

空間集積パターンの周波数解析

大澤実¹・赤松隆²・高山雄貴³

¹学生員 東北大学大学院 情報科学研究科 博士後期課程 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-06) osawa@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院 教授 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-06) akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学大学院 助教 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-06) takayama@civil.tohoku.ac.jp

Christaller¹⁾, Lösch²⁾ による中心地理論の結論の一つとして“各々の産業は、その固定費用等によって定まる固有の広さの市場圏を持つ”というものがある。この性質を仮定すると、それぞれの産業内における都市への空間的立地パターンは各産業毎に一定の周期を持つことになる。都市規模のパターンは、様々な産業の周期的な立地パターンの重ね合せと見做せる。従って、逆に都市規模のパターンが与えられれば、周波数解析によってその背後にある各産業の空間的周期に関する情報を抽出可能だと期待できる。本研究では多産業 NEG モデルの均衡立地パターンを例に、簡単な周波数解析によって一定の解釈が可能な結果が得られることを示す。

Key Words : central place theory, agglomeration, agglomeration shadow, spectral analysis

1. はじめに

人口・経済活動の空間的な分布には様々な実証的規則性が存在することが知られている。最も顕著かつよく知られた規則性は都市規模分布の冪乗則(規模・順位則)であろう。更に近年, Mori et al.³⁾ によって, Number-Average Size (NAS) 則という全く新しい実証的規則性の存在が明らかにされている。これらの実証的規則性:

- (a) 都市規模分布の冪乗則 / 規模・順位則
- (b) Number-Average Size (NAS) 則

は、長い期間に渡って持続してきた頑健な規則性であることから、国土計画上の制約条件となる可能性が高く、その成立メカニズムの理解が必要である。

都市規模分布の冪乗則は古くから知られており、説明する試みは数多いが、そのなかでも確率的成長モデル⁴⁾が広く受け入れられてきた。一方で全く異なるアプローチとして、Hsu⁵⁾は中心地理論^{1),2)}の発想に基づく確定論的な経済モデルによって都市規模分布の冪乗則を説明付けている。具体的には、Hsu のモデルでは以下のような中心地理論的な精神が表現されている:

- (c) 産業固有の市場圏: ある産業の市場圏は、その産業を特徴付ける規模の経済の大きさ・需要量と交通費用のトレード・オフにより、各々の産業に応じた固有の広さを持つ。換言すれば、各々の産業が存在する都市は均質空間上では均等な間隔(“空間周期”)で隔てられる。
- (d) 産業立地の階層原理: ある産業が立地している都市には、その産業より下位の(i.e., 市場圏がより狭い / 空間周期がより短い)産業も立地する。

本稿では、以上の実証的・理論的な性質(a),(b),(c),(d)をあわせて“中心地法則性”と呼ぶ。

古典的な中心地理論は、市場メカニズムによる基礎付けが存在しないことによって、過去には経済学者によって幾何学的考察のみに頼る理論であると批判された。従って上述の(c),(d)も非現実的であるとして批判されてきた。しかし現在では、この状況は一変している。まず、新経済地理学(New Economic Geography; NEG)の台頭によって、産業立地の階層原理にミクロ経済学的基础付けが与えられた^{6),7)}。また、二次元平面の単一産業のNEGモデルの均衡解においてLöschの六角形パターンが創発することが数学的に証明された⁸⁾。従って、中心地理論に向けられた主たる批判—幾何学的考察のみに基づく、ミクロ経済学理論と整合的でないトイ・モデルであるという批判—はもはや妥当とは言えない。

赤松ら⁹⁾は、NEGの枠組みを更に推し進めることにより、中心地法則性(a)~(d)を全て同時に説明し得る確定論的枠組みを提示している。赤松らは、規模の経済の大きさによって差別化された非常に多数の産業が存在する多産業NEGモデルの均衡状態において、都市規模分布が冪乗則に従うこと・NAS則が創発することを系統的な数値実験により示している。更にこの均衡状態においては、産業が各々の規模の経済に応じた固有の市場圏(=空間周期)をもち、産業立地の階層原理が成立することを確認している。従って、このモデルもHsuのものと同様、(c),(d)による冪乗則の基礎付けと解釈できる。Hsu及び赤松らの方法は、Beckmann¹⁰⁾の中心地理論を用いた素朴な冪乗則の説明の現代版と

言える。ただし、NEG モデルにおいて、周期的な立地パターンが創発することが解析的に証明されているのは単一産業モデルにおいて^{例えは¹¹⁾}のみである。多産業 NEG モデルの数値解において、どのような空間周期がどの程度創発しているのか知る方法は解を直接目視するほかない。多産業 NEG モデルを用いたアプローチにより、中心地法則性に対する統一的理解を期待できることからすると、不満が残る状況と言える。

以上の背景のもと、本研究では、多産業が存在する立地パターンが与えられた際に、そのパターンに含まれる空間周期の特徴について定量的評価を与える手法を開発することを目的としている。上述のよう、多産業モデルの立地パターンが与えられた場合が念頭にある。しかし、本研究の考え方をより洗練させることにより、産業立地の空間周期に着目した実証分析も可能であると期待している。本研究では、空間周期の分析のための具体的な方法として Fourier 解析を用いる。与えられた適当な立地パターンが中心地理論と整合的であれば、その立地パターンは産業毎の周期的な立地パターンの重ね合せとして表現される筈である。Fourier 解析は与えられた信号を独立な周期信号に分解する方法論であるから、立地パターンを信号と見做して Fourier 解析を適用することによって、存在する空間周期及びその立地パターンに対する寄与度合いに関する情報を抽出できると考えられる。

本概要の構成は次の通りである。2. では状況設定、具体的手法、分析対象とする立地パターンについて説明する。3. では、実際に各手法を多産業の立地パターンに適用した結果を述べる。4. は本稿のまとめである。

2. 分析手法と対象とするデータ

(1) 分析手法

最も単純な空間構造として 1 次元の離散空間を考え、その上での立地パターンを対象とする。具体的には、単位円周上に $C \equiv \{0, 1, \dots, N-1\}$ なる N 箇所の立地点(都市)が等間隔に時計回りに配置された空間を考える。適当な単位で測った各都市 $c \in C$ における“立地企業数”を x_c とし、 x_c をまとめた N 次元の立地パターン $\mathbf{x} \equiv [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ を考える。

本研究では、与えられた立地パターン \mathbf{x} に含まれる空間周期を分析するためにパワー・スペクトル $S(\omega)$ 、及び自己相関列 $r(d)$ を用いる。単位円周上に配列された都市を考えるため、 \mathbf{x} は周期 N の周期的信号と見做すことができる。このような信号に対するパワー・スペクトルは

$$S(\omega) \equiv \frac{1}{N} X(\omega) X^*(\omega) \quad \omega = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

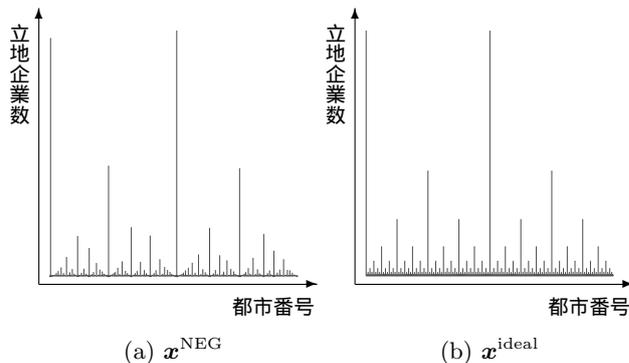


図-1 \mathbf{x}^{NEG} と $\mathbf{x}^{\text{ideal}}$ の空間的パターン

ただし、 $X(\omega)$ は

$$X(\omega) \equiv \sum_{c=0}^{N-1} x_c e^{-i(2\pi c/N)\omega} \quad \omega = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

で定義される \mathbf{x} の離散 Fourier 変換であり、 X^* は X の複素共役である。また、自己相関列は

$$r(d) \equiv \frac{1}{N} \sum_{c=0}^{N-1} x_c x_{c-d} \quad d = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

で与えられる。なお、(3) において $x_{c-d} \equiv x_{c-d \bmod N}$ とする。

パワー・スペクトル $S(\omega)$ は、周波数が ω の信号の強度を表現する指標である。また自己相関列 $r(d)$ は、与えられた信号に周期 d の成分がどれだけ含まれているかを表現する指標である。従って立地パターンに適用すれば、 $r(d)$ は空間周期 d の、 $S(\omega)$ は空間周期の逆数である“空間周波数” ω の特徴を把握するための指標となり得る。よく知られているよう、 $S(\omega)$ 及び $r(d)$ は Fourier 変換対であるため、各々が持っている情報自体は等価である。

(2) 対象とするデータ

本稿では円周上における 2 種類の立地パターン \mathbf{x}^{NEG} 及び $\mathbf{x}^{\text{ideal}}$ を考える。 \mathbf{x}^{NEG} は、赤松ら⁹⁾ と同一の多産業 NEG モデルの均衡解として求めた立地パターンである。都市数は $N = 512$ とし、産業数は 512 とした。なお、各々の都市は全く均質である。また、 $\mathbf{x}^{\text{ideal}}$ は、 \mathbf{x}^{NEG} と比較するベンチマークとする理想的パターンであり、追って説明する。

主たる興味の対象は \mathbf{x}^{NEG} である。 \mathbf{x}^{NEG} の特性を確認しておく。 \mathbf{x}^{NEG} の空間的パターンを図-1(a) に示す。2 つの大都市が均等間隔に存在し、それらの都市の中間地点に 2 つの中規模の都市、さらにそれらの中間地点に 4 ないし 5 つのより小規模の都市、…… のよう、入れ子状に異なる規模の都市が存在する様子が観察できる。この立地パターンにおいては、産業立地の階層原理が(ほぼ)厳密に成立することが図-2 を用いて観察で

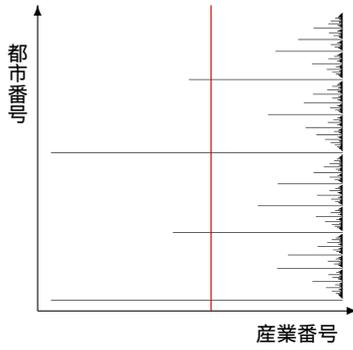


図-2 階層原理の成立状況

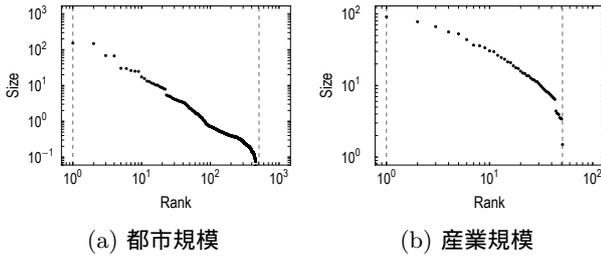


図-3 都市規模及び産業タイプ規模の規模・順位プロット

きる。図-2は、横軸に産業番号・縦軸に都市番号をとり、産業*i*が都市*c*に立地していれば(*i, c*)に点を描画するという規則で描画した散布図である。図-2から見て取れるよう、(*i, c*)に点が存在すれば*j > i*なる(*j, c*)にも点が存在する。産業番号は規模の経済が大きい順(=市場圏が広い/空間周期が長い順)に割り振ってあるため、*i*より下位の産業が全て*c*に立地していることになる。これは産業立地の階層原理である。また図-2において縦方向に見れば、それぞれの産業が各々固有の空間周期に従って立地していることがわかる。例えば、図中赤線に示した産業の立地都市数(i.e., 空間周波数)は4であり、空間周期はおおよそ $512/4 = 128$ である。図-2と図-1(a)を比較することにより、都市サイズの階層構造は産業立地の階層構造が直接反映された結果であることが推測される。 x^{NEG} を都市規模順に並べ、順位・規模の組合せを両対数グラフ上にプロットすると図-3(a)のように線形となり、 x^{NEG} は都市規模分布の冪乗則を満足する。以上より、 x^{NEG} は、1.で述べた全ての中心地法則性を満足する¹。更に興味深いことには、空間周波数毎に産業をタイプに分類し、各々のタイプの規模(企業数の合計)に関する規模・順位関係を両対数グラフ上にプロットしても対数線形となる部分があることもわかる(図-3(b))。

さて、 x^{NEG} は上述のように顕著な階層的規則性を示す立地パターンであるが、図-2をよく観察すると理解

¹ 階層原理が成立するもとはNAS則と都市規模分布の冪乗則は等価である³⁾。

されるよう、中心地理論が提唱する理想的なパターンとは一致していない。具体的には、産業の空間周波数が2, 4, 8のよう、2の冪乗で増えていくのではなく、不均等なパターンが現われている。これは数値実験による均衡解であるため避け得ない状態である。このような不規則性を与える影響を調べるため、不規則性がないベンチマーク的立地パターンとして x^{ideal} を導入する。具体的には、 x^{NEG} の基本的な特徴を再現するため、空間周波数が 2^k ($k = 1, 2, \dots, \log_2 N = 9$)である立地パターン y_k の線形結合として

$$x^{ideal} = \sum_{k=1}^9 \lambda_k y_k \quad (4)$$

と定義する。なお、 $\{\lambda_k\}$ は結果としての都市規模分布がおおよそ x^{NEG} と一致するよう定めた。 x^{ideal} の空間的パターンは、図-1(b)に示した通りである。 x^{NEG} と比較して、階層構造が厳密に成立するパターンであることが見て取れよう。

3. 分析結果

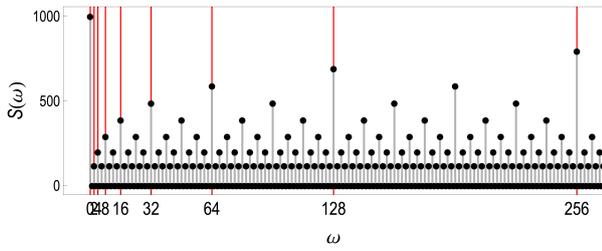
(1) パワー・スペクトルによる分析

本節では、パワー・スペクトルによって x^{ideal} 及び x^{NEG} のそれぞれを分析し、空間周波数 ω の強度に関する情報を抽出することを試みる。立地パターン x^{ideal} 及び x^{NEG} についてパワー・スペクトル $S(\omega)$ をそれぞれ計算した結果を図-4に示す。図中赤線で示したのは $\omega = 0$ 及び $\omega = 2, 2^2, \dots$ である。まず、図-4(a)は x^{ideal} に対するパワー・スペクトルであるが、 x^{ideal} が楕円形信号の線形和であることから予期される通り、立地パターンの性質がそのまま反映された形となっている。具体的には図-4(a)からは、 2^k ($k = 1, 2, \dots, 8$)パターンが突出していることが理解できる。従って、この立地パターンが 2^k ($k = 1, 2, \dots, 9$)の空間周期からのみ構成されていることが明確に現われている。

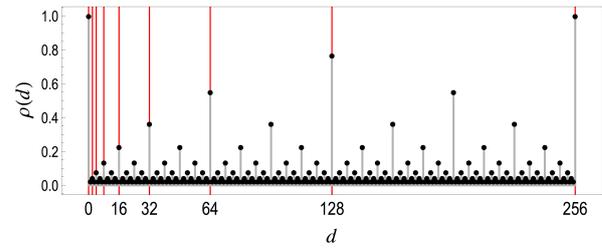
さて、同様に x^{NEG} の $S(\omega)$ を計算した結果を図-4(b)に、またそのうち $\omega = 0, 1, \dots, 64$ の部分の拡大図を図-4(c)に示す。図-4(b)からは、図-4(a)に見られるような明確な規則性は見て取れない。しかし図-4(c)において2, 4, 8が図-4(a)同様突出しているのを見て取ることができる。図-1(a)及び図-2を見ると、空間周波数が明瞭に見て取れるのは実際には $\omega = 2, 4$ までであることがわかるため、これは妥当な結果であると言えよう。

(2) 自己相関列による分析

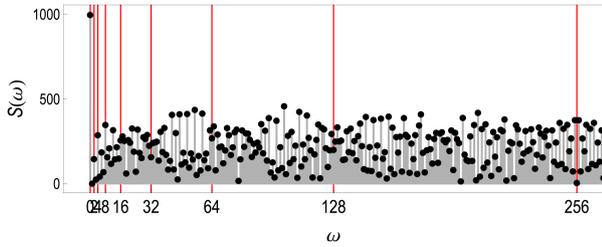
本節では、自己相関関数によってそれぞれの空間周期*d*が立地パターンにどれだけ存在するかに関する情報を抽出することを試みる。本節の分析では、 $r(d)$ の最大値を1に規格化した、正規化された自己相関列を



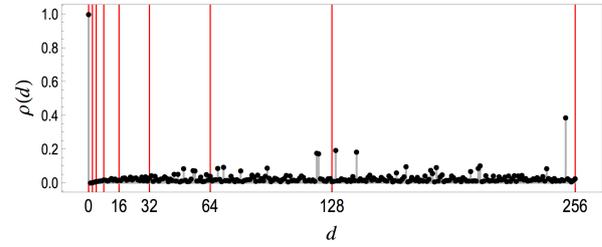
(a) x^{ideal} のパワー・スペクトル



(a) x^{ideal} の自己相関列

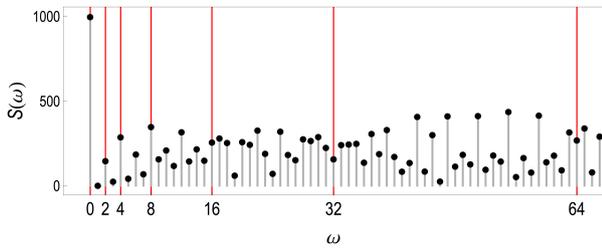


(b) x^{NEG} のパワー・スペクトル



(b) x^{NEG} の自己相関列

図-5 自己相関列



(c) x^{NEG} のパワー・スペクトル (部分)

図-4 パワー・スペクトル

用いる：

$$\rho(d) \equiv \frac{r(d)}{r(0)} \quad d = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

図-5 に、 x^{ideal} 及び x^{NEG} のそれぞれに対する正規化された自己相関列 $\rho(d)$ を示す。図-4 と同様、図中赤線で示したのは 0 及び $2, 2^2, \dots$ の空間周波数 ω である。図-5(a) に示した x^{ideal} の $\rho(d)$ については、パワー・スペクトルと同様、完全な規則性を示す。具体的には、 $\omega = 2, 4, 8, \dots, 256$ にそれぞれ対応する空間周期である $d = 256, 128, \dots, 2$ にピークが見える。一方、図-5(b) に示した x^{NEG} の $\rho(d)$ は、空間周波数 $\omega = 2, 4, 8$ に対応する空間周期である $d = 256, 128, 64$ 付近に重みが集中している様子を観察できる。 x^{NEG} の $\rho(d)$ について見てみると、 $S(\omega)$ のように厳密に 2 の累乗にピークが見えるわけではないものの、空間周期に関する情報を抽出する上で頑健であるとみられる。 $S(\omega)$ の値には ω の約数となる全ての $\hat{\omega}$ の値が重なっていることから、意味解釈に注意する必要があるが、自己相関列の場合は直観的意味が明らかであることも利点である。

4. おわりに

本研究では、Fourier 解析を用いた立地パターンの分析を試みた。その結果、少なくとも念頭に置いている多産業 NEG モデルの分析については、どれだけ周期性が成立するか・どのような主要な周期が存在するかを予期した通り定量化できることがわかった。課題としては、ノイズに総じて弱いとみられ、より頑健な手法が望まれる。意味解釈の上では“産業の規模”へのより直接的な関係づけが必要である。特に、産業の規模も図-3(b) に示したよう冪乗則的であることがから、この点については強い興味がある。また、1 次元円周都市システムという極めて単純化された空間上での分析である。現実世界のような不均質な空間への拡張においては一般的なグラフ上での信号処理¹²⁾に基づく手法の構築が求められる。これは更に次のステップの課題である。

謝辞： 本研究は日本学術振興会・科学研究費補助金・特別研究員奨励費(課題番号 26-291)の助成金を受けた研究の一部である。ここに記し、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*. Gustav Fischer, Jena (English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966), 1933.
- 2) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*. Gustav Fischer, Jena (English translation: *The Economics of Location*, Yale University, New Haven, 1954), 1940.
- 3) Mori, T., Nishikimi, K. and Smith, T. E. : The

- number-average size rule: A new empirical relationship between industrial location and city size, *Journal of Regional Science*, Vol. 48, No. 1, pp. 165–211, 2008.
- 4) Simon, H. A. : On a class of skew distribution functions, *Biometrika*, Vol. 42, No. 3/4, pp. 425–440, 1955.
 - 5) Hsu, W.-T. : Central place theory and city size distribution, *The Economic Journal*, Vol. 122, No. 563, pp. 903–932, 2012.
 - 6) Fujita, M., Krugman, P. R. and Venables, A. J.: *The spatial economy: cities, regions and international trade*, Vol. 213, Wiley Online Library, 1999.
 - 7) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. : A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol. 69, No. 2, pp. 240–252, 2011.
 - 8) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T. and Takayama, Y. : Self-organization of hexagonal agglomeration patterns in new economic geography models, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 99, pp. 32–52, 2014.
 - 9) 赤松隆, 森知也, 高山雄貴 : 新経済地理学モデルにおける中心法則性の創発, 応用地域学会研究発表大会, 2011.
 - 10) Beckmann, M. J. : City hierarchies and the distribution of city size, *Economic Development and Cultural Change*, Vol. 6, No. 3, pp. 243–248, 1958.
 - 11) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1729–1759, 2012.
 - 12) 田中雄一 : グラフ信号処理のすゝめ, *IEICE ESS Fundamentals Review*, Vol. 8, No. 1, pp. 15–29, 2014.

(2015.4.24 受付)

FOURIER ANALYSIS OF SPATIAL AGGLOMERATION PATTERNS

Minoru OSAWA, Takashi AKAMATSU, Yuki TAKAYAMA