感度分析を用いた交通混雑内生型時間帯別配分モデル及びその金沢都市圏への適用

板垣　雄哉[1]・中山　晶一朗[2]・髙山　純一[3]・藤生　慎[4]

[1]学生会員　金沢大学　大学院自然科学研究科　環境デザイン学専攻（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: yuuya@stu.kanazawa-u.ac.jp

[2]正会員　金沢大学教授　環境デザイン学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

[3]フェロー会員　金沢大学教授　環境デザイン学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: takayama@t.kanazawa-u.ac.jp

[4]正会員　金沢大学助教　環境デザイン学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: fujiu@se.kanazawa-u.ac.jp

一日の中で大きく変化する交通ネットワークの状況を実務的にも取り扱うことができる配分として，時間帯別配分がある．時間帯別配分では，時間帯内では静的配分が施される．そして，時間帯内で目的地に到着できなかった交通量は次の時間帯に繰り越されることにより，時間帯間のダイナミクスを記述する．これまでの時間帯別配分を実用的にも用いることができるが，それらは時間帯間での混雑の時空間が記述できないものが多い．その理由は，時間帯内では静的配分を行うが，通常の静的配分のため，OD交通量は全て（その時間帯内に）目的地に到着してしまうため，本来は時間帯内に目的地に到着できない残留交通量をうまく扱うことができないためである．本研究では，感度分析を用いて，交通量はその時間帯内で通過したリンクのみの旅行時間に影響が与えるように近似的に取り扱う．これによって，各時間帯内では通常の静的配分を行ったとしても，適切に時間帯間の混雑の時空間移動を記述できるようになる．

Key Words : *semi-dynamic traffic assignment，sensitivity analysis，residual flow*

1.　はじめに

現在実務において利用される日単位の配分は，一日の交通量が定常状態であると仮定し，一日の平均的な交通量を求めている．しかし，現実の交通量は時々刻々と変化しており，通勤による朝ラッシュ・タラッシュのピーク時での多大な交通量に対し，深夜においての交通量は激減する．このような時刻による交通状況の違いは極めて大きなものであり，その違いを無視することは適切とは言い難い．したがって，何らかの方法・モデルなどで時刻で大きく変化する交通流を取り扱うことは非常に重要である．

動的な交通量配分における大きな問題の一つとして，モデルを現実ネットワークに適用する上で，（1分や5分単位のような）詳細なOD交通量のデータを入手する難しさがある．多くの場合，そのような詳細な動的なOD交通量データを入手することは困難であり，時間帯別でのOD交通量のデータが比較的入手可能なものとして限界に近いものであると考えられる．以上のような理由を考慮して，本研究では，時間帯別配分を用いることとする．

これまでに様々な時間帯別配分モデルが考えられている．時間帯別配分モデルは，配分対象とする時間を複数の時間帯に分け，それぞれの時間帯では静的配分を行うものの，時間帯の間では，前の時間帯内で目的地に到着できなかった交通量を次の時間帯に移行・残留させる．つまり，時間帯間では，ダイナミクスを考慮する．時間帯別配分モデルの特徴としては，動的配分に比べると，計算時間・計算負荷が小さく，前述の通り，それほど詳細なODデータを必要とはしない．しかし，これは，詳細で精緻な交通状況の再現は出来ないことを意味することに注意が必要である．また，残留交通量（当該時間帯内に目的地に到着できなかった交通量）の計算方法，解の一意性などが時間帯別配分モデルの間で異なっており，計画や政策の検討に応じて，どの時間帯別配分モデルが適切であるのかを考える必要がある．なお，実務におい

ては複数ケース間での施策等の比較評価を行う場合，解の一意性が保証されていることが重要である．

時間帯別に交通量を配分をする際には，残留交通量をどのように取り扱うのかということが重要なポイントとなる．藤田ら[1]や宮城・牧村[2]は時間帯内で目的地に到着できない交通量を次の時間帯の OD 交通量に加算する OD 修正法を用いたモデルを提案した．このモデルでは，形式的には，Beckmann 型の需要変動型均衡配分モデルとして定式化できるため，解の唯一性が保証され，計算アルゴリズムも簡単で，各時間帯での配分の計算時間も通常の日単位の均衡配分と同程度になると考えられる．ただし，OD ベースでの修正のため，ピーク時などの交通混雑の空間移動を適切に再現することができないという問題点がある．

藤田ら[3]は，時間帯の終了時点でリンク上に残った交通量がそのリンクに残留するとした手法であるリンク修正法を提案した．これは上で述べた OD 修正法の問題点を解決するものである．現時点では，解の一意性などが検討されていない．

赤松ら[4]は，待ち行列を用いて残留交通量を表現している．本稿では，そのような残留交通量の取り扱いを待ち行列法と呼ぶことにする．待ち行列法では，リンクの出口に流出容量があり，その容量を超えた交通量は待ち行列（赤松らの研究ではポイント・キュー）を形成する．その時間帯の終了時点での待ち行列は，次の時間帯へ残留する．ただし，赤松らのモデルでは，残留交通量（残留待ち行列）は，次の時間帯のそのリンクの旅行時間にのみ影響を与え，後続のリンクにはその残留交通量は流れない．次の時間帯では，残留した待ち行列はボトルネック通過後消滅するとも見なせる．本来ならば，残留交通量は，目的地に到着するまで各リンクの旅行時間に影響を与えるはずである．しかし，赤松らのモデルでは，各時間帯のネットワークフローは各時間帯ごとに最適化問題を解くのみで計算することが可能で，計算負荷等は通常の静的配分と同程度である．また，出発時刻選択を考慮したモデルも提案されている．

以上のように，これまでの定式化されたリンクベースの時間帯別配分モデル[1),2),4)]では，残留交通量の取り扱いの上で適切ではない部分があり，混雑の空間移動を十分に記述することが出来ない．

菊池・赤松[5]は，赤松ら[4]のモデルを発展させ，渋滞の空間移動を取り扱うことが出来るモデルを開発し，そのモデルの数理的構造などを明らかにしている．ただし，菊池・赤松[5]の論文ではモデルの解の一意性については触れられていない．中山[6]は，解の一意性が保証される混雑の空間移動を記述するモデルを開発している．中山[6]のモデルでは，解は一意であり，モデルとしては優れているものの，全ての時間を同時に取り扱う必要があり，大規模ネットワークでは計算上問題となる可能性がある．

本研究では，計算負荷が小さく，静的配分のアルゴリズムが利用可能で，解が一意である時間帯別配分モデルを提案する．モデル化にあたり，本研究では，藤田ら[3]のリンク修正法と同様に，走行しているリンクをその時間帯で通過できなかった交通量はそのリンクで次の時間帯に残留する．つまり，本研究では，残留交通量の取り扱いは基本的に藤田ら[3]のリンク修正法の考え方を用いる．しかし，藤田ら[3]のモデルとは異なり，各時間帯での配分は通常の確率的利用者均衡とし，最適化問題とする．そのために，本研究では，残留交通量を感度分析で近似的に計算することにより，配分交通量である解が一意であり，残留交通量計算負荷を小さくすることを目的とする．

2. 時間帯別配分と残留交通量

(1) 配分における仮定

時間帯別配分モデルは，基本的に一日を複数の時間帯に分割し，各時間帯内では静的に配分を行う．時間帯間では，各時間帯内で目的地に到達することが出来なかった交通が次の時間帯に持ち越される．この次の時間帯に持ち越された交通量が残留交通量である．本研究での時間帯別配分における仮定は以下の通りである．

1. 一日（もしくは対象とする時間）をある一定の長さの複数の時間帯に分割する
2. 時間帯内でリンクを通過できなかった交通量は次の時間帯へ残留する
3. 残留交通量は，次の時間帯において，残留したリンクの終点のノードから出発し，元々の目的地ノードへ向かうOD交通量として（次の時間帯に）付加される
4. 時間帯内でリンクを通過できなかった交通量はその時間帯内では後続のリンクを通過しない．つまり，後続リンクの旅行時間には影響を及ぼさない．
5. 各時間帯において，3による残留交通量としての追加OD交通量を含めた静的な配分を行う．ただし，4の通り，通常の静的配分とは異なり，OD交通量は全てその時間帯内で目的地に到着するのではなく，その時間帯の終了時点で到達できたリンクまでである．

(2) 時間帯内での配分

本研究での時間帯別配分では，各時間帯内では静的配分によって交通量を配分する．時間帯 $\tau (\in T)$ でのリンク $a (\in A)$ の交通量を $x_{\tau,a}$ とし，$\mathbf{x}_\tau$ を（時間帯 τ）でのリ

ンク交通量ベクトルとする．つまり，$\mathbf{x}_\tau = (x_{\tau,1}, x_{\tau,2}, \ldots, x_{\tau,|A|})^T$ である．なお，^{T}は転置で，A はリンク集合，$|A|$ はリンク総数，Tは時間帯の集合である．また，$f_{\tau,ij}$ は時間帯 τ での OD ペア i ($\in I$) の経路 j ($\in J_i$) の経路交通量で，$\mathbf{f}_\tau$ は（時間帯 τ）での経路交通量ベクトルである．$\mathbf{f}_\tau$ は $f_{\tau,ij}$ を要素に持つ（全ての経路の）経路交通量ベクトルで，$\mathbf{f}_\tau = \left(f_{\tau,11}, \cdots, f_{\tau,21}, \cdots\right)^T$ である．ここで，I は OD ペアの集合で，J_i は OD ペア i の経路集合である．リンク交通量と経路交通量は以下の関係がある．

$$\mathbf{x}_\tau = \Delta \mathbf{f}_\tau \tag{1}$$

ここで，Δ はリンク・経路接続行列で，その要素 $\delta_{a,ij}$ はリンク・経路接続変数で，リンク a がODペア i の経路 j に含まれれば1であり，そうでなければ0である．

時間帯 τ でのリンク a の旅行時間を $t_{\tau,a}$ とする．また，リンク a の旅行時間はリンク a の交通量のみの関数とする．つまり，$t_a(x_{\tau,a})$ である．$t_a(x_{\tau,a})$ を要素関数として持つリンク旅行時間のベクトル値関数を $\mathbf{t}(\mathbf{x}_\tau)$ とすると，経路旅行時間のベクトル値関数 $\mathbf{c}(\mathbf{f}_\tau)$ は，式1を用いると，以下の通りとなる．

$$\mathbf{c}(\mathbf{f}_\tau) = \Delta^T \mathbf{t}(\Delta \mathbf{f}_\tau) \tag{2}$$

既に述べたように，その時間帯内で目的地に到着できなかった交通量は次の時間帯に持ち越される．このような残留交通量を計算するにあたり，どのリンクまで走行して，（そのリンクで）次の時間帯に持ち越されるのかが分かる必要がある．これを容易に特定するために，本研究では経路ベースでの配分を行う．また，単純化のため，経路ベースでの配分を行うに当たり，経路選択はロジットモデルで与えるとする．

OD ペア i 間の経路選択肢集合 J_i から経路 j が選ばれる確率は,

$$p_{\tau,ij} = \frac{\exp(-\theta c_{\tau,ij})}{\sum_{j' \in J_i} \exp(-\theta c_{\tau,ij'})} \tag{3}$$

ここで，$p_{\tau,ij}$ は時間帯 τ でODペア i 間において経路 j が選択される確率，$c_{\tau,ij}$ は時間帯 τ でのODペア i 間の経路 j の旅行コスト(道路料金の時間換算分を含む)，θ は経路選択における正のパラメータである．したがって，経路交通量は以下の式で表わされる．

$$f_{\tau,ij} = q_{\tau,i} p_{\tau,ij} = q_{\tau,i} \frac{\exp(-\theta c_{\tau,ij})}{\sum_{j' \in J_i} \exp(-\theta c_{\tau,ij'})} \tag{4}$$

ここで，$q_{\tau,i}$ は OD ペア i 間の OD 交通量である．また，ここでの経路交通量 $f_{\tau,ij}$ は時間帯 τ に出発する交通量で，必ずしも時間帯 τ で目的地に到着するとは限らず，次の時間帯に残留する部分も含むものである．

式4をベクトル表示するために，対角要素が全て $q_{\tau,i}$ の $|J_i|\times|J_i|$ の対角行列 $\mathbf{Q}_{\tau,i}$ を以下のように定義する．

$$\mathbf{Q}_{\tau,i} = \begin{pmatrix} q_{\tau,i} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & q_{\tau,i} \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{0}$ は零行列もしくは零成分であり，上記は対角成分のみがOD交通量でその他の要素は0の対角行列である．さらに，この対角行列 $\mathbf{Q}_{\tau,i}$ を対角成分にもつ $|J|\times|J|$ の対角行列

$$\mathbf{Q}_\tau = \begin{pmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{Q}_{\tau,i} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6}$$

を設定する．この $\mathbf{Q}_{\tau,i}$ を用いると，経路交通量の式 4 のベクトル表示は以下の通りとなる．

$$\mathbf{f}_\tau = \mathbf{Q}_\tau \mathbf{p}_\tau \tag{7}$$

ここで，$\mathbf{p}_\tau$ は確率 $p_{\tau,ij}$ を要素に持つ選択確率ベクトルで，$\mathbf{p} = (p_{\tau,11}, \cdots, p_{\tau,21}, \cdots)^T$ である．本論文では，今後断りがない限り，ベクトルは列ベクトルとし，基本的にブロック体の小文字はベクトル，ブロック体大文字は行列を表す．

式 3 の通り，経路選択確率は経路コストの関数とすることができ，また，式 2 の通り，経路の旅行コストは経路交通量の関数である．よって，経路選択確率は経路交通量の関数であり，それを $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{f}_\tau) = \mathbf{p}(\mathbf{c}(\mathbf{f}_\tau)) = \mathbf{p}(\Delta^T \mathbf{t}(\Delta\, \mathbf{f}_\tau))$ とする．つまり，$\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{f}_\tau)$ は経路交通量から直接経路選択確率を与えるベクトル値関数である．一方，$\mathbf{p}(\mathbf{c})$ は経路コストから経路選択確率を与えるベクトル値関数である．

以上を踏まえると，交通需要 $\mathbf{Q}_\tau$ が与えられると，時間帯 τ での配分は経路交通量 $\mathbf{f}_\tau$ を求める以下の不動点問題となる．

$$\mathbf{f}_\tau = \mathbf{Q}_\tau \mathbf{p}(\mathbf{c}(\mathbf{f}_\tau)) \tag{8}$$

(3) 残留交通量

時間帯別配分の一つのポイントは，その時間帯内に到着できなかった残留交通量をどのように扱うのかにある．前節での述べたように，簡易にまた明確にどのリンクで残留するのかを特定するために，本研究では，経路ベースで残留交通量を扱う．つまり，各リンクを走行している交通に関して，残留交通量を考える場合，単にそのリンク上の交通量のみから残留交通量を計算するだけでは，その残留交通量が（その後）どの経路を流れるのかや目的地がどこであるのかが分からないためである．経路が決まった状態で，その時間帯内で目的地に到着できない交通量は次の時間帯に残留したリンクを出発点に走行するとする．

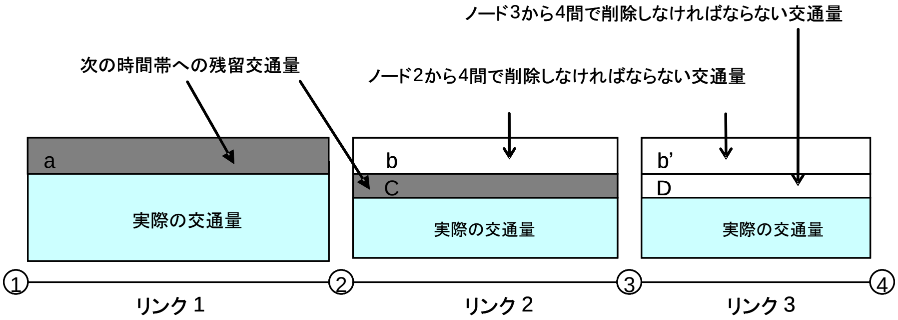


図-1 残留交通量の差し引き

本研究では，時間帯内では静的配分を行う時間帯配分を対象としているため，動的配分のように流入交通量・流出交通量などを交通流理論に基づいて精緻に取り扱うのは過度にモデルを複雑にする可能性がある．本研究では，時間帯内での旅行時間は一定とする．時間帯 τ に出発地ノードを出発する経路交通量 $f_{\tau ij}$ は一定割合で出発地ノードを出発するとする．また，各時間帯の長さは L とする．この時，$f_{\tau ij}/L$ の割合で，経路交通量 $f_{\tau ij}$ は出発地ノードを出発する．時間帯 τ のODペア i の経路 j の旅行時間 $c_{\tau ij}$ が与えられたとすると，経路交通量が目的地に到着するまでの時間は $c_{\tau ij}$ であるため，経路交通量 $f_{\tau ij}$ のうち時間帯 τ の終了時点で目的地ノードに到着できていない残留交通量 $y_{\tau ij}$ は以下の通りとなる．

$$y_{\tau,ij} = \frac{f_{\tau,ij} c_{\tau,ij}}{L} \tag{9}$$

また，経路交通量 $f_{\tau,ij}$ のリンク a での残留交通量 $y_{\tau,ij,a}$ は

$$y_{\tau,ij,a} = \frac{f_{\tau,ij} t_{\tau,a} \delta_{a,ij}}{L} \tag{10}$$

である．この $y_{\tau,ij,a}$ は次に時間帯 $\tau+1$ に繰り越される．繰り越された交通量は，リンク a の終点ノードから出発し，もともとの目的地ノードに向かう交通需要として，時間帯 $\tau+1$ に加えられる．このように全ての経路交通量についてどのリンクで次の時間帯に繰り越されるのかを特定し，それを次の時間帯のOD交通量に足すことにより，次の時間帯のOD交通量が確定する．つまり，時間帯 τ での残留交通量を計算し，次の時間帯 $\tau+1$ のOD交通量，すなわち $\mathbf{Q}_{\tau+1}$ がつくられる．

ここで，時間帯 τ のODペア i の経路 j の旅行時間 $c_{\tau,ij}$ が時間帯幅 L より大きくなった場合，$y_{\tau,ij} > f_{\tau,ij}$ となり，残留交通量が過大評価される．そのため，時間帯 τ のODペア i の経路 j の旅行時間 $c_{\tau,ij}$ について $c_{\tau,ij} \le L$ の場合，$c_{\tau,ij} > L$ の場合で場合分けを行う．$c_{\tau,ij} > L$ の場合，1 台も目的地に到着していないことを考慮するためである．これにより，適切に経路交通量 $f_{\tau,ij}$ のリンク a での残留交通量 $y_{\tau,ij,a}$ を算出することが可能となる．

式10について，当然のことながら，$y_{\tau,ij} = \Sigma_{a\in A}\ \delta_{a,ij}\ y_{\tau,ij,a}$ である．$y_{\tau,ij,a}$ を要素として持つベクトルを以下のように定義する．

$$\mathbf{y}_{\tau,ij} = \begin{pmatrix} y_{\tau,ij,1} \\ \vdots \\ y_{\tau,ij,|A|} \end{pmatrix} = \frac{f_{\tau,ij}}{L}\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f}_{\tau})\boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{11}$$

ここで，$\mathbf{T}$ はリンク旅行時間を対角成分に持つ対角行列で，

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_1(x_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & t_{|A|}(x_{|A|}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

である．また，$\boldsymbol{\delta}_{ij} = (\delta_{1,ij}, \cdots, \delta_{|A|,ij})^T$ である．

時間帯内では静的配分のため，残留交通量を考える上で重要な点がある．静的配分では全てのOD交通量がいずれかの経路を走行し，目的地に到着する．しかし，あるリンクで残留する交通量はその後続のリンクはその出発時間帯では走行しない．**図-1**のようなリンク1～3からなる経路を走行するある時間帯で出発した交通量を考えよう．前の時間からの残留交通量や別の経路交通量を考えないとする．時間帯内では静的配分のため，その出発交通量は3つのリンク全てを走行する計算になる．しかし，リンク1で残留する交通量である図中の a は次の時間帯でリンク2と3を走行するため，静的配分で計算されたリンク2と3のリンク交通量から図中の a 分の交通量を差し引く必要がある．すなわち，b と b' を差し引く必要がある．同様にリンク2で残留する交通量に対してはリンク3の静的配分リンク交通量から差し引く必要がある．以上のように，時間帯内では静的配分を行うため，後続のリンク交通量を残留交通量分を差し引く必要がある．次章で説明するように，残留交通量分を差し引くと，経路旅行時間が変化するため，配分経路交通量（出発交通量）も変化する．通常の最適化問題としての静的配分を各時間帯で行うために，本研究では，これを近似的に扱

うこととし，それに感度分析を用いる．

以上のことをより厳密に扱うために，ODペア i の経路 j の交通量が流れるリンクを出発地ノードから目的地ノードまで順番に並べることを考えよう．ODペア i の経路 j を構成する k 番目のリンクを n_{ijk} と表記する．ODペア i の経路 j の（出発地から）1番目のリンクの残留交通量は $y_{\tau ij,n_{ij1}}$ である．この残留交通量はその時間帯 τ 内では，2番目以降のリンクには流れない交通量である．続いて，2番目のリンクでの残留交通量は $y_{\tau ij,n_{ij2}}$ であり，この残留交通量はその時間帯 τ 内では3番目以降のリンクには流れない．2番目のリンクでは，ODペア i の経路 j の交通量としては $f_{\tau ij}-y_{\tau ij,n_{ij1}}$ しか流入しない．そして，3番目のリンクでは $f_{\tau ij}-y_{\tau ij,n_{ij1}}-y_{\tau ij,n_{ij2}}$ の交通量しか流入しない．つまり，2番目のリンクからは $y_{\tau ij,n_{ij1}}$ を差し引く必要があり，3番目にリンクからは $y_{\tau ij,n_{ij1}}+y_{\tau ij,n_{ij2}}$ を差し引く必要がある．以上のように，ODペア i の経路 j の k 番目のリンクに対して差し引かなければならない交通量は

$$s_{\tau,ij,n_{ijk}}=\sum_{k'}^{k-1}y_{\tau,ij,n_{ijk'}} \tag{13}$$

となる．繰り返しの説明になるが，時間帯内で静的配分を行うため，静的配分はOD交通量はすべて目的地に到着する．一方，時間帯別配分では，残留交通量は次の時間帯を走行するため，次の時間帯で走行する部分については，前の時間帯では走行しないため，前の時間帯での静的配分結果から差し引く必要がある．このことをベクトル表示するために，ODペア i の経路 j を構成するリンクの（出発からの）順番を表わす $|A|\times|A|$ の行列を導入する．行列の a 行 a' 列の要素は，リンク a 及びリンク a' がともにODペア i の経路 j 上のリンクであり，かつ，リンク a がリンク a' よりも出発地ノードに近い場合は1であり，そうでない場合0である．この行列 $\mathbf{B}_{ij}$ を用いると，ODペア i の経路 j のの交通量のうち，その経路上のリンクから差し引かなければならない交通量を

$$\mathbf{s}_{\tau,ij}=\mathbf{B}_{ij}\mathbf{y}_{\tau,ij} \tag{14}$$

と計算することができ，これを全ての経路交通量について足し合わせると，

$$\mathbf{s}_{\tau}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\mathbf{B}_{ij}\mathbf{y}_{\tau,ij} \tag{15}$$

であり，さらに，上の式に式 11 を代入すると，

$$\mathbf{s}_{\tau}=\frac{1}{L}\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f}_{\tau})\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}f_{\tau,ij}\mathbf{B}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{16}$$

となる．ここで，$\mathbf{r}_{ij}=\mathbf{B}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ij}$ とする．また，$\mathbf{R}=(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12},\ldots,\mathbf{r}_{|I||J_I|})$とする．これを式 16 に代入すると，差し引き交通量 $\mathbf{s}_\tau$ は以下の通りである．

$$\mathbf{s}_{\tau}=\frac{1}{L}\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f}_{\tau})\mathbf{R}^T\mathbf{f}_{\tau} \tag{17}$$

差し引き交通量 $\mathbf{s}_\tau$ の成分である $s_{\tau,a}$ は，（残留交通量は後続リンクを走行しないために）リンク a の交通量から差し引かなければならない交通量である．したがって，実際に時間帯 τ にリンク a を通る交通量は $x_{\tau,a}-s_{\tau,a}$ となる．

これを用いると，残留交通量が後続のリンクを流れないことを考慮した実際に流れるリンク交通量ベクトル $\mathbf{z}_\tau$ は

$$\mathbf{z}_{\tau}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}_{\tau}-\mathbf{s}_{\tau} \tag{18}$$

と与えられる．

さらに，残留交通量はその先のリンクには流れないことを考慮した時の時間帯 τ の配分は，式 8 を用いると，

$$\mathbf{f}_{\tau}=\mathbf{Q}_{\tau}\,\mathbf{p}\left(\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{t}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}_{\tau}-\mathbf{s}_{\tau})\right) \tag{19}$$

であり，さらに，上式に式17を代入すると，

$$\mathbf{f}_{\tau}=\mathbf{Q}_{\tau}\,\mathbf{p}\left(\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{t}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}_{\tau}-\frac{1}{L}\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f}_{\tau})\mathbf{R}^T\mathbf{f}_{\tau})\right) \tag{20}$$

となる．残留交通量の影響のため，リンク間交通量に相互作用があるタイプの配分となる．したがって，一般には解が一意とは限らず，最適化問題として定式化もできない．

3. 感度分析による近似

式20を緩和法等で直接解くことも可能であるが，計算時間がかかること，解が一意とは限らないことが問題となる．本章では，それを一意な近似解を得る方法について考える．

以下のような陰関数 $\mathbf{d}(\mathbf{f},\mathbf{s})$ を定義する．

$$\mathbf{d}(\mathbf{f},\mathbf{s})=\mathbf{f}-\mathbf{Q}\mathbf{p}(\Delta^T\mathbf{t}(\Delta\mathbf{f}-\mathbf{s}))=\mathbf{0} \tag{21}$$

ここで，$\mathbf{d}$ は変数 $\mathbf{f}$，$\mathbf{s}$ のベクトル値関数であり，添え字の時間帯 τ を省略している．この $\mathbf{d}$ は確率的利用者均衡が成立するために，$\mathbf{0}$ である．

均衡が制約する上では $\mathbf{d}(\mathbf{f},\mathbf{s})=\mathbf{0}$ とならなければならないため，$\mathbf{s}$ が変動することで，$\mathbf{f}$ も変化する．このことに着目すると，$\mathbf{f}$ は $\mathbf{s}$ の関数とみなせる．つまり，$\mathbf{f}(\mathbf{s})$ である．この $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ という関数は，差し引かなければならない交通量の影響を差し引いた後の配分交通量である．

$\mathbf{f}(\mathbf{s})$ を陽に導出することは困難であるため，ここで，一次のマクローリン展開を用いることにより，$\mathbf{f}(\mathbf{s})$ を近似的に求めることとする．

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{f_0} + \nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}\ \mathbf{s} \tag{22}$$

ここで，$\mathbf{f_0}$ は残留交通量を差し引く前の経路交通量ベクトルであり，$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}$ は残留交通量が 0 の場合（$\mathbf{s}=\mathbf{0}$）の $\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f}$ である．

また，$\mathbf{s}$ は式17によっても与えられているため，簡易的に，通常の静的配分での経路交通量が流れる場合を基準として残留交通量を計算できると仮定すると，残留交通量は

$$\mathbf{s} = \frac{1}{L}\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f_0})\mathbf{R}^T\mathbf{f_0} \tag{23}$$

と近似できる．上式を式22に代入すると，$\mathbf{f}$ は以下のように与えられる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{f_0} + \frac{1}{L}\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}\,\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f_0})\mathbf{R}^T\mathbf{f_0} \tag{24}$$

式 21 の陰関数 $\mathbf{d}(\mathbf{f},\mathbf{s})$ について，一般に$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f}$ は以下のように与えられる．

$$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f} = -\nabla_\mathbf{f}\mathbf{d}^{-1}\nabla_\mathbf{s}\mathbf{d} \tag{25}$$

したがって，

$$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f} = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t}\Delta\right)^{-1}\mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t} \tag{26}$$

であるため，

$$\mathbf{f} = \mathbf{f_0} + \frac{1}{L}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\Delta\right)^{-1}\mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\right]\mathbf{T}(\Delta\mathbf{f_0})\mathbf{R}^T\mathbf{f_0} \tag{27}$$

が得られる．

式27の近似解は，通常の静的配分での経路交通量ベクトル $\mathbf{f_0}$ 及びそれに基づいて計算される$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}$ との行列計算である．通常の静的配分での経路交通量ベクトル $\mathbf{f_0}$ は当然一意に求まり，それに応じて$\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}$ も（一意に）決まる．よって，この近似解は一意に決まる．

本研究では，以上のような近似解1を使うが，より精緻な近似も考え得る．

式17は $\mathbf{s}$ は $\mathbf{f}$ の関数であることを示している．これをテイラー展開により，$\mathbf{f}\,(\mathbf{0})$ のまわり（通常の静的配分での経路交通量のまわり）で一次近似すると，

$$\mathbf{s}(\mathbf{f}) = \mathbf{s_0} + \nabla_\mathbf{f}\mathbf{s_0}\left(\mathbf{f} - \mathbf{f_0}\right) \tag{28}$$

となる．

$$\begin{cases} \mathbf{f} = \mathbf{f_0} + \nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}\ \mathbf{s} \\ \mathbf{s} = \mathbf{s_0} + \nabla_\mathbf{f}\mathbf{s_0}\left(\mathbf{f} - \mathbf{f_0}\right) \end{cases} \tag{29}$$

の連立方程式を解くと，

$$\mathbf{f} = \mathbf{f_0} + \left[\mathbf{I} - \nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}\nabla_\mathbf{f}\mathbf{s_0}\right]^{-1}\nabla_\mathbf{s}\mathbf{f_0}\,\mathbf{s_0} \tag{30}$$

となる．

ここで，式17より，

$$\nabla_\mathbf{f}\mathbf{s} = \frac{1}{L}\left(\nabla_\mathbf{x}\mathbf{T}\mathbf{R}^T\mathbf{f} + \mathbf{T}\mathbf{R}^T\right) \tag{31}$$

となる．ただし，

$$\nabla_\mathbf{x}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{dt_1}{dx_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \dfrac{dt_{|A|}}{dx_{|A|}} \end{pmatrix} \tag{32}$$

である．

以上より，

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \mathbf{f_0} - &\\ &\left[\mathbf{I} + \frac{1}{L}\left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\Delta\right)^{-1}\mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\right)\right.\\ &\left.\times\left(\nabla_\mathbf{x}\mathbf{T_0}\mathbf{R}^T\mathbf{f_0} + \mathbf{T_0}\mathbf{R}^T\right)\right]^{-1}\times\\ &\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\Delta\right)^{-1}\mathbf{Q}\nabla_\mathbf{c}\mathbf{p_0}\nabla_\mathbf{x}\mathbf{t_0}\,\mathbf{s_0} \end{aligned} \tag{33}$$

となる．

これは残留交通量を一次近似したものから導入される一方，式27での近似は残留交通量を0次近似したものから得られたものと言える．近似解1の近似が不十分である場合はこの近似を使うことになるであろう．さらに詳しい近似も考えることができるが，計算はより一層複雑になる．実務上の利用の観点から本研究では，式27の近似を用いる．

4. 単純仮想ネットワークへの適用

(1) 概要

本章では単純仮想ネットワークへの適用を例として，本モデルの配分手順とその特性について述べる．

まず，適用ネットワーク図を図-2に示す．ノード数は

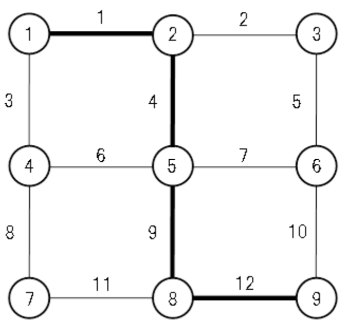


図-2 単純仮想ネットワーク

表-1 リンクパラメータ

リンク番号	自由走行時間(分)	交通容量(台)
1	5	1500
2	10	1000
3	10	1000
4	5	1500
5	10	1000
6	10	1000
7	10	1000
8	10	1000
9	5	1500
10	10	1000
11	10	1000
12	5	1500

9，リンク数は12である．また，リンクパラメータを**表-1**に示す．リンク1，リンク4，リンク9，リンク12は，他のリンクよりも自由走行時間を小さく，交通容量を大きく設定している．

OD交通量は，ノード1からノード9に向かう．時間帯1から時間帯5にそれぞれ1000，2000，1700，1000，500台と設定した．BPR関数のパラメータ値はα=1.0，β=2.0と設定した．

(2) 配分手順とその特性

本モデルは経路ベースでの配分を行うものである．まず，経路選択肢集合を作成する必要があるが，単純仮想ネットワークにおいては，簡単のため，ノード1からノード9への6つ全ての経路を経路選択肢集合とする．

計算手順としては，まず，残留交通量などは考えずに，時間帯ごとに完全に独立に通常の静的配分（確率的利用者均衡配分）を行う．式展開の説明の関係上，式8では不動点問題としているが，最適化問題を解けばよい．実用的に用いることを考えているため，経路選択確率はロジットモデルで与える．この各時間帯独立での配分結果が前章での $\mathbf{f}_0$ となる．

この $\mathbf{f}_0$ を用いて，$\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{p}_0$と$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}_0$を計算する．これは経路交通量が $\mathbf{f}_0$ の時のものであり，数値として容易に計算可能である．それらを式27に代入し，残留交通量が後続リンクを流れないことの調整を近似的に施した出発経路交通量 $\mathbf{f}$ を得る．

この出発経路交通量 $\mathbf{f}$ は各経路を走行する経路交通量であるが，各時間帯で出発する分の経路交通量であることに注意が必要である．

以上の手順を単純仮想ネットワークへ適用した結果を**表-2**，**表-3**に示す．

時間帯1で出発したが，その時間帯内で到着できなかった残留交通量は356台であり，時間帯2のOD交通量2000台とそれとの合計である2365台が時間帯2で走行する交通量となる．そして，この時間帯2で走行する交通量を用いて，目的地ノード9に向かう交通量を配分する．

リンク1，リンク4，リンク9，リンク12は，他のリンクよりも自由走行時間を小さく，交通容量を大きく設定することで，比較的に交通量の多いリンクであると想定している．各時間帯での配分リンク交通量について，**表-3**より，この想定通りの結果となっていることがわかる．

表-2　単純ネットワークでの残留交通量

	時間帯1	時間帯2	時間帯3	時間帯4	時間帯5
OD交通量（台）	1000	2000	1700	1000	500
出発台数（台）	1000	2365	2759	1987	1012
到着台数（台）	635	1306	1772	1476	800
残留交通量（台）	365	1059	987	512	212

表-3　単純ネットワークでの配分リンク交通量

リンク番号	時間帯1	時間帯2	時間帯3	時間帯4	時間帯5
1	775.77	1318.04	1157.65	765.70	413.78
2	73.76	347.85	298.12	117.14	33.15
3	224.22	681.95	542.34	234.30	86.22
4	702.01	1052.14	1054.17	802.49	461.06
5	73.76	360.21	363.11	171.25	52.94
6	155.27	384.99	368.45	223.23	91.98
7	173.85	522.39	507.33	301.88	114.78
8	68.96	336.21	340.41	128.05	35.43
9	683.43	1012.56	1119.79	924.82	563.32
10	247.61	924.81	1049.09	647.94	252.00
11	68.96	347.76	402.77	191.35	57.12
12	752.39	1440.63	1710.36	1339.54	759.89

5. 金沢都市圏道路ネットワークへの適用

(1) 概要

本研究の時間帯別配分モデルを金沢市の道路ネットワークに適用する．適用ネットワークでのノード数は272，リンク数は(片方向を1本として)964である．適用ネットワークを**図-3**に示す．道路の旅行時間は標準BPR関数に従うものとし，自由走行時間，交通容量は現況道路の制限速度，車線数，車道幅員を考慮して設定した．

本稿において使用した近似モデルは，上記で述べた近似解1である．

(2) 計算における条件設定

以下に，条件設定を記す．

・自動車交通のみを考える．

・自動車の乗車人員を 1.0（人/台）とする．

・時間帯幅は 60（分）とし，朝のピーク時間の午前 6 時から 9 時までを対象とする．

・自動車の旅行時間の BPR 関数は標準 BPR 関数（α=1.0, β=2.0）を用いる．

・1OD につき，経路は最大 3 経路に限定する．

OD交通量は，平成7年度・第3回金沢都市圏パーソントリップ調査における，全目的別データを集計することにより得たものである．また，今回対象とする朝ピーク

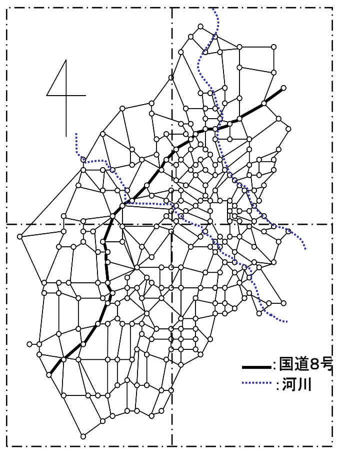


図-3　金沢市道路ネットワーク

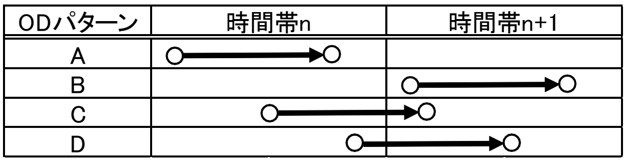
の時間帯別のODデータの概略を**表-4**に示す．

また，**表-5**に示すトリップパターンのうち，A・B・Cについては時間帯n，Bについては時間帯$n+1$のOD交通量としている．このようなもともとのOD交通量に加えて，時間帯内で到着できず，残留交通量となったものもOD交通量と同様の扱いとなる．**表-5**のCとD がそれに該当する．もともとのOD交通量に対する経路に加えて，残留交通量に対する経路も加わり，経路数が多数になる．

表-4　OD表(6時台～8時台)

	ODペア数	OD交通量
6時台	391	10396
7時台	2630	71968
8時台	3906	61945

表-5　トリップパターン



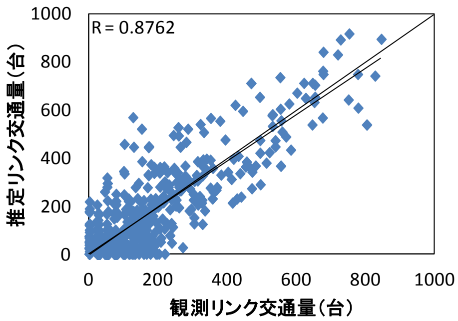


図-4　観測値と推定値の比較(6時台)

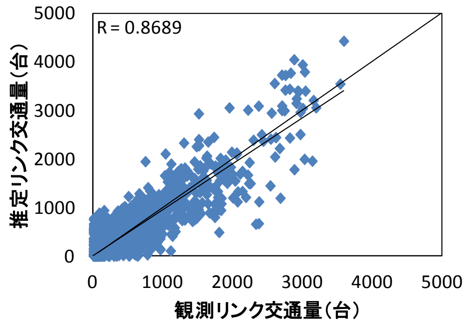


図-5　観測値と推定値の比較(7時台)

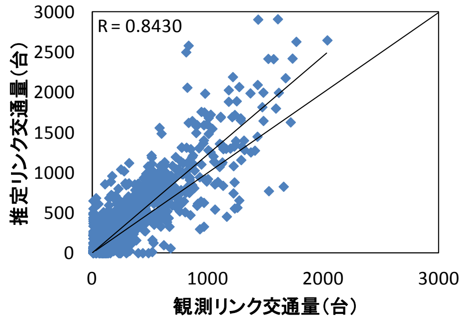


図-6　観測値と推定値の比較(8時台)

残留交通量は次の時間帯では，OD交通量と同様の扱いになるが，次の時間帯での出発ノードは必ずしももともとのOD交通量の出発ノードに含まれるとは限らず，ODペア数が実質的に増えるためである．この理由から，本金沢都市圏ネットワークの例では，1ODにつき，経路は最大3 経路に限定した．前述の通り，本研究は経路ベースでの配分を行うものである．そこで，配分計算を行う前準備として，最短経路探索によって経路選択肢集合を作成している．経路の限定はこの際に行う．

(3)　適用結果

本稿では，6 時台から8 時台まで順に交通量を配分する．**図-4**，**図-5**，**図-6**に本モデルによるリンク交通量の推定値と観測値の比較を示す． 今回は，PT調査における経路交通量データを集計したものを観測値として使用する．

図-4～**図-6**から，各時間とも相関係数は0.84～0.88であり，配分結果の妥当性を確認することができた．しかしながら，**図-5**からは，7時台は若干の過小推定であり，**図-6**から，8 時台は過大推定の傾向があることが分かる．これは，7 時台は混雑しており，残留交通量が多く計算され，その残留交通量が8 時台に走行し，8 時台は過大の傾向になったと考えられる．各時間帯の残留交通量はそれぞれ順に，1,727台・32,207台・12,576台であり，これらを比較しても上記の配分結果が過小・過大評価になったことが説明できる．しかしながら，観測交通量の集計上の問題の可能性もある．いずれにせよ，時間帯配分時の残留交通量の計算法のみならず観測交通量の集計方法ともより精緻化が今後の課題であると言える．

また，特に交通量の多い7 時台について，算出した残留交通量をネットワーク図上にプロットしたものを**図-7**に示す．これは，時間帯間の交通ネットワークの状況を示しているものと捉えることができる．本モデルは計算上，時間帯幅の設定を任意に行うことができるモデルとなっている．したがって，時間帯幅を現在の設定よりも細かく刻むことにより，ピーク時間帯における交通状況をより正確に把握することが可能となる．

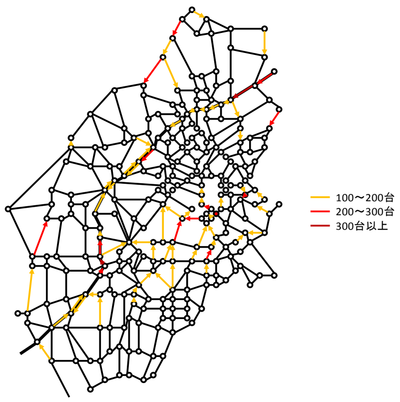


図-7　残留交通量プロット図(7時台)

5. おわりに

本研究では，リンク上の交通量が次の時間帯に残留することによって，交通ネットワーク上で混雑の時間・空間移動を表現できる時間帯別均衡配分モデルを提案した．また，感度分析を用いて近似的に計算することにより，解の一意性があるとともに，各時間帯では通常の確率利用者均衡の計算を行うだけでよい．

本モデルを単純仮想ネットワーク及び金沢都市圏の道路ネットワークに適用し，モデルの特性や妥当性を検証した．時間帯を考慮した交通施策の評価において，本モデルによってより精緻な評価が可能になると期待できる．今後の課題としては，前章で述べたように，時間帯配分時の残留交通量の計算法のみならず観測交通量の集計方法の改良，経路数が多くなることに対する対応などがあげられる．また，感度分析による近似で得られる解と近似を行わずに得られる解を比較する必要性がある．この場合，近似を行わない計算手法・アルゴリズムの開発が必要である．

参考文献

1) 藤田素弘，松井寛，溝上章志：時間帯別交通量配分モデルの開発と実用化に関する研究，土木学会論文集，No. 389/IV-8，pp. 111-119，1988.
2) 宮城俊彦，牧村和彦：時間帯別交通配分手法に関する研究，交通工学，Vol. 26，No. 2，pp. 17-28，1991.
3) 藤田素弘，山本幸司，松井寛：渋滞を考慮した時間帯別交通量配分モデルの開発，土木学会論文集，No. 407/IV-11，pp. 129-138，1989.
4) 赤松隆，牧野幸雄，高橋栄行：時間帯別 OD 需要とリンクでの渋滞を内生化した準動的交通配分，土木計画学研究・論文集，No. 15，pp. 535-545，1998.
5) 菊池志郎，赤松隆：リンクの流入・流出交通量を内生化した時間帯別交通均衡配分に関する基礎的研究，土木計画学研究・論文集，No. 24，pp. 577-585，2006.
6) 中山晶一朗：混雑の時空間移動を考慮した準動的配分モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp. 340-353，2008.

(?)

A SEMI-DYNAMIC TRAFFIC ASSIGNMENT MODEL WITH ENDOGENEOUS TRAFFIC CONGESTION USING THE SENSITIVITY ANALYSIS

Yuuya ITAGAKI, Shoichiro NAKAYAMA, Jun-ichi TAKAYAMA, and Makoto FUJIU

Semi-dynamic traffic assignment enable us to deal with with-day dynamic traffic network state practically. In semi-dynamic traffic assignment, static assignment is applied within each period. Flow that cannot reach its destination in the period is propagated to the next period, so semi-dyanmic traffic assignment considers a kind of dynamics between the periods. Some previous semi-dynamic traffic assignment models are practically applicable, but most of them are not able to consider time-space movement of traffic congestion. This is mainly becase all OD flow reach its destination within the period if static traffic assignment is applied in each period. In this study, using sentivity analysis, traffic flow approximately influences the links that it travels within the period. This enables us to deal with time-space movement of traffic congestion more appropriately.