長期記憶モデルを用いた
高速道路橋継手の時系列劣化予測

北浦直樹[1]・数実浩佑[2]・貝戸清之[3]・小林潔司[4]

[1]学生員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: n.kitaura@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]学生員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k.kazumi@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[4]フェロー会員　京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町）
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

モニタリング技術の向上とともに，インフラに関するモニタリングデータを長期間にわたって蓄積していくことが容易となると予想される．しかしながら，そのようなデータをインフラの維持管理に応用するための方法論は十分に整備されていない．特に，長期モニタリングデータを扱う際には長期記憶性という性質に留意する必要があるが，土木工学の分野において長期記憶性を考慮してモニタリングデータの分析を行った事例はほとんどみられない．本研究では，長期記憶モデルとして ARFIMAX-GARCH モデルを提案し，構造物が有する長期記憶性について分析する．そして長期モニタリングデータに基づいたインフラの劣化予測を行うための方法論を構築する．最後に，高速道路橋の継手部分を対象とした長期モニタリングデータに適用し，提案手法の有効性を検証する．

Key Words : *ARFIMAX-GARCH model, long memory effect model, joint members of highway bridges, MCMC*

1.　はじめに

現在の社会基盤施設のアセットマネジメントは目視点検データを中心とした方法論により構築されている[1)]．それにより，目視点検の合理化[2),3)]やライフサイクル費用の最小化に基づく維持管理戦略の立案と評価[1),4)]といった高度なアセットマネジメントの開発が行われてきた．一方,「常時監視による損傷・劣化の早期検知」という実務的要請の極めて高いニーズに対しては，目視点検の限界が指摘されている．これらの課題に対する解決策の一つとして，モニタリングデータに基づくアセットマネジメントの開発が必要である．

しかしながら，多くの管理団体で目視点検に基づくアセットマネジメントが現段階で稼働していることを考えると，たとえ目視点検に代わる点検方法が開発されたとしても，その実務への導入は段階的にならざるを得ない．そのため，モニタリングデータに基づくアセットマネジメントを開発する際には，目視点検とモニタリングそれぞれの長所と短所を把握したうえで，目視点検を主体とした現状の維持管理体制と有機的に結びつき，相互補完するような新しいアセットマネジメントのフレームワークを見出す必要がある．特に，モニタリングを目視点検の短所を補完する手段と考えれば，劣化の進展が著しい少数の施設に対して適用することによって，目視点検では難しいとされる構造物の異常発生の早期検知もしくは補修・補強が必要となる時期の詳細な予測が可能になると期待される．

モニタリング技術の開発により定量的データの計測・蓄積が容易になったことを考えると，インフラに関する長期的な時系列データが今後ますます蓄積されていくと予想される．その一方で，得られたモニタリングデータに基づき異常の早期検知や補修・補強時期の予測を行う方法論は十分に整備されていない．すなわち，モニタリングを通してビッグデータを収集することができたとしても，それを維持管理の意思決定問題に応用する手段がないという現状がある．モニタリングデータの維持管理業務への応用に関する研究事例として，長期モニタリングにより取得した時系列データの統計的特徴に基づく劣化予測手法が開発されている[5)]．しかしながら，使用している時系列モデルが長期記憶性を考慮できないため，提案モデルの妥当性と予測精度の信頼性に大きな課題が残る．

そこで本研究では，提案されている時系列モデルを長期記憶性を考慮できるものに拡張し，長期モニタリングデータに基づき補修・補強時期の予測を行う方

法論の開発を行う．具体的には，劣化の進行過程を外生変数を考慮した実数和分自己回帰移動平均モデル（AutoRegressive Fractional Integrated Moving Average model with eXogenous variables model，以下，ARFIMAX モデル）で表現するとともに，その誤差項の分散の変動を GARCH（Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity）過程で表現した ARFIMAX-GARCH モデルとその推計方法を提案する．以下，**2.** では本研究の基本的な考え方を述べる．**3.** では ARFIMAX-GARCH モデルの概要について，**4.** ではモデルのの推計方法について述べる．

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 維持管理におけるモニタリング

社会基盤施設においては，劣化や損傷の程度を定量的に評価し，施設を効率的に維持管理することを目的として，モニタリングが数多く実施されている．モニタリングは目的に応じて，1）1 回の詳細な計測データから構造物の劣化状況や損傷を絶対的に評価する手法と，2）継続的な計測を通してそれらを相対的に評価する手法に大別することができる．このうち，従来の土木工学分野では前者のモニタリングデータを用いた逆解析による構造性能調査等に主眼がおかれることが多かった．一方で，後者のモニタリング（以下，継続的モニタリングと呼ぶ）は，団塊的に老朽化が進むインフラを効率的に管理していくための一方法論として実用化が期待されている．継続的モニタリングの特徴は，保有性能の低下や損傷の発生・進展とともに変動すると考えられる周辺情報（本研究で対象とする振動モニタリングでは固有振動数などの振動特性）を継続的に計測することによって，それらの日常の変動範囲から逸脱する変化を捉えようとする点にある．このような周辺情報の相対変化を捉えることで，現場点検員の初動体制の効率的な確保が可能となる．最終的には目視点検データ用いたアセットマネジメントにより最適補修計画を立案し，その一方でモニタリングデータを用いて損傷・劣化の早期検知によるリスクヘッジを実施することでインフラのアセット・リスクマネジメント体制の強化を実現する．

既往の研究事例として，すでに継続的な長期モニタリングの実施を見据え，実構造物を対象としてモニタリング手法の有効性が確認されている[6]．本研究では，継手部材の長期モニタリングデータに基づいて，継手部材の長期劣化進行過程を ARFIMAX-GARCH モデルを用いてモデル化するとともに，高速道路橋の継手部材の劣化のタイプや将来時点における劣化の進行過程を予測する方法論を提案する．

(2) 長期モニタリングデータの応用とその課題

土木工学分野において，構造物から振動やひずみなどの物理量を長期的に計測するモニタリングシステムの開発や実構造物への適用に関する研究事例が発表されている．しかしながら，長期に亘り蓄積された定量的なモニタリングデータから継時的変化や異常を検出する方法論に関してはほとんど研究がなされていないのが現状である．

そのような中，時系列解析の観点に基づき，得られたモニタリングデータからインフラの劣化予測を行う方法論が開発されている[5]．対象としている高速道路橋の継手部材は，劣化が進展することにより車両通過時の「音」が変化することが経験的に知られている．そこで,「継手の劣化に伴い卓越振動数が増加する」という知見に基づき，継手の卓越振動数の長期モニタリングを行い，獲得したモニタリングデータを時系列モデルを用いて分析することにより劣化予測が行われている．提案モデルは，モデルの誤差項の分散が時間的に変動することを許容しつつ，気温や降水量など対象部材の劣化に影響を与えると考えられる因子を考慮することが可能な ARMAX-GARCH モデルが用いられている．さらに，交換が必要なほど劣化が進展している継手の卓越振動数を調べ，それを ARMAX-GARCH モデルによる予測結果の閾値として利用することにより，点検が必要となる時期の予測を行っている．

このモデルの大きな問題点としてモニタリングデータがもつ長期記憶性を考慮できないということがあげられる．長期記憶性については次節で述べるが，現段階で用いているモデルでは予測精度が悪くなる可能性があるため，実務で利用可能な精度を得るには長期記憶性を考慮することができる時系列モデル（以下，長期記憶モデルと呼ぶ）に拡張することが望ましい．しかしながら，長期記憶モデルを社会基盤施設から得られたモニタリングデータに適用した事例は見られない．また，閾値の決定方法，早期異常検知あるいは詳細点検時期の決定のための統計的意思決定アルゴリズムの開発，継手の劣化進展とモデルパラメータの因果関係の工学的な観点による考察など多くの課題を有している．

(3) 長期記憶モデルの意義

本研究では，社会基盤施設に対して外的に作用する劣化因子に着目する．例えば，交通過重や降雨などが社会基盤施設の劣化現象に及ぼす影響を考えた場合，それらの影響は，劣化が直接作用した直後でなく，ある程度の時間が経過した後に具体的な劣化現象が発現し，観測されることも少なくない．このような劣化現象の発現までの過程を，本研究では長期記憶性を考慮した時系列モデルで表現する．

時系列解析は時間の経過とともに観測されるデータ（以下，時系列データ）の発生メカニズムに対して適当と思われるモデルを構築し，このモデルを用いて将来の値を予測したり，入出力システムであれば入力を調整し，出力が望ましい値に近づくように制御したり，あるいは複数の時系列間の因果関係，相互関係を検出することを目的としている．

代表的な時系列データの分析方法として Box-Jenkins 法[7]が確立されている．すなわち，原データ系列を定常な確率過程とみなし，ARMA モデルによってモデル化する．この方法は ARMA モデルに対する同定法，推定法，適合度検定，そして予測や制御への応用に至る手続きを体系化し，時系列データの解析に携わる人々に極めて有用な手法となった．しかしながら ARMA モデルは，時間間隔が大きくなるにつれて，急速に自己相関関数が 0 に収束するため，遠い過去の値との相関関係を考慮することができない．したがって ARMA モデルは，より過去の値が現在の値に影響を与えるような時系列データ，すなわち長期記憶性をもつデータへの当てはまりはよくない．たとえば長期的な相関構造を無視して，ごく最近の過去の観測値のみを用いて将来の値を予測しようとすると，精度の良くない予測値になる恐れがある．ARMA モデルがもつこのような性質は短期記憶性と呼ばれる．

古くから，観測値間の相関係数が，時間の推移とともに緩慢にしか減衰しない時系列データの存在は，経済学，天文学，水文学，工学，農学など広範な分野に渡って報告されている．土木工学分野に目を向けると，インフラの劣化に関する時系列データにおいてこのような性質がみられる可能性がある．インフラの劣化は，供用開始時から受けてきた劣化因子（経時劣化，大型車交通荷重，降雨，凍結防止剤散布量など）が蓄積されていくことにより徐々に進展していく．したがって，インフラの劣化に関する任意時点におけるモニタリングデータは，遠い過去の履歴と高い相関性を有する場合が少なくないと考えられる．このような，遠い過去の履歴との相関関係をモデル内で表現するためには，長期記憶モデルを用いる必要がある．

また，交通荷重や降雨といった劣化因子が対象部材に作用するとき，それはすぐに部材の劣化に影響を与えるわけではなく，ある程度時間が経過した後に劣化として現れる．このことを考えると，供用開始からのトータルの交通量あるいは降水量を説明変数として部材の劣化過程を分析することは適切でないことがわかる．長期記憶モデルを用いることによって，劣化因子が加わってからそれが劣化として現れるまでのタイムラグを考慮することが望ましい．

しかしながら，土木工学分野における既存の時系列モデルのほとんどは短期記憶モデルの範疇である．特に，社会基盤施設の劣化予測に長期記憶性が考慮された事例は筆者の知る限り存在しない．本研究では，長期モニタリングデータが有する長期記憶性を考慮することによって，実現象をより的確に定式化するとともに，精度の高い劣化予測モデルを構築を目指す．

3. ARFIMAX-GARCH モデル

2.(3) で本研究のキーワードである長期記憶性について簡単に述べた．長期記憶性に関する詳細は参考文献に譲るが，本章では本研究と関係のある長期記憶性の要点を記述する．まず代表的な短期記憶モデルである ARMA モデルを通して短期記憶性について述べる．次に，長期記憶モデルに拡張した ARFIMA モデルを紹介し，長期記憶性の定義を示す．そして本研究で用いる ARFIMAX-GARCH モデルについて説明する．

(1) ARMA モデルと短期記憶性

いま，時点 t において観測された定常時系列データ y_t $(t=1,\cdots,T)$ が過去の観測値 y_{t-j} と現在および過去に加わる白色雑音 ε_t の線形和，すなわち次式のように表現されると考える．

$$y_t=\sum_{j=1}^{p}\phi_j y_{t-j}+\varepsilon_t+\sum_{j=1}^{q}\psi_j\varepsilon_{t-j} \tag{1}$$

これを (p,q) 次の自己回帰移動平均モデルと呼び，ARMA(p,q) モデルと記す．ここで，ϕ_j と p はそれぞれ AR 係数,AR 次数と呼ばれる．また，ψ_j と q はそれぞれ MA 係数，MA 次数と呼ばれる．p が有限な場合，ARMA 過程の定常性は AR 係数によって決まり，一方，反転可能条件は MA 係数によって決まる．ここでは，両者の条件がともに成り立つと仮定する．また，白色雑音 ε_t は確率誤差項であり，平均 0，分散 σ^2 の正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ に従うと仮定する．

ARMA$(p,\,q)$ モデルは AR 作用素 $\Phi(L)$ と MA 作用素 $\Psi(L)$ を用いることによって，次のように簡潔な形で表現できる．

$$\Phi(L)y_t=\Psi(L)\varepsilon_t \tag{2}$$

ここで，AR 作用素 $\Phi(L)$ と MA 作用素 $\Psi(L)$ はそれぞれラグ多項式

$$\Phi(L)=1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p \tag{3}$$

$$\Psi(L)=1+\psi_1L+\psi_2L^2+\cdots+\psi_qL^q \tag{4}$$

で表せる．また，L はラグオペレータを表し，$L^jy_t=y_{t-j}$ で定義される．

ここで，ARMA モデルが短期記憶であることを確認するために，簡単な例を用いて自己共分散関数 $\gamma(j)$ を

求めよう．ARMA(1,1) 過程は次のように表せる．

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \psi\varepsilon_{t-1} \tag{5}$$

両辺に y_t をかけて期待値をとると

$$E[y_t^2] = \phi E[y_{t-1}y_t] + E[\varepsilon_t y_t] + \psi E[\varepsilon_{t-1}y_t] \tag{6}$$

ここで，白色雑音 ε_t において $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$，$E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}] = 0$, $\forall t \neq j$ が成り立つことを利用すると次式が得られる．

$$\gamma(0) = \phi\gamma(1) + \sigma^2 + \psi(\phi+\psi)\sigma^2 \tag{7}$$

同様にして，両辺に y_{t-1} をかけて期待値をとると

$$E[y_t y_{t-1}] = \phi E[y_{t-1}^2] + E[\varepsilon_t y_{t-1}] + \psi E[\varepsilon_{t-1}y_{t-1}] \tag{8}$$

さらに整理すると

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) + \psi\sigma^2 \tag{9}$$

また同様にして，$j \geq 2$ の自己共分散関数 $\gamma(j)$ については $\gamma(j) = \phi^{j-1}\gamma(1)$ という関係式が得られる．

以上を整理すると ARMA(1,1) 過程の自己共分散関数 $\gamma(j)$ は次のようになる．

$$\gamma(j) = \left\{ \begin{array}{c} \sigma^2\frac{1+2\phi\psi+\psi^2}{1-\phi^2}; j=0 \\ \sigma^2\frac{(\phi+\psi)(1+\phi\psi)}{1-\phi^2}; j=1 \\ \phi^{j-1}\gamma(1); j \geq 2 \end{array} \right. \tag{10}$$

式 (10) をみるとラグ j の増加に対して自己共分散関数 $\gamma(j)$ が指数的に減衰することが確認できる．この性質は短期記憶性と呼ばれ，これが ARMA モデルを用いたとき，遠い過去の値との相関を考慮することができない原因である．なおこの性質は (1,1) 次の ARMA モデルに限らず，ARMA(p,q) モデル全般に共通する性質である．

これまで時系列データのに定常性を仮定してきたが，観測された時系列において平均値が時間的に変化するような非定常性がみられる場合，ARMA モデルを用いるのは適当ではない．Box-Jenkins 法では，このようなデータに対しては，まず定常過程に従うとみなせるまで原系列の差分をとり，その後，差分データに ARMA モデルを当てはめることを推奨している．このようなモデルを ARIMA モデルと呼び，次式で表す．

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \Psi(L)\varepsilon_t \tag{11}$$

ただし，差分パラメータ d は自然数であり，$d=0$ のとき ARMA モデルに一致する．しかしながら，ARIMA モデルは依然として短期記憶モデルであり，指数関数よりも緩やかに減衰する自己相関を表現できないという限界を抱えている．さらに，Granger は原系列の差分をとるとデータの低周波（長期周期）成分が刈り取られて情報が失われてしまう過剰差分の状態に陥る危険があると警告している[8]．

(2) ARFIMA モデルと長期記憶性

3.(1) でみてきたように，短期記憶モデルにおける問題点は自己共分散関数が指数的に減衰することにあった．また ARMA モデルを拡張した ARIMA モデルの欠点は，差分作用素 $(1-L)^d$ を原系列に作用させると，低周波の波が刈り取られる，過剰差分が起こり得ることであった．そこでこれらの問題点を克服し，長期記憶性をもつ可能性のある時系列データを表現できるパラメトリックモデルとして，ARFIMA モデルが Granger と Joyeux[8] および Hosking[9] によって提案された．ARFIMA モデルの特徴は差分パラメータ d を整数から任意の実数に一般化し，過剰差分を回避することにある．具体的には，ARFIMA モデルは以下のように定式化される．

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \Psi(L)\varepsilon_t \tag{12}$$

ここで，$(1-L)^d$ は実数差分作用素であり，次の二項級数展開によって定義される．

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} (-L)^j \tag{13}$$

ここで，d は任意の実数，j は非負整数し，式 (13) は一般化された二項係数

$$\begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} = \frac{d(d-1)\cdots(d-j+1)}{j(j-1)\cdots 1} \tag{14}$$

$$= \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d-j+1)} \tag{15}$$

を用いて表現できる．ただし，$\Gamma(x)$ はガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{16}$$

を意味する．なお，長期記憶過程の定常性条件は，

$$0 < d < \frac{1}{2} \tag{17}$$

で表される．系列がこの条件を満足するとき，反転可能である．

ここで，ARFIMA モデルが長期記憶モデルであることを確認するために，自己相関関数 $\rho(j)$ の性質について調べる．ARFIMA(p,d,q) モデルの自己相関関数は非常に複雑であり，その導出は容易ではない．しかし，ARFIMA モデルの長期記憶性については，自己相関関数の漸近特性がわかればその特徴を十分に把握できる．スペクトル密度関数を用いて自己共分散関数を導くことによって，$j \to \infty$ とした場合の近似的な自己相関関数は次のように表せる．

$$\rho(j) \approx \frac{1-2d}{\pi^{1-2d}}\sin(d\pi)j^{2d-1} \tag{18}$$

ここでラグ j のべきに注目すると，$0 < d < 1/2$ のとき自己相関関数が指数関数より遅い速度で 0 に収束することが確認できる．この減衰の遅さによって ARFIMA モデルは系列の長期記憶性を表現する．また，式 (18) をみると ARMA 過程の係数が現れていないことがわかる．このことは，ARFIMA(p,d,q) 過程の自己相関関

数の漸近特性は，基本的には ARFIMA$(0,d,0)$ 過程によって決まることを示している．

自己相関関数の 0 への収束速度の違いにより長期記憶性の有無を分類するには，自己相関関数 $\rho(j)$ の総和が絶対収束するか否かで判断できる．すなわち，

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\rho(j)|<\infty \tag{19}$$

が成り立つ場合を短期記憶過程，

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\rho(j)|=\infty \tag{20}$$

が成り立つ場合を長期記憶過程と呼ぶ．

(3) ARFIMAX-GARCH モデル

外生変数を付加した ARFIMA モデルを ARFIMAX モデルと呼ぶ．ARFIMAX モデルの一般形は，

$$\Phi(L)(1-L)^{d_y}y_t-(1-L)^{d_x}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma}=\Psi(L)\varepsilon_t \tag{21}$$

と表せる．ここで，$\boldsymbol{x}_t=(x_t^1,\cdots,x_t^K)$ は外生変数行ベクトル，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_K)'$ はパラメータ列ベクトルである．記号「$'$」は行列の転置操作を表す．本研究では，交通量や降雨といった影響についても分析するために，それらの情報も外生変数 $\boldsymbol{x}$ に含めることとする．

また，ARMA モデルと同様に ε_t は正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ に従う確率誤差項である．すなわち，得られる観測値 y_t の分散は時間によらず一定という仮定がされている．確率誤差項 ε_t が GARCH 過程に従うとみなすことによって，分散の時間変動を考慮できるモデルへ拡張する．これを数式で表現すると，

$$\varepsilon_t^2\sim\mathcal{N}(0,\sigma_t^2) \tag{22a}$$

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \tag{22b}$$

となる．ただし，α_j および β_j は GARCH(r,s) 過程の係数を表す．なお，GARCH 過程に対しては，誤差項の分散 σ_t^2 が常に正であるために，$\alpha_j\geq 0\ (j=0,\cdots,r)$，$\beta_j\geq 0\ (j=1,\cdots,s)$ の仮定を設ける．ここで，式 (21) で表される ARFIMAX モデルにおいて，確率誤差項 ε_t が GARCH 過程に従うモデルを ARFIMAX-GARCH モデルと呼び，本研究ではこのモデルを利用する．

4. モデルの推計手法

(1) モデルの定式化

時点 t において，モニタリングによって得られた観測値 y_t を ARFIMAX-GARCH モデルを用いて次のように定式化する．

$$\Phi(L)y_t-\left(a+bt+\sum_{j=1}^{K}(1-L)^{d_{x^j}}\gamma_j x_t^j\right)$$

$$=\Psi(L)(1-L)^{d_\varepsilon}\varepsilon_t \tag{23a}$$

$$\varepsilon_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma_t^2) \tag{23b}$$

$$\beta(L)\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha(L)\varepsilon_t^2 \tag{23c}$$

ここで，次式で定義される ARCH 作用素 $\alpha(L)$ および GARCH 作用素 $\beta(L)$

$$\alpha(L)=\alpha_1L+\alpha_2L^2+\cdots+\alpha_pL^p \tag{24}$$

$$\beta(L)=1-\beta_1L-\beta_2L^2-\cdots-\beta_qL^q \tag{25}$$

を用いることによって GARCH 過程を表現し直している．a,b はそれぞれ定数であり，$a+bt$ によって時系列の平均および 1 次のトレンド成分をあらかじめ除去しておく．また，説明変数 x_t^j に実数差分作用素 $(1-L)^{d_{x^j}}$ を適用することによって，交通量や降水量といったそれぞれの劣化因子の長期記憶性をモデル内で表現する．一方で，対象部材の劣化因子すべてを取り上げ，説明変数に加えることは現実的ではない．そこで，説明変数として考慮できない劣化因子は確率誤差項 ε_t が受けもつと仮定し，その長期記憶性を実数差分作用素 $(1-L)^{d_\varepsilon}$ を用いることによって表現する．

(2) 長期記憶モデルの推計手法

本研究で使用する ARFIMAX-GARCH モデルの推計法を説明する前に，まず ARFIMA モデルの推計法について整理する．伝統的な時系列モデルとは異なり，ARFIMA モデルでは実数差分パラメータ d も推計の対象となるが，そのパラメトリックな推計法として，Geweke らによって GPH 法が開発された．この方法は，まず実数差分パラメータの推定値 $\hat{d}$ を求め，実数差分作用素 $(1-L)^{\hat{d}}$ によって時系列を定常化した後，通常の時系列分析法で AR 係数および MA 係数を推計する 2 段階推計法である．しかし，実数差分パラメータと AR，MA 係数は無相関ではないため，このような段階推計法は望ましくない．

Sowell は最尤法を用いて実数差分パラメータと AR，MA 係数を同時推計する方法を提案した．しかし，尤度関数を最大化するのは容易ではなく，計算負荷が大きくなるという難点がある．そこで，計算負荷を軽減する計算法として近似尤度を用いる CCS 法（Conditional Sum of Squares）が Robinson によって提案された[12]．

しかしながら，本研究で用いる ARFIMAX-GARCH モデルは多数の未知パラメータを含みかつ非線形性が強いため，最尤法を用いた推計は困難である．そこで，MCMC 法（Markov Chain Monte Carlo）を利用したベイズ推定法によってパラメータの同時推計を試みる．

いま，すべての未知パラメータの集合を $\boldsymbol{\Theta}=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ と表す．なお，$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\cdots,\phi_p)$，$\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\cdots,\psi_q)$，$\boldsymbol{d}=(d_\varepsilon,d_{x^1},\cdots,d_{x^K})$，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ である．また，観

測時系列を $\boldsymbol{Y} = (y(1), \cdots, y(T))'$ にまとめる．このとき，観測時系列と説明変数を既知とした未知パラメータ集合の同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ はベイズの定理

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}) \qquad (26)$$

を通じて，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta})$ と尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\Theta})$ により表すことができる．

ARFIMAX-GARCH モデルの尤度関数は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta}) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_t^2}} \exp\left(-\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{2\hat{\sigma}_t^2}\right) \qquad (27)$$

と定義される．ただし，

$$\hat{\varepsilon}_t = G_y(L)y_t - G_a(L)(a + bt) \qquad (28a)$$

$$-\sum_{j=1}^{K} G_j(L)\beta^j x_t^j \qquad (28b)$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \beta(L)^{-1}\alpha_0 + G_\beta(L)\hat{\varepsilon}_t^2 \qquad (28c)$$

である．なお，

$$G_y(L) = \frac{\Phi(L)}{\Psi(L)}(1 - L)^{-d_\varepsilon} \qquad (29a)$$

$$G_a(L) = \Psi(L)^{-1}(1 - L)^{-d_\varepsilon} \qquad (29b)$$

$$G_j(L) = \Psi(L)^{-1}(1 - L)^{d_{xj} - d_\varepsilon} \qquad (29c)$$

$$G_\beta(L) = \frac{\alpha(L)}{\beta(L)} \qquad (29d)$$

としている．また，$y_t = 0$ $(t < 0)$ とする．

次に，事前確率密度関数を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}) \\ &\cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\psi}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{d}_0}) \\ &\cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}) \end{aligned} \qquad (30)$$

と設定する．なお，左下添え字 0 はハイパーパラメータであることを表す．以上から，同時事後確率密度関数は式 (26) に式 (27) と式 (30) を代入することにより得る．しかしながら，式 (27) と式 (30) により表される同時事後確率密度関数は非常に複雑であり確率密度関数を陽的に導出することができない．そこで本研究では，MH（Metropolis-Hastings）法を基本としたマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション法を利用することによって同時事後確率密度関数を求める．

(3) 同時事後確率密度関数の推計

ARFIMAX-GARCH モデルの同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ を求めるために，条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリングを用いる．ここでは未知パラメータ集合 $\boldsymbol{\Theta}$ を外生変数パラメータブロック $\boldsymbol{\gamma}$，AR 係数ブロック $\boldsymbol{\phi}$，MA 係数ブロック $\boldsymbol{\psi}$，実数差分パラメータブロック $\boldsymbol{d}$，ARCH 係数ブロック $\boldsymbol{\alpha}$，GARCH 係数ブロック $\boldsymbol{\beta}$ の 6 つのブロックに分割し，他のブロックのパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数に基づくランダムサンプリングの繰り返しにより同時事後確率密度関数を算出する．

以下に具体的な推計手順を示す．

ステップ 1 事前分布のパラメータ値 $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}, \boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{d}_0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\psi}_0}, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}$ を任意に設定する．本研究では無条件事前分布に近くなるよう分散共分散のパラメータ値を大きく設定する．また，未知パラメータ $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ の初期値 $\boldsymbol{\Theta}^{(0)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(0)}, \boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\psi}^{(0)}, \boldsymbol{d}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\beta}^{(0)}]$ を任意に設定する．初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れる．また，定常状態に収束した後のサンプリングとは無関係である．

ステップ 2-1 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}, \boldsymbol{\psi}^{(i-1)}, \boldsymbol{d}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-2 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\psi}^{(i-1)}, \boldsymbol{d}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-3 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{d}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-4 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{d}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-5 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{d}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-6 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{d}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 3 十分大きな $\underline{i}$ に対して $i > \underline{i}$ ならば $\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = (\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{d}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)})$ を記録する．

ステップ 4 $i = \bar{i}$ ならば計算を終了する．$i < \bar{i}$ ならば $i = i + 1$ とし**ステップ 2** へ戻る．

十分大きな $\underline{i}$ に対して，このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば，ギブスサンプリングによる $\boldsymbol{\Theta}(i = \underline{i}+1, \underline{i}+2, \cdots, \bar{i})$ のサンプリングにより，式 (26) に示した同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ からのサンプルを求めることができる．したがって，ギブスサンプリングによって得られる標本 $\boldsymbol{\Theta}(i = \underline{i}+1, \underline{i}+2, \cdots, \bar{i})$ を用いて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算するこ

とが可能となる．ただし，**ステップ 2** で利用する条件付き事後確率密度関数からは直接にランダムサンプリングすることができない．

(4) 条件付き事後確率密度関数からのサンプリング

直接サンプリングできない条件付き事後確率密度関数からの標本を得るために MH 法を用いる．具体的には **4.(2)** で示したギブスサンプリングの**ステップ 2** における確率分布からのサンプリングに対してランダムウォーク MH 法適用する．ここで，外生変数に対するパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\psi}^{(i)},\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ からのサンプリングについて説明するが，他の未知パラメータの推計に関しても同様に行う．ランダムウォーク MH 法では i 回目の標本の候補 $\boldsymbol{\beta}'$ を次のようにして定める．

$$\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}^{(i-1)} + \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{\nu}) \tag{31}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\cdots,\nu_s)$ はステップ幅を定めるパラメータベクトルである．i 回目の候補 $\boldsymbol{\beta}'$ が受容される確率は，

$$p_\beta(\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}) = \min\left(\frac{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}'|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\psi}^{(i)},\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\psi}^{(i)},\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})}, 1\right) \tag{32}$$

と定義できる．実際の数値計算では区間 [0,1] で定義される一様分布 $\mathcal{U}$ から，一様乱数 $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ を発生させ，$\beta^{(i)}$ を以下のルールに従い決定する．

$$\beta^{(i)} = \begin{cases} \beta^{(i-1)} \ ; \ u > p_\beta \\ \beta' \ ; \ u \le p_\beta \end{cases} \tag{33}$$

以上は **4.(2)** における**ステップ 2-6** に相当する．

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ に関する推計値を決定することができる．いま，MCMC 法により得られた標本を $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\psi}^{(i)},\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{\beta}^{(i)}] = [\vartheta_1^{(i)},\vartheta_2^{(i)},\cdots,\vartheta_K^{(i)}]$ と表すこととする．このうち，最初の $\underline{i}$ 個の事後分布への収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．その上で，パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{i}+1,\cdots,\bar{i}\}$ と定義する．このとき，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の同時確率分布関数 $G(\boldsymbol{\theta})$ は

$$G(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\#(\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \le \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M})}{\bar{i} - \underline{i}} \tag{34}$$

と表すことができる．ただし，$\#(\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \le \boldsymbol{\theta}, i \in \mathcal{M})$ は論理式 $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \le \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である．また，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\vartheta})$ は，

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta}) = (\tilde{\zeta}(\vartheta_1),\cdots,\tilde{\zeta}(\vartheta_K))$$

$$= \Big(\sum_{i=\underline{i}+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_1^{(i)}}{\bar{i}-\underline{i}},\cdots,\sum_{i=\underline{i}+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_K^{(i)}}{\bar{i}-\underline{i}}\Big) \tag{35}$$

と表される．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の信用区間を定義できる．$100(1-2\kappa)$% 信用区間は，標本順序統計量 $(\underline{\vartheta}_k^\kappa, \overline{\vartheta}_k^\kappa)$ $(k = 1,\cdots,K)$

$$\underline{\vartheta}_k^\kappa = \arg\max_{\vartheta_k^*} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \le \vartheta_k^*, i \in \mathcal{M})}{\bar{i}-\underline{i}} \le \kappa \right\} \tag{36a}$$

$$\overline{\vartheta}_k^\kappa = \arg\min_{\vartheta_k^{**}} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \ge \vartheta_k^{**}, i \in \mathcal{M})}{\bar{i}-\underline{i}} \le \kappa \right\} \tag{36b}$$

を用いて $\underline{\vartheta}_k^\kappa < \theta_k < \overline{\vartheta}_k^\kappa$ と定義できる．

MCMC 法では，初期パラメータ値 $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない．発生させた $\bar{i}$ 個のサンプルが不変分布からの標本であるか否かは Geweke 検定により判断することができる[10)−11)]．ここで，ϑ の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\theta_k}| \le z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\theta_k}| > z_{\psi/2} \end{cases} \tag{37}$$

と設定する．ただし，$z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である．有意水準 ψ% で帰無仮説を仮説検定する場合，$z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$ を満足する値として定義できる．ただし，$\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である．

5. おわりに

本研究では，モニタリングデータの分析に対して長期記憶性を導入する意義を示し，モニタリングデータを ARFIMAX-GARCH モデルを用いて表現するとともに，その推計手法を提案した．今後の課題として，早期異常検知，あるいは詳細点検実施時期の決定のための統計的意思決定アルゴリズムの開発を行う必要があると考えられる．なお，講演会当日には，実供用中の高速道路橋の継手で獲得されたモニタリングデータへの適用を通して，本研究の有効性を実証的に検証した事例を紹介する．

参考文献

1) 小林潔司：分権的ライフサイクル費用評価と集計的効率性，土木学会論文集，No.793/IV-68，pp.59-71，2005.
2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.
3) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
4) 貝戸清之，保田敬一，小林潔司，大和田慶：平均費用法に基づいた橋梁部材の最適補修戦略，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.83-96，2005.
5) 小林潔司，貝戸清之，松岡弘大，坂井康人：時系列モニタリングデータを用いた長期劣化進行モデリング，土木学会論文集 F，Vol.70，No.3，pp91-108，2014.
6) 貝戸清之，松岡弘大，坂井康人，川上順子，荒川貴之，金川昌弘，小林潔司：アセットマネジメントへの適用を見据えた路車間無線通信モニタリング，応用力学論文集，土木学会，Vol.13，pp.1017-1028，2010.
7) Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, 1970.
8) Granger, C.W.J. and Joyeux, R.: An introduction to long-range time series models and fractional differencing, Jounal of Time Series Analysis, Vol.1, pp.15-30, 1980.
9) Hoskins, J.R.M.: Fractional differencing, Biometrika, Vol.68, pp.165-176, 1981.
10) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
11) Newey, W. K. and West, K. D.: A Simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation coisistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708,1987.
12) Arteche, J. and Robinson, P.M.: Semiparametric inference in seasonal and cyclical long memory processes, Journal of Time Series Analysis, Vol.21, pp.125, 2000.

(2015.4.24 受付)

DETRERIORATION PREDICTION OF JOINT MEMBERS ON HIGHWAY BRIDGES WITH LONG MEMORY EFFECT MODEL

Naoki KITAURA, Kosuke KAZUMI, Kiyoyuki KAITO, Kiyoshi KOBAYASHI