

# 時差出勤制度と住宅立地パターン

高山 雄貴<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 東北大学 助教 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)  
E-mail: takayama@civil.tohoku.ac.jp

時差出勤制度は経済活動の時間的分散化により通勤交通渋滞を緩和させることを意図した方策である。この方策の効果を検証するために、Henderson<sup>10)</sup>以降、経済活動の時間的集積の経済(生産性効果)・不経済(交通渋滞・混雑)を考慮した始業時刻選択モデルに関する研究が行われてきた。しかし、交通渋滞は経済活動の“空間的”集中による弊害であることが広く認識されているにもかかわらず、従来研究では時間・空間の両者の影響を明示的に考慮した枠組みによる分析がなされていない。そこで、本研究では、Takayama<sup>21)</sup>により提案された始業時刻選択モデルに労働者の住居立地選択行動を導入することで、経済活動の時空間分布を表現可能な枠組みを構築する。そして、ポテンシャルゲームの性質を利用することで、均衡状態・社会的最適状態の一般特性を理論的に明らかにする。

**Key Words :** *staggered work hours, residential location choice, bottleneck congestion, production effect, potential game*

## 1. はじめに

### (1) 背景と目的

我が国の殆ど全ての都市において、通勤ピーク時の交通渋滞が大きな問題となっている。この問題が生じる原因の一つに、多くの企業の業務スケジュールが固定的であり、同時に始業することが挙げられる。そこで、その対策として、労働者の出勤時刻の分散化により交通渋滞を緩和させる、時差出勤やフレックスタイムなどの交通需要マネジメント(TDM)施策が注目されてきた。この施策が交通渋滞対策として有効であることは広く認められており、かつ企業・労働者個人にも利点があることから、様々な企業がこれらの制度を徐々に導入するようになってきている。

それと並行して、この施策が都市交通に与える影響を予測・評価するための基礎理論が蓄積されてきた(e.g., Henderson<sup>10)</sup>, 奥村ら<sup>31), 32), 28)</sup>, Arnott et al.<sup>6)</sup>, Mun and Yonekawa<sup>16)</sup>, Fosgerau and Small<sup>8)</sup>, Takayama<sup>21)</sup>)。これらの研究では、TDM 施策には渋滞を緩和させるという効果がある一方で、始業時刻の分散化に伴う企業の生産性低下・余暇活動の困難化(Wilson<sup>23)</sup>, 吉村ら<sup>27)</sup>)といったデメリットが存在することを明示的に考慮した分析が行われている。より具体的には、“時間集積の経済”と呼ばれる始業時刻の時間的集中による正の効果と、“時間集積の不経済”と呼ばれる負の効果の両方を考慮した労働者の始業時刻選択モデルを構築し、その特性を調べることで TDM 方策に関する知見を得ている。しかし、交通と土地利用との間には強力な相互作用が存在することが知られている

にもかかわらず、これらの研究では、施策の導入による都市内空間構造の変化を考慮していない。

そこで、本研究では、時差出勤制度に着目し、この制度が都市内の住宅立地選択や交通状態(e.g., 企業の始業時刻, 交通渋滞)に与える影響を明らかにする。そのために、Takayama<sup>21)</sup>によるボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルに労働者の住居立地選択行動を導入することで、交通と土地利用の相互作用を表現可能な枠組みを構築する。そして、ポテンシャルゲーム<sup>15), 17)</sup>の性質を利用した“ポテンシャル関数アプローチ”により、その均衡状態・社会的最適状態の一般特性を明らかにする。

本研究の構成は以下の通りである。本章(2)節では、関連研究の成果と課題を整理したのち、本研究の位置付けを述べる。2章では、労働者の住宅立地・始業時刻選択行動をモデル化した上で、その均衡条件を定式化する。そして、3章において、均衡状態の特性をポテンシャル関数アプローチを利用して明らかにする。4章では、3章で得られる安定均衡状態と社会的最適状態を比較する。そして、その結果から時差出勤制度の有効性を議論する。

### (2) 関連研究と本研究の位置づけ

渋滞対策をはじめとした都市交通政策は、土地利用パターンに大きな変化をもたらす。また、都市内の土地利用パターンは、交通状態(e.g., 交通需要・渋滞パターン)に決定的な影響を与える。それゆえ、交通政策が都市に及ぼす影響を予測・評価するためには、交通と土地

利用の間の相互作用を明示的に考慮する必要があることが、古くから広く認識されてきた。実際、都市経済分野では、交通・土地利用の相互作用を考慮した、都市内空間構造の規則性に関する基礎理論 (e.g., Alonso<sup>1)</sup>, Fujita<sup>9)</sup>, Arnott<sup>2)</sup>) が長年に渡り発展している。土木計画分野では、これらの理論の応用・拡張により、交通・土地利用パターンの定量的な予測・評価に用いることができる交通・立地統合モデルに関する研究が膨大に蓄積されている (e.g., 上田ら<sup>26)</sup>)。しかし、現在まで、時差出勤やフレックスタイムといった TDM 施策が都市空間構造に与える影響に関する知見は、殆ど蓄積されていない。

Wilson<sup>24)</sup> は、時差出勤制度が都市内の住宅立地パターンに与える影響を調べた代表的研究である。この研究は、Henderson<sup>10)</sup> により提案された始業時刻選択モデルに、労働者による住宅立地選択を導入することで、交通と土地利用の相互作用を考慮している。しかし、ここで提案されているモデルの通勤費用は、解析上の困難を回避するために、静学的な枠組みで表現されている。すなわち、時差出勤制度はピーク時の通勤混雑を緩和させるための方策であるにもかかわらず、通勤時間に重大な影響を与えることが広く知られている渋滞現象は全く考慮されていない。

ピーク時の渋滞現象を表現可能なボトルネックモデル (Vickrey<sup>22)</sup>, Arnott et al.<sup>4)</sup>) を応用して、時差出勤・フレックスタイムに関する分析を行った研究は、近年、幾つか蓄積されている (e.g., Yoshimura and Okumura<sup>25)</sup>, Mun and Yonekawa<sup>16)</sup>, 佐藤・赤松<sup>29)</sup>, Fosgerau and Small<sup>8)</sup>, Takayama<sup>21)</sup>)。しかし、これらの研究では、ボトルネックモデルの分析の複雑さに起因し、都市の空間構造は固定的であると仮定されている。

本研究は、これらの課題を解決するために、ボトルネック渋滞・労働者の住宅立地選択・企業の始業時刻選択を考慮したモデルを構築し、その一般特性を理論的に解明している。そして、時差出勤の推進は都市の郊外化を招きうること、時差出勤する労働者が郊外部に居住すること、社会的には始業時刻・労働者の立地分布を集中させた方が望ましいことを示している。これらの知見は、モデル解析上の困難をポテンシャル関数アプローチにより根本的に解決したことにより得られたものであり、これまで全く知られていない本研究で初めて明らかにされるものである。

## 2. 出発・始業時刻・立地選択の同時均衡モデル

### (1) 都市と交通条件の設定

郊外部と都心部が単一の道路により結ばれている単一中心都市を考える (図 1)。この都市には、郊外部また

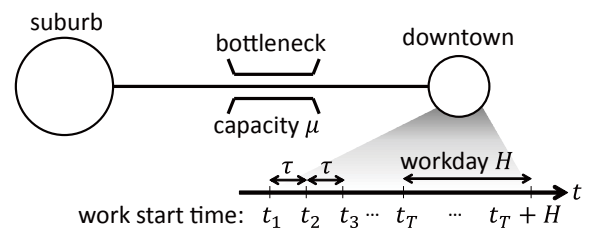


図-1 都市空間の設定

は都市部に居住する、総数  $N$  の労働者が存在する。この郊外部・都心部に居住する労働者数は、 $N_0, N_1$  で表す (以降、下付き添え字 0 は郊外部、1 は都心部を指す)。また、各居住地の面積は、固定的に  $A_0, A_1$  であると仮定する。企業は全て都心部に立地するため、労働者は居住地から都心部へ通勤する。それゆえ、都心部に居住する労働者の通勤費用は無視できると考える。

郊外部と都心部を結ぶ道路には、都心部直前に容量  $\mu$  のボトルネックが存在する。このボトルネックのサービスは、first-in-first-out (FIFO) 原則を満足し、待ち行列は Vickrey<sup>22)</sup>, Arnott et al.<sup>4)</sup> と同様の point queue モデルにより表現できると仮定する。このとき、郊外の住居地から都心への所要時間は、住居地からボトルネックまでの移動時間とボトルネックでの待ち時間で与えられる。ここで、全ての自動車は、住居地からボトルネックまで一定速度で走行すると仮定するため、その移動時間は一定値  $c_f$  となる。この移動時間  $c_f$  は以降の結果に本質的な影響を与えないことから、表記を簡略化するため  $c_f = 0$  とする。

本モデルでは、企業は始業時刻を  $T$  種類の選択肢  $\mathcal{T} \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_T\}$  から決定すると仮定する<sup>1</sup>。以降では、始業時刻が  $t_i \in \mathcal{T}$  の企業を“企業  $i \in \mathcal{I} \equiv \{1, 2, \dots, T\}$ ”と呼ぶ。この選択可能な始業時刻  $\mathcal{T}$  は、全て同一の時間間隔  $\tau$  で並んでおり、 $t_i = t_{i-1} + \tau$  ( $i = 2, 3, \dots, T$ ) が成立する。また、全企業の労働時間  $H$  は同一かつ一定値であり、さらに、必ず全企業が同時に業務を行っている時間帯が存在する (i.e.,  $t_T \leq t_1 + H$ ) と仮定する。

### (2) 主体の行動

#### a) 労働者の行動

この都市の労働者は均質であり、同一の効用関数を有する。したがって、この労働者は、居住地  $l \in \{0, 1\}$ 、労働を供給する企業  $i \in \mathcal{I}$ 、都心到着時刻  $t \in \mathbb{R}_+$  により特徴付けられる<sup>2</sup>。この労働者の効用関数は、合成財の

<sup>1</sup> 本稿では、企業が選択できる始業時刻は連続的でなく離散的であると仮定している。これは、殆どの始業時刻が、8:00, 8:30, 9:00 のように、いくつかの時刻に集中している状況を反映するためのものである。

<sup>2</sup> 本研究では、労働者は居住地の出発時刻ではなく、都心部への到着時刻を選択している。これは以降の解析を明快にするためのものであり、結果に影響を与えるものではない。実際、FIFO サービスの下では、都心部到着時刻と居住地からの出発時刻は一対一対応する。

消費量  $z_{li}(t)$ , 居住地面積  $y_l$  の準線形関数  $u(z_{li}(t), y_l)$  により与えられると仮定する:

$$u(z_{li}(t), y_l) = z_{li}(t) + f(y_l). \quad (1)$$

ここで,  $f(x)$  は狭義単調増加, 凹, かつ  $x > 0$  の範囲で 2 階微分可能な関数である. さらに,  $f(x)$  の導関数  $f'(x) = df(x)/dx$  に関して,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$  が成立すると仮定する<sup>3</sup>. 合成財をニューメレールとすると, 予算制約は以下で与えられる:

$$w_{li} = z_{li}(t) + r_l y_l + c_{li}(t). \quad (2)$$

ここで,  $w_{li}$  は企業  $i$  から居住地  $l$  の労働者に支払われる賃金,  $r_l$  は居住地  $l$  の地代,  $c_{li}(t)$  は渋滞待ち時間  $q(t)$  とスケジュールコスト  $s(t - t_i)$  の和で表される通勤費用である:

$$c_{li}(t) = \begin{cases} q(t) + s(t - t_i) & \text{if } l = 0, \\ s(t - t_i) & \text{if } l = 1. \end{cases} \quad (3)$$

スケジュールコスト関数  $s(x)$  は, Daganzo<sup>7)</sup>, Kuwahara<sup>13)</sup>, Lindsey<sup>14)</sup> と同様, 微分可能な狭義凸関数であり, かつ  $\min_x s(x) = s(0) = 0, s'(x) > -1$  を満足すると仮定する.

財消費に関する利潤最大化問題

$$\max_{z_{li}(t), y_l} u(z_{li}(t), y_l) \quad \text{s.t.} \quad (2) \quad (4)$$

の一階条件から, 次の関係が得られる:

$$y_l (f'(y_l) - r_l) = 0 \quad \forall l \in \{0, 1\}. \quad (5)$$

仮定より  $y_l = 0$  のとき  $f'(y_l)$  が無限大となることから, 常に  $y_l > 0$  が成立する. したがって,  $r_l = f'(y_l) > 0 \forall l \in \{0, 1\}$  となる. また, 居住地の供給量が  $A_l$ , 需要量が  $N_l y_l$  で与えられることから, 需給均衡条件より  $y_l = A_l / N_l$  が得られる.

以上の関係を利用すれば, 効用最大化問題 (4) から, 間接効用関数  $v_{li}(t)$  が与えられる:

$$v_{li}(t) = w_{li} - c_{li}(t) + h(N_l). \quad (6)$$

ここで,  $h(N_l) = f\left(\frac{A_l}{N_l}\right) - \frac{A_l}{N_l} f'\left(\frac{A_l}{N_l}\right)$  である. なお, この  $h(N_l)$  は,  $f(y_l) - r_l y_l$  と書き換えられることからわかるように, 土地消費により得られる効用増分を表している.

## b) 企業の行動

企業は全て都心部に立地しており, 完全競争下で一単位の労働を投入し財を生産する. この財の生産に関して, 本研究では, Henderson<sup>10)</sup>, Arnott et al.<sup>6)</sup> と同様の生産性効果を導入する. すなわち, ある企業のある時点での生産性は, すでに始業している企業数が多い程, 高まると仮定する. この生産性効果を表現するために, 企業のある時刻  $t$  での“瞬間的”生産関数  $g(t)$  を次のように定義する: ある企業の時刻  $t$  での瞬間的生

<sup>3</sup> 例えば,  $f(x) = \ln[x], f(x) = -\alpha/x$  などがこれらの条件を満たす.

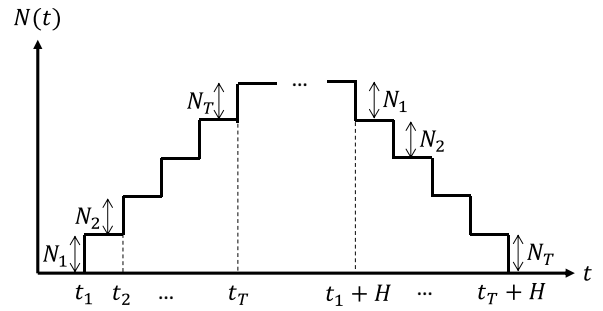


図-2 時刻別の労働者数

産量  $g(t)$  は, その時刻までに始業している企業の都心/郊外の労働者数  $N_l(t)$  の増加関数で与えられる:

$$g(t) = \alpha \{N_0(t) + N_1(t)\}. \quad (7)$$

ここで,  $\alpha > 0$  は, 生産性効果の重要性 (時差出勤の困難さ) を表すパラメータである. 各企業の労働時間が一定値  $H$  であることから, 始業時刻が  $t_i$  の企業の一日の生産量  $G_i$  は, 瞬間的生産関数  $g(t)$  を始業時刻  $t_i$  から終業時刻  $t_i + H$  まで積分したものとなる:

$$G_i = \int_{t_i}^{t_i+H} g(t) dt = \alpha \int_{t_i}^{t_i+H} N_0(t) + N_1(t) dt. \quad (8)$$

ここで,  $t_i = t_{i-1} + \tau$  であるため, 始業時刻が  $t_i$  の企業全体の都心・郊外の総労働者数を  $N_{li}$  とすると,  $N_l(t)$  は次のように与えられる (図 2):

$$N_l(t) = \begin{cases} N_{l1} & \text{if } t \in (t_1, t_2), \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^j N_{lk} & \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}), \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^T N_{lk} & \text{if } t \in [t_T, t_1 + H), \\ \sum_{k=2}^T N_{lk} & \text{if } t \in [t_1 + H, t_2 + H), \\ \vdots \\ \sum_{k=j}^T N_{lk} & \text{if } t \in [t_{j-1} + H, t_j + H), \\ \vdots \\ N_{lT} & \text{if } t \in [t_{T-1} + H, t_T + H). \end{cases} \quad (9)$$

なお, 各企業は固定的に一単位の労働を投入すると仮定することから,  $N_{0i} + N_{1i}$  は始業時刻が  $t_i$  の総企業数,  $N_0(t) + N_1(t)$  は時刻  $t$  が労働時間に含まれる総企業数を表す. この関係から,  $G_i$  が居住地  $l$ ・企業  $i$  の労働者数  $\mathbf{N} = (N_{li})_{l \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I}}$  の関数で与えられることがわかる:

$$G_i(\mathbf{N}) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{I}} \phi_{ij} (N_{0j} + N_{1j}). \quad (10)$$

ここで,  $\phi_{ij} \equiv H - \tau|i - j|$  は企業  $i$  と  $j$  の労働時間が重なる時間間隔を表す.

以上の生産関数の下で, 各々の企業は, 自らの利潤を最大化する始業時刻  $t_i \in \mathcal{T}$ , 労働者の居住地  $l \in \{0, 1\}$

を選択する:

$$\max_{l \in \{0,1\}, t_i \in \mathcal{T}} \pi_{li} = G_i(\mathbf{N}) - w_{li}. \quad (11)$$

### (3) 均衡条件の定式化

本モデルでは、短期と長期の2段階の均衡を考える。短期的には、労働者は、居住地  $l$ , 始業時刻  $t_i$  (i.e., 労働を供給する企業  $i$ ) を与件として、通勤費用  $c_{li}(t)$  を最小化する都心部到着時刻  $t$  を選択する。その結果、居住地  $l$ , 企業  $i$  の労働者の均衡通勤費用  $c_{li}^*$  が定まる。長期的には、均衡通勤費用  $c_{li}^*$  を与件として、企業は利潤・効用を最大化する始業時刻、労働者は居住地・労働を供給する企業を選択する。そして、均衡状態における居住地別・始業時刻別の企業数・労働者数 (以降、人口・始業時刻分布と呼ぶ)  $\mathbf{N}^* = (N_{li}^*)_{l \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I}}$  が決まる。本節では、これらの短期・長期均衡状態が満たす均衡条件を定式化する。

#### a) 短期均衡状態: 出発時刻選択均衡条件

前述したとおり、労働者は、短期的には、居住地  $l$ , 始業時刻  $t_i$  が定まっているとの前提の下で都心部到着時刻  $t$  を選択する。したがって、短期均衡状態は、人口・始業時刻分布  $\mathbf{N}$  を与件としたうえで決定される。この短期均衡状態が満たす均衡条件は、標準的な出発時刻選択モデルの均衡条件と完全に一致する。より具体的には、この均衡条件は以下に示す3条件で与えられる:

$$\begin{cases} n_{li}(t) \{c_{li}^* - c_{li}(t)\} = 0, \\ n_{li}(t) \geq 0, c_{li}^* - c_{li}(t) \geq 0, \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} q(t) \{\mu - \sum_j n_{0j}(t)\} = 0, \\ q(t) \geq 0, \mu - \sum_j n_{0j}(t) \geq 0, \end{cases} \quad (12b)$$

$$\int n_{li}(t) dt = N_{li}. \quad (12c)$$

ここで、 $n_{li}(t)$  は、時刻  $t$  に都心部に到着する、居住地  $l$ ・企業  $i$  の労働者数、 $c_{li}^*$  は居住地  $l$ ・企業  $i$  の労働者の均衡通勤費用である。この短期均衡条件より、短期均衡状態での  $n_{li}(t), q(t), c_{li}^*$  が人口・始業時刻分布  $\mathbf{N}$  の関数で与えられる。

均衡条件 (12a) は、都心部到着時刻選択の無裁定条件を表している。すなわち、この条件は、短期均衡状態ではどの労働者も自らの都心部の到着時刻を変更するインセンティブを持たないことを意味している。条件 (12b) は、ボトルネックの容量制約である; この条件は、流出時刻  $t$  においてボトルネックに渋滞 (渋滞待ち時間  $q(t)$ ) が発生する場合、その時刻のボトルネック流出者数は容量  $\mu$  に等しく、渋滞が発生していない時刻の流出者数は  $\mu$  以下であることを表している。なお、本稿で扱う枠組みでは、ボトルネックを通過するのは郊外部 (i.e.,  $l = 0$ ) の労働者のみであることを注意せよ。条

件 (12c) はフロー保存則である。

#### b) 長期均衡状態: 始業時刻選択均衡条件

長期均衡状態が満たす均衡条件は、次の4条件で与えられる:

$$\begin{cases} N_{li} \{v^* - (w_{li} - c_{li}^*(\mathbf{N}) + h(N_{li}))\} = 0, \\ N_{li} \geq 0, v^* - (w_{li} - c_{li}^*(\mathbf{N}) + h(N_{li})) \geq 0, \end{cases} \quad (13a)$$

$$\begin{cases} N_{li} \{\pi^* - (G_i(\mathbf{N}) - w_{li})\} = 0, \\ N_{li} \geq 0, \pi^* - (G_i(\mathbf{N}) - w_{li}) \geq 0, \end{cases} \quad (13b)$$

$$\sum_{l \in \{0,1\}} \sum_{i \in \mathcal{I}} N_{li} = N. \quad (13c)$$

ここで、 $v^*, \pi^*$  は、各々、労働者の均衡効用、企業の均衡利潤である。

均衡条件 (13a), (13b) は、労働者・企業の始業時刻選択均衡条件である。したがって、単一の労働者・企業のみでは自らの効用・利潤を改善できない状態が、長期均衡状態となる。また、条件 (13c) は労働者数の保存則を表す。

本モデルでは、企業は完全競争下で財を生産するため、 $\pi^* = 0$  となる。これを利用すると、長期均衡条件 (13) は以下の条件で表現することができる:

$$\begin{cases} N_{li} \{v^* - v_{li}(\mathbf{N})\} = 0, \\ N_{li} \geq 0, v^* - v_{li}(\mathbf{N}) \geq 0, \end{cases} \quad (14a)$$

$$\sum_{l \in \{0,1\}} \sum_{i \in \mathcal{I}} N_{li} = N. \quad (14b)$$

ここで、 $v_{li}(\mathbf{N})$  は居住地  $l$  に居住する企業  $i$  の労働者の効用水準を表す:

$$v_{li}(\mathbf{N}) = G_i(\mathbf{N}) - c_{li}^*(\mathbf{N}) + h(N_{li}). \quad (14c)$$

## 3. 均衡状態の特性分析

本章では、前章で示したモデルの短期・長期均衡状態の特性を順に調べる。その結果、短期均衡状態は唯一に定まる一方、長期均衡状態は複数存在することが示される。さらに、長期均衡状態が複数存在することから、均衡選択のために、その局所的な漸近安定性をポテンシャルゲーム<sup>15), 17)</sup>の性質を利用して明らかにする。その結果から、本モデルの安定均衡状態の特性が示される。

### (1) 短期均衡状態の特性

最初に、短期均衡状態の一意性を確認しよう。都心部に居住する労働者に着目すると、通勤費用 (3) (i.e.,  $c_{li} = s(t - t_i)$ ) とスケジューリングコスト関数に関する仮定  $\min_x s(x) = s(0) = 0$  より、短期均衡状態が以下で与え

られることがわかる:

$$n_{1i}^*(t) = \begin{cases} N_{1i} & \text{if } t = t_i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (15)$$

$$c_{1i}^* = 0. \quad (16)$$

郊外部に居住する労働者に関する短期均衡条件は、標準的な出発時刻選択モデルと一致する。したがって、FIFO原則を満足し、かつ $s(x)$ が狭義凸関数であることから、Daganzo<sup>7)</sup>, Kuwahara<sup>13)</sup>, Lindsey<sup>14)</sup>より、短期均衡状態が一意であり、かつ始業時刻が早い企業に勤める労働者ほど、自宅を早く出発し、都心部にも早く到着する (i.e., first-in-first-work (FIFW) 原則が成立) ことがわかる。以上の結果は、次の命題にまとめられる:

**命題 1** 短期均衡状態は一意に決まる。さらに、この均衡状態では FIFW 原則が成立する。

短期均衡状態において FIFW 原則が成立することを利用すると、Takayama<sup>21)</sup>と同様の方法で、郊外の労働者の通勤費用 $c_{0i}^*(\mathbf{N})$ がもつ次の性質を示すことができる。

**補題 1** 郊外部の均衡通勤費用 $c_0^* = (c_{0i}^*)_{i \in \mathcal{I}}$ は郊外部労働者の始業時刻分布 $\mathbf{N}_0 = (N_{0i})_{i \in \mathcal{I}}$ の関数で与えられる。さらに、 $c_0^*(\mathbf{N}_0)$ のJacobi行列 $\nabla c_0^*(\mathbf{N}_0) = [\partial c_{0i}^*(\mathbf{N}_0) / \partial N_{0j}]$ は、対称かつ正定値である。

証明 Takayama<sup>21)</sup> Lemma 1 参照。

この補題より、短期均衡状態での通勤費用 $c_{li}^*(\mathbf{N})$ は以下で与えられることがわかる:

$$c_{li}^*(\mathbf{N}) = \begin{cases} c_{0i}^*(\mathbf{N}_0) & \text{if } l = 0. \\ 0 & \text{if } l = 1. \end{cases} \quad (17)$$

## (2) 長期均衡状態の特性

### a) ポテンシャルゲーム

次に、長期均衡状態の特性を調べる。そのために、長期均衡状態がポテンシャルゲームの Nash 均衡状態とみなすことができることを示しておこう。長期均衡状態は、均衡条件 (14) より、プレイヤーの集合が $\mathcal{S} \equiv [0, N]$ 、戦略集合が $\{0, 1\} \times \mathcal{I}$ 、利得関数が $\mathbf{v}(\mathbf{N}) = (v_{li}(\mathbf{N}))_{l \in \{0, 1\}, i \in \mathcal{I}}$ の population game の Nash 均衡状態と一致する。なお、以降では、このゲームをゲーム $G = \{\mathcal{S}, \{0, 1\} \times \mathcal{I}, \mathbf{v}\}$ と表記する。

このゲーム $G$ は、Sandholm<sup>17)</sup>により示されているように、任意の $\mathbf{N} \in \Delta \equiv \{\mathbf{N} \mid \sum_l \sum_i N_{li} = N, N_{li} \geq 0 \forall l \in \{0, 1\} \text{ and } i \in \mathcal{I}\}$ に対して<sup>4</sup>、次の条件を満たす

<sup>4</sup>より正確には、 $\Delta$ 上の偏微分が well-defined となるように、 $\Delta$ を含む開集合上でポテンシャル関数 $P$ を定義する必要がある。本稿で扱う simplex 上の偏微分の拡張可能性については、例えば、Sandholm<sup>19)</sup> Chapter 3 参照。

ポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ が存在すれば、ポテンシャルゲームである:

$$\frac{\partial P(\mathbf{N})}{\partial N_{li}} = v_{li}(\mathbf{N}) \quad \forall l \in \{0, 1\} \text{ and } i \in \mathcal{I}. \quad (18)$$

この条件 (18) は、Sandholm<sup>17)</sup>により、“externality symmetry” と呼ばれる次の条件と等価であることが示されている:

$$\frac{\partial v_{li}(\mathbf{N})}{\partial N_{mj}} = \frac{\partial v_{mj}(\mathbf{N})}{\partial N_{li}} \quad \forall l, m \in \{0, 1\}, i, j \in \mathcal{I} \text{ and } \mathbf{N} \in \Delta. \quad (19)$$

補題 1 より、明らかにゲーム $G$ は (19) を満たすため、次の命題が得られる。

**命題 2** ゲーム $G$ は次のポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ を持つポテンシャルゲームである:

$$P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N}) - P_3(\mathbf{N}). \quad (20)$$

ここで、 $P_1(\mathbf{N}), P_2(\mathbf{N}), P_3(\mathbf{N})$ は、各々、生産性効果、通勤混雑、土地消費に関する影響を表す凸関数であり、次の関係を満たす:

$$P_1(\mathbf{N}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}} (N_{0i} + N_{1i}) G_i(\mathbf{N}), \quad (21a)$$

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{N})}{\partial N_{li}} = c_{li}^*(\mathbf{N}) \quad (21b)$$

$$P_3(\mathbf{N}) = - \sum_{l \in \{0, 1\}} \sum_{i \in \mathcal{I}} N_{li} f\left(\frac{A_i}{\sum_l N_{li}}\right). \quad (21c)$$

証明 付録 I 参照。

ゲーム $G$ がポテンシャルゲームであることから、その均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満たす $\mathbf{N}^*$ の集合と一致する:

$$\max_{\mathbf{N}} P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N}) - P_3(\mathbf{N}) \quad \text{s.t. } \mathbf{N} \in \Delta. \quad (22)$$

この事実は、上記の問題の KKT 条件が、均衡条件 (14) と完全に一致することから容易に確認できる。

### b) 長期均衡状態の一意性と安定性

長期均衡状態の一意性は、(22) より、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ の形状により確認できる。より具体的には、 $P(\mathbf{N})$ が単峰であればゲーム $G$ の均衡状態は一意であり、そうでなければ一意とは言えない。この事実と、 $P_1(\mathbf{N}), P_2(\mathbf{N}), P_3(\mathbf{N})$ の凸性より、次の補題が得られる:

**補題 2** ゲーム $G$ の均衡状態は、一般に一意ではない。

補題 2 より、長期均衡状態が複数存在し得ることが示された。そこで、均衡選択のために、ゲーム $G$ の均衡状態の局所的な漸近安定性を調べる。この均衡状態の安定性を調べるには、均衡状態への調整ダイナミクス $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{V}(\mathbf{N})$ を定義する必要がある。ここで、 $\dot{\mathbf{N}}$ は状態 $\mathbf{N}$ の変化速度を表す。本稿では、そのダイナミク

スとして、次の2条件を満たす *admissible dynamics* を考える。

(PC)  $V(N) \neq 0$  のときは常に、

$$V(N) \cdot v(N) = \sum_{i \in (0,1)} \sum_{i \in \mathcal{I}} V_{li}(N) v_{li}(N) > 0. \quad (23)$$

(NS)  $V(N) = 0$  であれば、 $N$  はゲーム  $G$  の均衡状態。

条件 (PC) は、positive correlation と呼ばれ、調整ダイナミクスと利得関数が正の相関を持つことを要求している。また、条件 (NS) は、調整ダイナミクスの定常状態が、ゲーム  $G$  の Nash 均衡状態と一致することを要求している。なお、この *admissible dynamics* は、best response dynamic, Brown-von Neumann-Nash (BNN) dynamic, projection dynamic を特殊ケースとして含む、一般的なダイナミクスである<sup>5</sup>。

ポテンシャルゲーム  $G$  の均衡状態  $N^*$  の安定性は、Sandholm<sup>17)</sup> で示されているように、次の特性を持つ：

ポテンシャルゲーム  $G$  において、ポテンシャル関数  $P(N)$  を局所的に最大化する  $N^s$  は、*admissible dynamics* の下で、安定均衡状態であり、ポテンシャル関数  $P(N)$  を局所的に最小化する  $N^u$  は不安定均衡状態である。

したがって、ゲーム  $G$  の均衡状態の安定性は、ポテンシャル関数の形状のみから確認できることがわかる。第4章は、この性質を利用して安定均衡状態と社会的最適状態の特性を比較する。

(22) で与えられるポテンシャル関数  $P(N)$  の形状は、生産性効果による時間集積の経済を表現した第1項  $P_1(N)$ 、ボトルネック渋滞による時間集積の不経済を表現した第2項  $P_2(N)$ 、土地消費に伴う空間集積の不経済を表現した第3項  $P_3(N)$  によって決まる。これは、安定均衡状態が、本モデルに含まれる時間集積の経済・不経済、空間集積の不経済のバランスに応じて決まることを意味している。実際、ポテンシャル関数  $P$  のうち第1項が卓越し  $P$  が凸関数となると、始業時刻が集中した状態が安定均衡状態となる。また、第2,3項が卓越し  $P$  が凹関数となる場合は、人口・始業時刻分布が分散した状態が唯一の均衡状態となる。

なお、本稿で扱うモデルには、上述のように、空間集積の経済は働かない。ただし、効用関数 (14c) からわかるように、激しい交通渋滞は労働者の都心部への居住インセンティブを高めるため、始業時刻分布の集中が同時に人口分布の集中をもたらす。その逆に、始業時刻分布の分散化は人口分布をも分散化させる。この議論から、次の命題が得られる：

**命題3** 複数の均衡状態が存在する状況を考える。この

<sup>5</sup> *admissible dynamics* に含まれる他の例は、Sandholm<sup>18)</sup> 参照。

とき、より集中(分散)した始業時刻分布を持つ均衡状態の人口分布の方が、より都心部に集中(分散)している。

この命題は、出勤時刻を分散化させる TDM 政策は、交通渋滞を緩和する一方で、郊外化を進めてしまう可能性があることを示唆している。

また、都心に居住する労働者の効用関数は、 $c_{i1}^* = 0$  となることから、

$$v_{i1} = G_i(N) + h(N_{i1}) \quad (24)$$

で与えられる。これは、労働者の始業時刻選択に影響を与えるのは、 $G_i(N)$  のみであることを意味している。この事実から、直ちに次の命題が得られる：

**命題4** 都心に居住する労働者は、賃金が最大となる企業  $i$  のみに労働を供給する。すなわち、都心の労働者の始業時刻  $t_{i1}$  は以下で特徴づけられる：

$$i_1 = \arg \max_i G_i(N). \quad (25)$$

$G_i(N)$  を最大化する始業時刻  $t_{i1}$  は、最も多くの労働者が始業する時刻となる。したがって、この時刻は“標準的な始業時刻”と考えることができる。すると、命題4は、「都心部に居住する労働者の始業時刻は全て標準的な始業時刻であり、時差出勤する労働者は全て郊外に居住する」ことを主張していると解釈できる。

## 4. 社会的最適状態と安定均衡状態

### (1) 社会的最適状態

社会的最適状態は、生産者余剰・消費者余剰の総和で定義される総余剰を最大化する状態であると定義する。このとき、総余剰最大化問題は、次のように表すことができる：

$$\max_{\{n_{oi}(t)\}, N} W = W_1(N) - W_2(\{n_{oi}(t)\}) - W_3(N) \quad (26a)$$

$$\text{s.t. } \mu - \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{oi}(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad (12c), \quad n_{oi}(t) \geq 0 \quad \forall i, t, \quad (26b)$$

$$N \in \Delta. \quad (26c)$$

ここで、 $W_1(N)$ 、 $W_2(\{n_{oi}(t)\})$ 、 $W_3(N)$  は以下で与えられる、各々、生産性効果・ボトルネック渋滞・土地消費の影響を表す項である：

$$W_1(N) = \sum_{i \in \mathcal{I}} (N_{0i} + N_{1i}) G_i(N) = 2P_1(N), \quad (27a)$$

$$W_2(\{n_{oi}(t)\}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \int n_{oi}(t) \{q(t) + s(t - t_i)\} dt, \quad (27b)$$

$$W_3(N) = - \sum_{i \in (0,1)} \sum_{i \in \mathcal{I}} N_{li} f\left(\frac{A_i}{\sum_{i \in \mathcal{I}} N_{li}}\right) = P_3(N). \quad (27c)$$

社会的最適状態では必ず渋滞が完全に解消される<sup>6</sup>ため、 $W_2(\{n_{oi}(t)\})$  を次の  $\hat{W}_2(\{n_{oi}(t)\})$  で与えても、(26) の

<sup>6</sup> 詳細については、Vickrey<sup>22)</sup>、Hendrickson and Kocur<sup>11)</sup>、Arnott et al.<sup>3), 4), 5)</sup>などを参照。

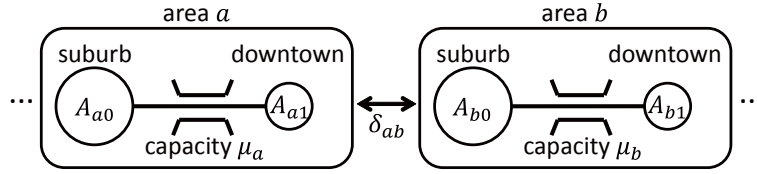


図-3 拡張モデルの都市空間設定

解は社会的最適状態と一致する:

$$\hat{W}_2(\{n_{0i}(t)\}) = \sum_{i \in I} \int n_{0i}(t) s(t - t_i) dt. \quad (28)$$

以降では、この性質を利用して、社会的最適状態と安定均衡状態を比較する。

## (2) 社会的最適状態と安定均衡状態の比較

社会的最適状態での始業時刻分布  $N^o$  と安定均衡状態  $N^s$  の性質を比較するために、(26) の目的関数  $W$  を  $P_1(N), P_2(N), P_3(N)$  で表現することを考える。その際、 $\hat{W}_2(\{n_{0i}(t)\})$  の次の性質が有益である。

**補題 3**  $Z(N) = \min_{\{n_{0i}(t)\}} \hat{W}_2(\{n_{0i}(t)\})$  s.t. (26b) は、次の性質を満たす:

$$\frac{\partial Z(N)}{\partial N_{li}} = \begin{cases} c_{0i}^*(N_0) & \text{if } l = 0, \\ 0 & \text{if } l = 1. \end{cases} \quad (29)$$

**証明**  $Z(N)$  は明らかに  $N_{li}$  に依存しないため、 $\partial Z(N)/\partial N_{li} = 0$ 。  $\partial Z(N)/\partial N_{0i} = c_{0i}^*(N_0)$  の証明については、Takayama<sup>21)</sup> Lemma 4 参照。

補題 3 は、 $Z(N)$  が (21b) と一致した条件を満たすことを示している。したがって、 $P_2(N)$  は  $Z(N)$  で与えられることがわかる。この結果と (27a) から、次の補題が導かれる。

**補題 4** 社会的最適状態での始業時刻分布  $N^o$  は、次の問題の解で与えられる:

$$\max_N P(N) + P_1(N) \quad \text{s.t. } N \in \Delta. \quad (30)$$

補題 4 は、 $N^o$  を求める最適化問題 (30) の目的関数が、ポテンシャル関数  $P(N)$  に生産性効果による正の外部性の影響を表す項  $P_1(N)$  を加えた形になることを示している。したがって、 $\nabla^2 W(N) = \nabla^2 P(N) + \nabla^2 P_1(N)$  であるため、 $W(N)$  の Hessian matrix の固有値は、明らかに  $P(N)$  の Hessian matrix  $\nabla^2 P(N)$  の固有値よりも大きく、集積力の影響が強まることがわかる。この事実は、社会的最適状態での人口・始業時刻分布  $N^o$  は、均衡状態の分布  $N^s$  と比較して、より時間的・空間的に集中する傾向にあることを意味している。時差出勤制度は始業時刻分布を分散させるための方策であることから、この結果は、渋滞を完全に解消できる場合であれば、時差出勤制度は社会的には非効率な結果をもた

らすことを意味している。以上の結果を命題としてまとめよう:

**命題 5** 社会的最適状態における人口・始業時刻分布  $N^o$  は、安定均衡状態の分布  $N^s$  よりも時間・空間的に集中する。

## 5. おわりに

本研究では、Takayama (2014) によるボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルに労働者の住居立地選択行動を導入することで、経済活動の時空間分布を表現可能な枠組みを構築した。そして、ポテンシャルゲームの性質を利用することで、均衡状態・社会的最適状態の一般特性を理論的に明らかにした。その結果、時差出勤の推進は都市の郊外化を招きうること、時差出勤する労働者が郊外部に居住すること、社会的には始業時刻・労働者の立地分布を集中させた方が望ましいことが明らかにされた。

本稿で用いたポテンシャル関数アプローチは、始業時刻・立地選択の同時均衡モデルだけでなく、幅広い枠組みに適用することができる。例えば、これまでに提示した枠組みには含まれていなかった空間集積の経済を含む枠組みであっても、図-3 に示すような空間経済システムであれば、本アプローチは適用可能である。この方向の研究成果については、追って報告する予定である。

**謝辞:** 本研究は日本学術振興会 科学研究費補助金 (課題番号 15K18136) の助成金を受けた研究の一部である。ここに記し、感謝の意を表す。

## 付録 I 命題 2 の証明

$P(N)$  がポテンシャル関数であることは、(18), (19) より明らかである。そこで、ここでは、 $P_1(N), P_2(N)$  が凸関数であることを証明する。

まず、 $P_1(N)$  の凸性を調べる。 $N$  が次のように与え

られると仮定する:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{01} \\ \vdots \\ N_{0T} \\ N_{11} \\ \vdots \\ N_{1T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

この時、 $P_1(\mathbf{N})$  の Hessian 行列  $\nabla^2 P_1(\mathbf{N}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{N})$  は、以下で与えられる:

$$\nabla^2 P_1(\mathbf{N}) = \alpha \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} = \alpha (\mathbf{E} \otimes \Phi). \quad (\text{I.2})$$

ここで、 $\otimes$  はクロネッカー積、 $\mathbf{E}$  は全ての要素が 1 の  $2 \times 2$  行列、 $\Phi \equiv \mathbf{H}\mathbf{E} - \tau\mathbf{D}$  である。

この Hessian 行列  $\nabla^2 P_1(\mathbf{N}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{N})$  の固有値  $\lambda_{li}$  は、以下で与えられる:

$$\lambda_{li} = e_l \kappa_i = \begin{cases} \alpha \kappa_i & \text{if } l = 0, \\ 0 & \text{if } l = 1. \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

ここで、 $e_l$  は  $\mathbf{E}$  の第  $l$  固有値、 $\kappa_i$  は  $\Phi$  の第  $i$  固有値である。したがって、任意の  $i \in \mathcal{I}$  において  $\kappa_i \geq 0$  であれば、 $\nabla^2 P_1(\mathbf{N}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{N})$  は半正定値となることがわかる。

$\kappa_i$  の符号を調べるために、以下のように表される Hessian 行列の逆行列  $\Phi^{-1}$  を考えよう:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \gamma & -0.5 & & & \epsilon \\ -0.5 & 1 & -0.5 & & \mathbf{O} \\ & -0.5 & 1 & -0.5 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{O} & & -0.5 & 1 & -0.5 \\ \epsilon & & & & -0.5 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{I.4a})$$

$$\gamma = \epsilon + 0.5, \quad (\text{I.4b})$$

$$\epsilon = \frac{\tau}{2\{2H - (T-1)\tau\}}. \quad (\text{I.4c})$$

Gershgorin の定理 (定理の詳細は、Horn and Johnson<sup>12)</sup>, Strang<sup>20)</sup>, 伊理<sup>30)</sup> 参照) より、 $\Phi^{-1}$  の任意の固有値  $\kappa_i^{-1}$  は次の範囲に存在することがわかる:

$$0 \leq \kappa_i^{-1} \leq \max\{1 + 2\epsilon, 2\}. \quad (\text{I.5})$$

この結果から、固有値  $\kappa_i$  は全て非負であることがわかる。したがって、 $\nabla^2 P_1(\mathbf{N})$  は半正定値、すなわち  $P_1(\mathbf{N})$  は凸関数である。

次に、 $P_2(\mathbf{N})$  を考えよう。 $P_2(\mathbf{N})$  の Hessian 行列

$$\nabla^2 P_2(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} \nabla c_0^*(\mathbf{N}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

は、補題 (1) より半正定値である。したがって、 $P_2(\mathbf{N})$  は凸関数である。

最後に、 $P_3(\mathbf{N})$  の凸性を、その Hessian 行列を利用して示す。 $P_3(\mathbf{N})$  の Hessian 行列は、次で与えられる:

$$\nabla^2 P_3(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.7a})$$

$$\mathbf{A}_l = -\text{diag} \left[ \frac{A_l^2}{(\sum_i N_{li})^3} f'' \left( \frac{A_l}{\sum_i N_{li}} \right) \mathbf{1} \right]. \quad (\text{I.7b})$$

$f(x)$  は凹関数であるため、 $\nabla^2 P_3(\mathbf{N})$  は明らかに半正定値である。したがって、 $P_3(\mathbf{N})$  が凸関数であることがわかる。

#### 参考文献

- 1) Alonso, W. (1964) *Location and Land Use*, pp. Harvard University Press.
- 2) Arnott, R. (2007) "Congestion tolling with agglomeration externalities," *Journal of Urban Economics*, Vol. 62, No. 2, pp. 187–203.
- 3) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R. (1990) "Economics of a bottleneck," *Journal of Urban Economics*, Vol. 27, No. 1, pp. 111–130.
- 4) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R. (1993) "A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand," *The American Economic Review*, Vol. 83, No. 1, pp. 161–179.
- 5) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R. (1994) "The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters," *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 28, No. 2, pp. 139–161.
- 6) Arnott, R., Rave, T., and Schöb, R. (2005) *Alleviating Urban Traffic Congestion*: MIT Press.
- 7) Daganzo, C. F. (1985) "The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck," *Transportation Science*, Vol. 19, No. 1, pp. 29–37.
- 8) Fosgerau, M. and Small, K. (2014) "Endogenous scheduling preferences and congestion," *Working Paper*, University of California at Irvine.
- 9) Fujita, M. (1989) *Urban Economic Theory: Land Use and City Size*: Cambridge University Press, pp.366.
- 10) Henderson, J. V. (1981) "The economics of staggered work hours," *Journal of Urban Economics*, Vol. 9, No. 3, pp. 349–364.
- 11) Hendrickson, C. and Kocur, G. (1981) "Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model," *Transportation Science*, Vol. 15, No. 1, pp. 62–77.
- 12) Horn, R. A. and Johnson, C. R. (2013) *Matrix Analysis*: Cambridge University Press, 2nd edition.
- 13) Kuwahara, M. (1990) "Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak," *Transportation Science*, Vol. 24, No. 3, pp. 217–229.
- 14) Lindsey, R. (2004) "Existence, uniqueness, and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes," *Transportation Science*, Vol. 38, No. 3, pp. 293–314.
- 15) Monderer, D. and Shapley, L. S. (1996) "Potential games," *Games and Economic Behavior*, Vol. 14, No. 1, pp. 124–143.
- 16) Mun, S.-i. and Yonekawa, M. (2006) "Flexitime, traffic congestion and urban productivity," *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 40, No. 3, pp. 329–358.
- 17) Sandholm, W. H. (2001) "Potential games with contin-



- uous player sets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, pp. 81–108.
- 18) Sandholm, W. H. (2005) "Excess payoff dynamics and other well-behaved evolutionary dynamics," *Journal of Economic Theory*, Vol. 124, No. 2, pp. 149–170.
  - 19) Sandholm, W. H. (2010) *Population Games and Evolutionary Dynamics*: MIT Press.
  - 20) Strang, G. (2006) *Linear Algebra and Its Applications*: Thomson Brooks/Cole, 4th edition.
  - 21) Takayama, Y. (2015) "Bottleneck congestion and distribution of work start times: The economics of staggered work hours revisited," *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*, 59033.
  - 22) Vickrey, W. S. (1969) "Congestion theory and transport investment," *The American Economic Review*, Vol. 59, No. 2, pp. 251–260.
  - 23) Wilson, P. W. (1988) "Wage variation resulting from work hours," *Journal of Urban Economics*, Vol. 24, No. 1, pp. 9–26.
  - 24) Wilson, P. W. (1992) "Residential location and scheduling of work hours," *Journal of Urban Economics*, Vol. 31, No. 3, pp. 325–336.
  - 25) Yoshimura, M. and Okumura, M. (2001) "Optimal commuting and work start time distribution under flexible work hours system on motor commuting," *Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 3, No. 2, pp. 455–469.
  - 26) 上田孝行・石川良文・小池淳司・石倉智樹・小林優輔・山崎清・武藤慎一 (2010) *Excel で学ぶ地域・都市経済分析*, コロナ社.
  - 27) 吉村充功・奥村誠・塚井誠人 (1999) "都市内業務トリップにおける時間的集積の経済性," *都市計画論文集*, Vol. 34, pp.217–222.
  - 28) 吉村充功・奥村誠 (2000) "ダイナミカルシステム論による鉄道時差出勤パターンの分析," *土木計画学研究・論文集*, Vol. 17, No.2, pp.879–884.
  - 29) 佐藤慎太郎・赤松隆 (2006) "企業と家計の相互作用を考慮した始業・出発時刻均衡モデル," *土木計画学研究・論文集*, Vol. 23, No.4, pp.903–910.
  - 30) 伊理正夫 (2003) 一般線形台数, 岩波書店.
  - 31) 奥村誠・永野光三・小林潔司 (1998) "始業時刻の設定が鉄道通勤交通に及ぼす影響に関する研究," *土木計画学研究・論文集*, Vol. 15, pp.831–840.
  - 32) 奥村誠・小林潔司・田中成興 (1999) "鉄道時差出勤の社会的便益と導入インセンティブに関する分析," *応用地域学研究*, Vol. 4, pp.63–75.