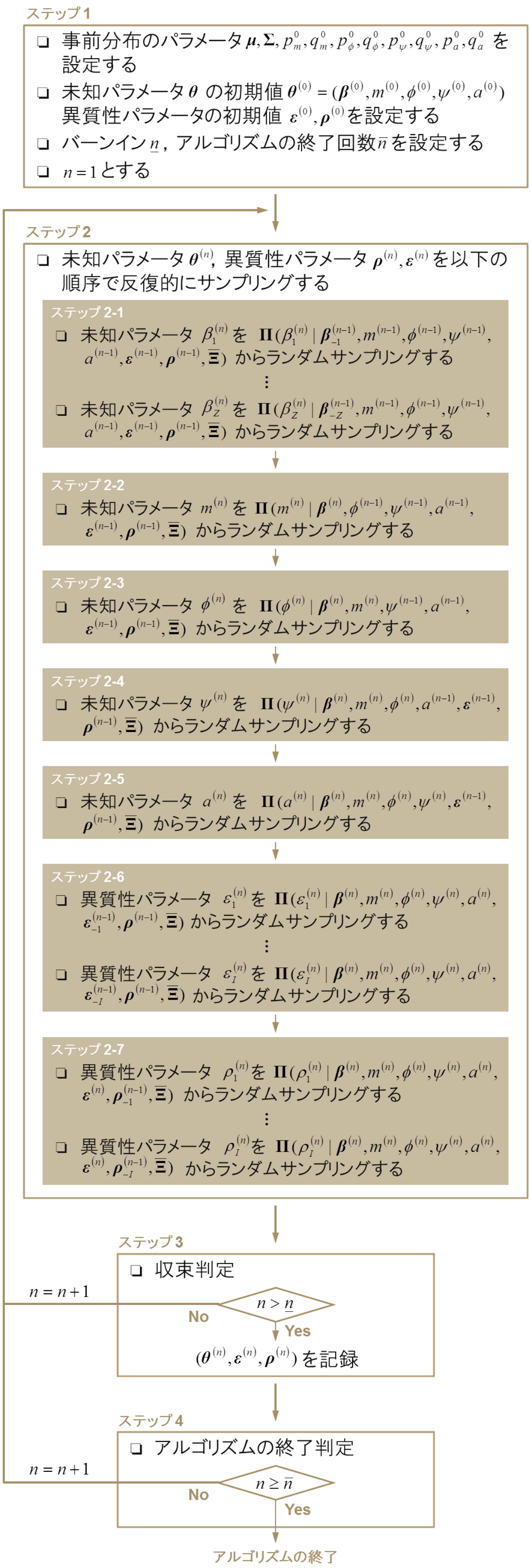
と表現できる．$\boldsymbol{\beta}$，m，ϕ，ψ，a，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\rho}_{-e_3}$，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ を既知としたときの ρ_{e_3} の条件付き確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\rho_{e_3}|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho}_{-e_3},\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}(\rho_{e_3}|\boldsymbol{\beta},m,\phi,\psi,a,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\rho}_{-e_3},\bar{\boldsymbol{\Xi}})\\ &\propto\prod_{l_{e_3}=1}^{L_{e_3}}\Big[\big\{\rho_{e_3}\bar{s}_{l_{e_3}}^{m\rho_{e_3}-1}\big\}^{\bar{\delta}_{l_{e_3}}}\\ &\qquad\cdot\exp\big\{-\exp(\bar{\boldsymbol{x}}_{l_{e_3}}\boldsymbol{\beta}')\varepsilon_{e_3}\bar{s}^{m\rho_{e_3}}\big\}\Big]\\ &\cdot\ L_{e_3}c(G(\varepsilon_{e_3}),H(\rho_{e_3}):a)\end{aligned}\tag{31}$$

と表現できる．これらの条件付き確率密度関数を用いた具体的なモデル推計手順を**図–3** と以下に示す．

ステップ 1　事前分布のパラメータ値 $\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\Sigma}$，p_m^0，q_m^0，p_ϕ^0，q_ϕ^0，p_ψ^0，q_ψ^0，p_a^0，q_a^0 を設定する．また，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}=(\boldsymbol{\beta}^{(0)},m^{(0)},\phi^{(0)},\psi^{(0)},a^{(0)})$，異質性パラメータの初期値 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$，$\boldsymbol{\rho}^{(0)}$ を設定する．初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく．サンプリング回数を $n=1$ に設定する．バーンイン回数 $\underline{n}$，アルゴリズムの終了回数 $\overline{n}$ を設定する．$e_1=1$，$e_2=1$，$e_3=1$ と設定する．

ステップ 2　未知パラメータ値 $\boldsymbol{\theta}^{(n)}$ $(n=1,\cdots,\overline{n})$，異質性パラメータ値 $\boldsymbol{\rho}^{(n)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ を以下の手順でサ



図–3 推定フロー

ンプリングする．

ステップ 2-1 未知パラメータ $\beta_{e_1}^{(n)}$ $(e_1 = 1, \cdots, Z)$ を条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\beta_{e_1}^{(n)} | \boldsymbol{\beta}_{-e_1}^{(n-1)}, m^{(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-2 未知パラメータ $m^{(n)}$ を条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(m^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-3 未知パラメータ $\phi^{(n)}$ を条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\phi^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, m^{(n)}, \psi^{(n-1)}, a^{(n-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-4 未知パラメータ $\psi^{(n)}$ を条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(\psi^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, a^{(n-1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-5 未知パラメータ $a^{(n)}$ を条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\Pi}(a^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-6 異質性パラメータ $\varepsilon_{e_2}^{(n)}$ $(e_2 = 1, \cdots, I)$ を $\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon_{e_2}^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}^{(n-1)}, \boldsymbol{\rho}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-7 異質性パラメータ $\rho_{e_3}^{(n)}$ $(e_3 = 1, \cdots, I)$ を $\boldsymbol{\Pi}(\rho_{e_3}^{(n)} | \boldsymbol{\beta}^{(n)}, m^{(n)}, \phi^{(n)}, \psi^{(n)}, a^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \boldsymbol{\rho}_{-e_3}^{(n-1)}, \boldsymbol{\Xi})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 3 十分大きな $\underline{n}$ に対して $n > \underline{n}$ ならば $(\boldsymbol{\theta}^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \boldsymbol{\rho}^{(n)})$ を記録する．

ステップ 4 $n = \overline{n}$ ならば計算を終了する．$n < \overline{n}$ ならば $n = n + 1$ とし**ステップ 2-1** へ戻る．

十分大きな $\underline{n}$ に対して，このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば，ギブスサンプリングによる $(\boldsymbol{\theta}^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \boldsymbol{\rho}^{(n)})$ $(n = \underline{n}+1, \underline{n}+2, \cdots, \overline{n})$ のサンプリングは，同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\Xi})$ からのサンプリングと等しくなる．したがって，ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\boldsymbol{\theta}^{(n)}$ を用いて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる．ただし，**ステップ 2** で利用する条件付き確率密度関数からは直接的にランダムサンプリングすることができないため，MH 法を用いて条件付き事後確率密度関数からのサンプリングを行う．

5. おわりに

本研究では，道路付帯機器システム間の劣化過程の差異を，2 種類の異質性として定量化し，劣化予測を行う方法論を構築した．具体的には，個々の機器システムグループが有する劣化過程の差異を，劣化加速度の異質性および劣化速度の異質性の 2 次元異質性として定量化した上で劣化過程を表現する，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルを開発した．また，2 次元異質性の相関構造を明らかにするため，コピュラを用いた劣化過程モデルとして提案している．2 次元異質性の周辺分布とコピュラを用いた上で同時分布を表現することにより，2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルによる 2 次元異質性を，2 次元空間上において相対評価することを可能にした．**2.(4)** に詳述したように，これまでワイブル劣化ハザードモデルのパラメータを推計する際には，識別不可能性問題を避けることが困難であったが，コピュラを用いることにより，ほぼ同一の劣化過程を表現するパラメータの組み合わせであっても，相関構造からの差異によって差別化を図り，識別不可能性問題の解消を実現した．

今後，検討する必要があるいくつかの課題について以下に述べる．第 1 に，本研究の適用対象としては，高速道路上の道路付帯機器システムのみであった．今後，多様な社会基盤施設に適用していくことで，2 次元異質性の相関関係に関する知見を蓄積し，モデルの更なる改善を図ることが重要である．第 2 に，本研究では，2 次元異質性パラメータを 2 次元空間上にプロットすることで相対評価を行い，3 つのシステムグループ群に大別することにより，逐次更新施策と一括更新施策のいずれを選択するかを示唆するまでに留めた．しかし，実際の道路付帯機器システムのアセットマネジメントを実施するためには，ライフサイクル費用やリスク管理水準を勘案した，総合的な評価によって更新施策を決定する必要がある．よって，劣化予測の結果，ライフサイクル費用，リスク管理指標の定量化に基づき，最適更新間隔や逐次更新または一括更新を含めた最適更新施策を決定する方法論の構築が課題となる．第 3 に，社会基盤施設の劣化状態は本研究でとりあげたような 2 値変数でなく，複数のレーティング（もしくは，健全度）で記述される場合が少なくない．このような場合に対応した時間依存型劣化予測モデルとして，多段階ワイブル劣化ハザードモデルがすでに提案されている．よって，多段階ワイブル劣化ハザードモデルを，本研究で提案した 2 次元異質性を考慮できるモデルへと発展させていくことが必要である．

なお，研究発表会当日には，実在の高速道路付帯施設（トンネル照明器具，情報板 LED，本線照明，トンネル坑外照明）で獲得された点検データを用いた実証分析も交え，本研究の有用性を議論する．

参考文献

1) Shin, H. C. and Madanat, S.: Development of a stochastic model of pavement distress initiation, *J. Infrastructure Plan. and Man.*, JSCE, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
2) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67, pp.111-124，2005.
3) 貝戸清之，山本浩司，小濱健吾，岡田貢一，小林潔司：ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル，交通管制システムへの適用，土木学会論文集 F，Vol.64，No.2, pp.115-129，2008.
4) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
5) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
6) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82, 2005.
7) 青木一也，山本浩司，津田尚胤，小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集，No.798/VI-68, pp.125-136，2005.
8) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64, No.4，pp.857-874，2008.
9) 林秀和，貝戸清之，熊田一彦，小林潔司：競合的劣化ハザードモデル：舗装ひび割れ過程への適用，土木学会論文集 D，Vol.65，No.2，pp.143-162，2009.
10) 貝戸清之，坂井康人，塚本成昭，水谷大二郎，小林潔司：多階層混合マルコフ劣化ハザードモデル：ジョイント劣化評価への適用，土木学会論文集 F4，Vol.71，No.1, pp.1-18，2015.
11) 戸坂凡展，吉羽要直：コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説，日本銀行金融研究所，金融研究，pp.115-162，2005.
12) Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
13) Maher, M. J. and Summersgill, I.: A comparative methdology for the fitting predictive accident models, *Accident Analysis & Prevention*, Vol.28, pp.281-296, 1996.
14) Piegorsch, W. W.: Maximum likelihood estimation for the negative binomial dispersion parameter, *Biometrika*, Vol.46, pp.863-867, 1990.
15) Sklar, A.: Random Variables, Joint Distribution Functions, and Copulas, *Kybernetika*, Vol.9, No.6, pp.449-460,1973.
16) Gumbel, E. J.: Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association 55*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
17) Clayton, D. G.: A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
18) Frank, M. J.: On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.
19) Romano, C.: Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market, *Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati*, Vol.12, 2002.

20) Deheuvels, P.: Non Parametric Tests of Independence, *Statistique non Paramétrique Asymptotique Lecture Notes in Mathematics*, Vol.821, ,pp.95-107, 1980.
21) Breymann, W., Dias, A. and Embrechts, P.: Dependence Structures for Multivariate High-frequency Data in Finance, *Quantitative Finance*, Vol.3, No.1, pp.1-14, 2003.
22) 小西貞則，北川源四郎：予測と発見の科学　情報量基準，朝倉書店，2006.

(2015. 4. 24. 受付)

TWO-DIMENSIONAL WEIBULL MIXTURE DETERIORATION HAZARD MODEL

So SAKAGUCHI, Daijiro MIZUTANI, Kakuya MATSUSHIMA, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI

Deterioration rates and accelerations of an expressway equipment system vary dependent on its type and installation location. Moreover, in the asset management of the equipment system, it is necessary to quantify the failure process at arbitrary assessment units and decide the optimal management policy. This paper proposes a two dimensional Weibull mixture hazard model in order to estimate heterogeneities among deterioration rates and accelerations of each equipment. And furthermore, the authors develop a Bayesian estimation method of the two dimensional Weibull mixture hazard model. At that time, two kinds of heterogeneities are expressed as Gamma distributions and their correlation can be described using an Archimedean copula. Lastly, the proposed model is applied to the actual inspection data of an expressway equipment system and the usefulness of the model can be discussed as a case study.