

準モンテカルロ法を用いた 多段階ワイブル劣化ハザードモデルの ベイズ推定法

坂口創¹・水谷大二郎²・貝戸清之³・小林潔司⁴

¹学生会員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: s.sakaguchi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻・日本学術振興会特別研究員 DC (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

⁴フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

社会基盤施設のアセットマネジメントにおいて、施設の劣化状態を予測することが重要である。現在までに、初期時刻からの経過年数を考慮した多段階ワイブル劣化ハザードモデルを最尤推定する方法論が開発されている。しかしこの方法論は膨大な計算時間を要することから、劣化予測をする際には、施設の劣化過程を時間に定常的なマルコフ推移確率を仮定して表現した、マルコフ劣化ハザードモデルを用いるのが主流となっている。本研究では、数値計算法として準モンテカルロ法を適用し、計算時間の短縮を実現する。さらにマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を用いて、未知パラメータの事後分布を効率的にベイズ推定する方法論を提案する。

Key Words : *multi-stage Weibull deterioration hazard model, quasi Monte Carlo method, Bayesian estimation, asset management*

1. はじめに

近年、社会基盤施設の老朽化が急速に進展している。これは我が国の高度経済成長期に、現在供用中の社会基盤施設の多くが建設されたためである。しかし、社会基盤施設の点検・更新や補修・補強に際して使用できる予算は限られており、国民や道路利用者に対して、社会基盤施設に対する維持管理の重要性、それに伴う予算確保の必要性を説明していくことが重要である。しかし、従来、社会基盤施設の維持管理における意思決定は、専門技術者の知見と現場で獲得された点検情報を直接的に用いることにより判断されており、社会基盤施設の劣化過程を客観的かつ定量的に表現することが困難であった。しかしこれらの意思決定プロセスでは、第三者への説明責任を果たすには不十分であり、現場の専門技術者の勘だけではなく、社会基盤施設の劣化状態を定量化することが求められていた。このような背景のもと、近年、現場で蓄積されてきた目視点検データに基づく統計的劣化予測手法が数多く整備されてきた^{1),2)}。

本研究では、特に、社会基盤施設の劣化の進展状況が離散的な健全度を用いて記録されているような点検

データを対象とする。このような点検結果を用いた場合、マルコフ連鎖モデルが有用となり、特に、非集計的にマルコフ推移確率を推定するためのマルコフ劣化ハザードモデル³⁾の開発以降、マルコフ推移確率の推定精度が格段に向上している。さらに、マルコフ劣化ハザードモデルの推定手法に関しても、モデル開発当時の最尤推定法に加え、ベイズ推定法を用いた推定手法⁴⁾も開発され、事後分布を用いた推定結果の信頼性評価や、隠れマルコフモデルや混合確率モデルへのモデルの高度化も可能となった⁵⁾⁻⁷⁾。しかし、これらのマルコフ連鎖モデルにおいては、時間に対して定常的なマルコフ推移確率を仮定した上で、社会基盤施設の劣化過程を表現している。一方で、青木等⁸⁾は、寿命の比較的短い施設に対して定常的なマルコフ連鎖を用いた場合、施設の寿命を過大推定してしまう可能性を示し、その解決策として時間依存的な状態推移確率を推定するための多段階ワイブル劣化ハザードモデルを開発し、最尤推定法を用いた推定手法も併せて提案している。時間依存的な劣化過程に対する劣化予測モデルの推定結果の信頼性評価や今後の発展可能性を考えた場合、多段階ワイブル劣化ハザードモデルに関してもそのベイズ推定法を開発することが望ましい。しかし、その際、

時間依存的な状態推移確率を推定するという多段階ワイブル劣化ハザードモデルの特性から、状態推移確率の計算に膨大な計算時間を要することが問題となる。

本研究では、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメータをベイズ推定する方法論を提案する。さらに、具体的な数値計算法として、超一様分布列（準乱数）を用いた準モンテカルロ法をもとに多段階ワイブル劣化ハザードモデルの状態推移確率を計算するための方法論を開発することで、従来の方法論において要していた膨大な計算負荷を大幅に軽減する。以下、**2.**では、本研究の基本的な考え方を述べる。**3.**では、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの概要について説明する。**4.**で、準モンテカルロ法を用いた方法論を提案し、**5.**で、多段階ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推定法を詳述する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 統計的劣化予測手法

社会基盤施設のアセットマネジメントにおいて、統計的劣化予測手法は施設の補修戦略や予算配分の問題を検討するために必要となる。そのため、本研究で対象とするハザードモデルを用いた方法論に限っても、現在までに様々な統計的劣化予測手法が提案されてきた。例えば、劣化状態が故障の有無といった2値状態で表されるような施設や機器を対象としたワイブル劣化ハザードモデル^{1),2)}や、2つ以上の任意の多段階の離散的な健全度間における推移状態を表現したマルコフ劣化ハザードモデル³⁾が開発されている。マルコフ劣化ハザードモデルの開発により、社会基盤施設の劣化過程を表すマルコフ連鎖モデルのマルコフ推移確率を非集計的に推定するための方法論が確立され、その推定精度は飛躍的に向上した。さらには、モデルの推定手法に関しても、マルコフ劣化ハザードモデル開発当時の最尤推定法に加え、ベイズ推定法による推定手法⁴⁾も開発され、モデルの未知パラメータを事後分布として取り扱うことによって、推定結果の信頼性評価が可能となった。それと同時に、モデル自体に関しても高度化が進められ、隠れマルコフモデル⁵⁾⁻⁷⁾や混合モデル⁹⁾の開発によって、より高精度、あるいは、より実務に即した劣化予測結果を求めることが可能となった。

一方で、本研究の実証分析で対象とする高速道路橋の伸縮装置や道路付帯施設といった比較的寿命の短い施設に関しては、施設の供用開始時刻からの経過時間が短く、その劣化過程が時間依存性を持ち、マルコフ過程に従わない場合が少なくない。そこで、青木等⁸⁾は時間依存項を有する複数のハザード関数を内包した多段階ワイブル劣化ハザードモデルを開発し、道路付帯施

設を対象とした適用事例を通じてその有用性を示した。一方で、多段階ワイブル劣化ハザードモデルに対して、マルコフ劣化ハザードモデルのようにモデルの高度化が図られた事例は過去には存在しない。その理由として、多段階ワイブル劣化ハザードモデルでは健全度の同時生起確率に含まれる多重積分を数値計算により求める必要があり、モデル開発時点の二重指数関数型積分公式¹⁰⁾や準モンテカルロ法¹⁰⁾の一種である優良格子点法¹⁰⁾では、計算負荷が膨大である点があげられる。そこで、本研究では、まず、超一様分布列（準乱数）を用いた準モンテカルロ法（以下、特別な断りがない限り、本稿では、超一様分布列を用いた準モンテカルロ法を単に「準モンテカルロ法」と呼ぶ）により、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの推定に要する時間を短縮するための方法論を提案する。このように、社会基盤施設のアセットマネジメントにおける劣化予測モデルに対し、準モンテカルロ法を適用した事例はおろか、劣化予測モデルの推定のための計算負荷の低減を議論の対象とし、定量的な評価を行った事例は、著者等の知る限り、過去には存在しない。

(2) ベイズ推定

前述の計算負荷も起因して、これまで、多段階ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推定するための方法論は開発されていない。そこで本研究では、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの推定に準モンテカルロ法を用いて計算時間を短縮することにより、多段階ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推定する方法論を開発する。ハザードモデルにベイズ推定を適用する場合、ハザードモデルのパラメータに関する事前分布と事後分布の間に共役性が成立しない。そのために、事後分布を解析的に求めることが不可能となり、実用化の障害となっていた。しかし、近年のマルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov Chain Monte Carlo Method; 以下、MCMC法という）に基づくベイズ推定の発展により¹¹⁾、従来では推定が困難であった複雑な劣化事象の予測が可能となった。実際に、津田等¹²⁾はワイブル劣化ハザードモデルを、貝戸・小林⁴⁾はマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推定する方法を提案し、1) 経験的情報を事前分布として推定結果に反映できる点、2) 事後分布や信用区間を用いて推定結果の信頼性を評価できる点を主な利点としてあげている。

さらには、**2.(1)**で述べた、マルコフ劣化ハザードモデルを拡張した、隠れマルコフ劣化モデルや混合モデルの開発には、ベイズ推定の資するところが大きい。例えば、隠れマルコフ劣化モデルにおいては、完備化尤度関数に含まれる潜在変数の全条件付き事後確率が未知パラメータを含むため、最尤推定法を用いることは

できず、MCMC法を用いて反復的に潜在変数を発生させることにより、未知パラメータを推定している。さらに、混合マルコフ劣化ハザードモデル¹³⁾では、最尤推定法では異質性パラメータに分布形を仮定したパラメトリックな方法によってのみモデルを推定することが可能であったが、ベイズ推定（特に、階層ベイズ推定）を用いることにより、ノンパラメトリックに異質性パラメータを推定することが可能となるため、結果的に推定精度を向上させることが可能となった⁹⁾。そのため、多段階ワイブル劣化ハザードモデルに関しても、本研究で、そのベイズ推定法を開発することにより、多段階ワイブル劣化ハザードモデルに対しベイズ推定固有の利点を生かすことのみならず、混合モデルや非斉次隠れマルコフモデルなどへの拡張可能性を大幅に増加させることができると考える。

(3) 準モンテカルロ法

多段階ワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメータを推定するにあたり、健全度間の推移確率に、解析的に求めることが困難な多重積分項が含まれている。そのため、健全度間の状態推移確率の計算に数値計算法を用いなければならない。そこで、本研究では、準モンテカルロ法の考え方を取り入れ、多段階ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推定する方法論を開発する。

準モンテカルロ法は、モンテカルロ法で用いる乱数の代わりに超一様分布列（準乱数）を適用した数値計算法である。これまで一般的に知られていた準モンテカルロ法の特徴としては、低次元の場合にはモンテカルロ法に比べ早い収束を実現することができることが挙げられる。超一様分布列は乱数と違い、ランダム性を満たす必要はない。また4.において詳述するが、収束誤差に関しても、モンテカルロ法ではサンプル数の平方根に反比例しているため、精度を10倍にするためには100倍の計算時間を要することになるのに対し、準モンテカルロ法の収束誤差はサンプル数に反比例しているため、精度を10倍にするなら、計算時間も10倍で済むのである¹⁴⁾。このような理由から、準モンテカルロ法を適用することで収束が速くなる。準モンテカルロ法が利用された代表例としては、1960年代のソ連において、水爆開発に必要なモンテカルロ計算の高速化に、超一様分布列が用いられていた¹⁵⁾。しかし、当時の実験結果などからは、高次元（50次元以上）の数値計算では、超一様分布列の有用性は示されなかった。ただ近年になり、金融工学に関連した高次元数値積分の計算が実用上重要になり、その高速化が必要不可欠となったため、高次元の数値積分に関する研究が米国において集中的に行なわれた。その結果、1000次元以上の高次元においても、問題によっては、超一様分布

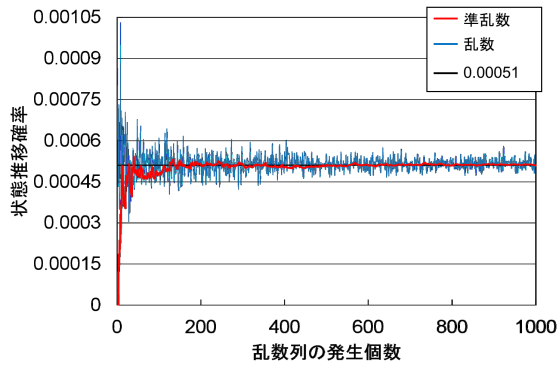
列による高速化が可能となった。このように、超一様分布列の改良が進み、高次元の数値積分においてもモンテカルロ法の収束速度を上回るような点列が提案されている。

準モンテカルロ法は比較的新しい手法ではあるが、金融工学の分野で積極的に開発が進められ¹⁴⁾、計算物理や統計計算などで現れる高次元積分などにおいて実用例が蓄積されるとともに、その有用性が認められている。たとえば、金融の分野では、千数次元という高次元となることが問題であったが、準モンテカルロ法を利用することで、今までモンテカルロ法では2日半かかっていた計算を、わずか1分で処理できたことが報告されている¹⁶⁾。

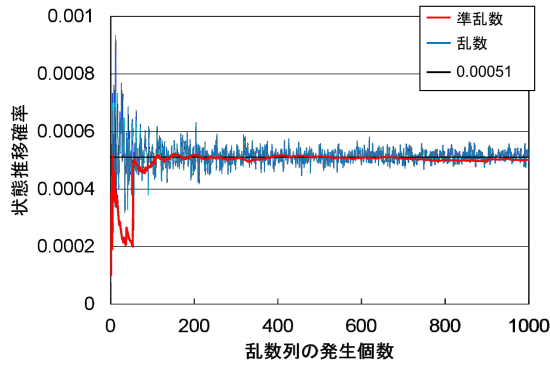
本研究においては、田村・白川¹⁷⁾が提案している、Faure列を改良して準モンテカルロ法の収束をさらに加速させた超一様分布列である、一般化Faure列を用いて多段階ワイブル劣化ハザードモデルの多重積分値を数値計算する。一般化Faure列を用いた準モンテカルロ法については、4.で詳述する。

(4) 推定精度と計算時間の関係

まず、多段階ワイブル劣化ハザードモデルにモンテカルロ法を用いた場合と準モンテカルロ法を用いた場合の推定精度について比較してみよう。この検証に関しては、適用事例で使用した目視点検データを用いて行った。検証方法は、多段階ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータと目視点検の点検間隔をある一定の値に固定した上で、3.で詳述する各健全度間における劣化過程の状態推移確率を数値計算する。乱数列の発生個数を1個、2個、3個...と1個ずつ増加させ、発生個数が1000個になるまで数値計算を繰り返す。乱数列の発生個数により、モンテカルロ法と準モンテカルロ法のそれぞれから算出された各健全度間の状態推移確率がどのように収束していくかを確認することで、数値計算の推定精度を比較する。すべての健全度間の状態推移確率に対してモンテカルロ法と準モンテカルロ法のどちらを適用した場合に収束が速くなるか検討した結果、すべての健全度間において準モンテカルロ法を用いた場合に収束が早くなることが確認できた。本稿ではその一つの例として、供用開始時、1回目の点検時、2回目の点検時の健全度 i が、 $i=1$ 、 $i=1$ 、 $i=3$ と推移し、また供用開始から1回目の点検までの経過時間を5年、1回目の点検から2回目の点検までの経過時間を1年とした場合の状態推移確率が、乱数列の発生個数によってどのように収束していくかを図-1に示している。また高次元になっても本研究で適用する準モンテカルロ法が有用であることを示すため、5次元と50次元の2種類の次元数で数値計算を行った。同図の

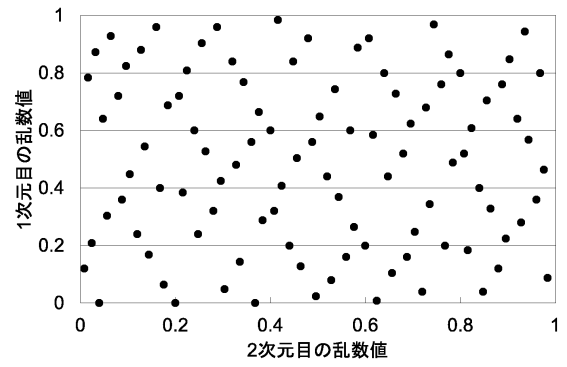


(a) 10 次元

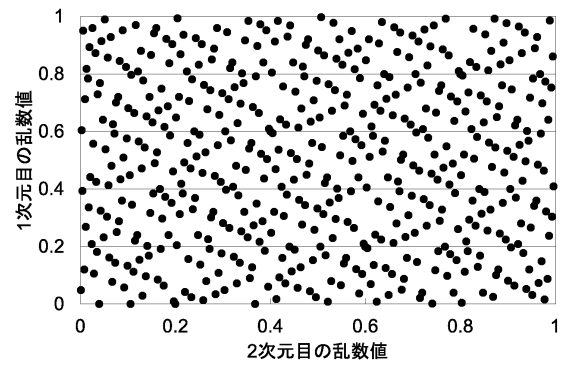


(b) 50 次元

図-1 乱数列の発生個数と状態推移確率の関係



(a) 100 個発生させた時の散布図



(b) 500 個発生させた時の散布図

図-2 乱数列の発生個数による一様性の比較

赤線は準モンテカルロ法を用いた場合の状態推移確率、青線はモンテカルロ法を用いた場合の状態推移確率の推移を示している。また収束していくべき値（収束値）を明らかにするため、乱数列を 10000 個発生させた場合の状態推移確率を算出しており、その値が 0.00051 であった。準モンテカルロ法を用いた場合の状態推移確率は、乱数列の発生個数が 200 個に到達する以前に収束値に収束しており、そのばらつきも非常に小さくなっている。一方、モンテカルロ法を用いた場合には、収束するまでに要する乱数列の発生個数は 200 個程度ではあるものの、状態推移確率のばらつきが準モンテカルロ法を用いた場合に比べて大きくなっていることが確認できる。出来る限り少ない計算回数で、精度良く数値計算の値を算出するには、準モンテカルロ法を適用した方がいいと考えられる。また、今回の検証においてはモンテカルロ法でも準モンテカルロ法でも計算に要する時間は 1 秒未満であり、大きな違いは見られなかった。数値計算を行うために要する時間に関しては、PC の性能やプログラムの作成方法などに依存することは否めないが、モンテカルロ法を用いた場合と準モンテカルロ法を用いた場合の計算時間に大きな違いがなければ、数値計算に準モンテカルロ法を用いた手

法の方が有用であると考えられる。また、本研究において用いたプログラム言語は Matlab であったことを参考までに述べておく。

次に、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの推定を行う際、準乱数を何個発生させるかを考えよう。なぜなら、準乱数の発生個数を増やすほど推定精度は向上するが、計算時間が増大するというような、推定精度と計算負荷がトレードオフの関係にあるためである。図-2 には乱数列の発生個数によって、準乱数の一様性がどのように変化しているかを示している。同図 (a) は乱数列を 100 個発生させた場合の散布図を示しており、同図 (b) は乱数列を 500 個発生させた場合の散布図を示している。乱数列を増やすほど、点列の配置が一様になっていることが確認できる。そこで、発生させた点列の一様性を表現した規準と乱数列の発生個数がどのような関係にあるかを検証する。

k 次元単位立方体 $[0, 1]^k$ 上で生成された N 個の点列の配置が、 N 個の理想的な一様分布からどの程度ずれているかを表す指標として、 L_∞ ディスクレパンシーがある。しかし L_∞ ディスクレパンシーは一般的に計算が困難であるため、代替的に L_2 ディスクレパンシーが一様性の規準として用いられている。よって、準乱数

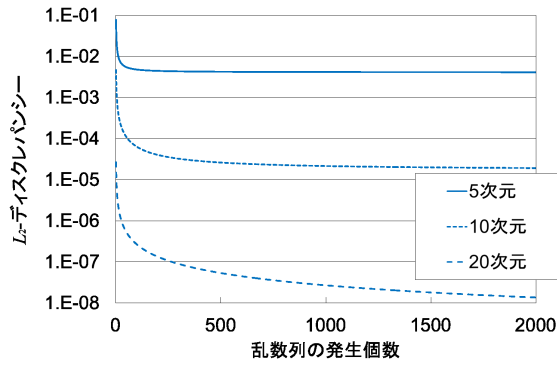


図-3 乱数列の発生個数と L_2 ディスクレパンシーの関係

の発生個数に関しても、 L_2 ディスクレパンシーと乱数列の発生個数の関係性を明らかにすることで検討する。今回の検証では、乱数列の発生個数を 2000 個と設定し、次元数については 5 次元、10 次元、20 次元の 3 種類について検証を行った。図-3 には、乱数列の発生個数と 3 種類の次元数における準乱数の L_2 ディスクレパンシーの関係を示している。ここで、本研究で適用する超一様分布列である一般化 Faure 列の L_2 ディスクレパンシーが、Faure 列や式 (29) で表現される k 次元単位立方体 $[0, 1]^k$ 上に一様分布している N 個の点の L_2 ディスクレパンシーの二乗の平均よりも小さくなり、一様性が高くなることを確認している^{17), 18)}。同図から 5 次元においては乱数列の発生個数が 100 回程度で、10 次元においては乱数列の発生個数が 500 回程度で L_2 ディスクレパンシーが収束していることを確認することができる。しかし、20 次元においては乱数列の発生個数を 2000 回にしても十分に収束しているとは言い難い。ただ、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの推定において、数値計算における次元数が 20 次元以上になる場合は稀であるため、本研究において次元数が 20 次元以上の場合における準乱数の計算回数の検討は省略する。本研究で使用する目視点検データの健全度は 4 段階に設定されており、数値計算を行う際の次元数は 5 次元であったため、準モンテカルロ法における計算回数は 500 回に設定し、推定を行った。また図-1 の (b) のように 50 次元の数値計算においても、計算の推定値は乱数列の発生個数が 200 個程度で収束しているため、10 次元程度までであれば準モンテカルロ法の計算回数は 500 回程度で十分であると考えられる。

3. 多段階ワイブル劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

多段階ワイブル劣化ハザードモデルは参考文献⁸⁾に詳しいが、読者の便宜を図るため、本章でその概要につ

いて説明する。社会基盤施設の推移過程は不確実であり、将来生起する状態を確定的に予測できない。供用開始時刻から、ある一定の使用時間 s を経過した時刻における施設の劣化状態を時間依存的な状態確率で表現する。いま、時刻 τ_0 で使用が開始されたある施設の劣化予測を行う問題を考えよう。供用開始時刻から使用時間 s が経過したカレンダー時刻 $\tau = \tau_0 + s$ における当該施設の健全度を状態変数 $h(s)$ を用いて表そう。劣化過程は、使用開始時刻 τ_0 から時間 s が経過した時刻 $\tau = \tau_0 + s$ において健全度 $h(s) = i$ ($i = 1, \dots, I$) が生起する確率 (以下、状態推移確率と呼ぶ) を用いて記述される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(s) = i | h(0) = 1] = \pi_i(s) \quad (1)$$

と表せる。このような状態推移確率を健全度 i ($i = 1, \dots, I$) に対して定義すれば、時間依存的な状態推移確率ベクトル

$$\mathbf{\Pi}(s) = \begin{pmatrix} \pi_1(s) \\ \vdots \\ \pi_I(s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

を得ることができる。ただし、健全度 I は施設が最も劣化した状態を表している。また、状態推移確率の定義より $\sum_{i=1}^I \pi_i(s) = 1$ が成立する。さらに、社会基盤施設に対して、供用開始以降、複数の時刻に複数回の点検がなされている場合を考えよう。いま、供用開始時刻 τ_0 から使用時間 s_A が経過した 1 回目の点検時刻 $\tau_A = \tau_0 + s_A$ で健全度 $h(s_A) = i$ ($i = 1, \dots, I$) が観測され、時刻 τ_A から使用時間 s_B が経過した時刻 $\tau_B = \tau_A + s_B = \tau_0 + s_A + s_B$ で健全度 $h(s_A + s_B) = j$ ($j = i, \dots, I$) が観測される同時生起確率を、

$$\pi_{ij}(s_A, s_B) = \text{Prob}[h(s_A) = i, h(s_A + s_B) = j] \quad (3)$$

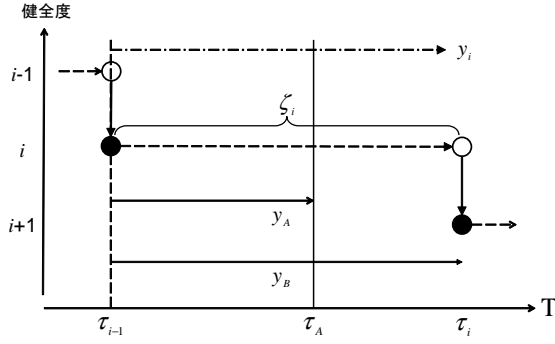
と表す。同時生起確率 (3) を用いて、健全度の同時生起確率行列を

$$\mathbf{\Pi}(s_A, s_B) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(s_A, s_B) & \cdots & \pi_{1I}(s_A, s_B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II}(s_A, s_B) \end{pmatrix} \quad (4)$$

と表現することができる。

(2) ハザード関数の特定化

状態推移確率 (1)、同時生起確率 (3) をハザードモデルを用いて定義する。ハザードモデルの詳細は参考文献^{19), 20)}に譲るが、読者の便宜を図るためにハザードモデルを簡単に紹介する。さらに、議論を簡単にするために、施設の劣化状態に関する完全情報が獲得できる場合を考える。いま、社会基盤施設の劣化過程を図-4 に示すようにモデル化する。すなわち、カレンダー時



注) カレンダー時刻 τ_{i-1} に健全度が $i-1$ から i に変化した場合、検査が行われる時刻 τ_A は時刻 τ_{i-1} を起点とするサンプル時点 y_A と対応する。図中の劣化サンプルパスの場合、時点 y_B に健全度が1つ進行する。目視点検の場合、時刻 τ_{i-1} を観測できないため、サンプル時間軸上の時点 y_A, y_B も観測できない。

図-4 劣化過程のモデル化

刻 τ_{i-1} において、健全度が $i-1$ から i に推移したと考える。ここで、カレンダー時刻 τ_{i-1} を初期時点 $y_i = 0$ とする時間軸（以下、サンプル時間軸と呼ぶ）を導入する。サンプル時間軸上の時刻を、以下「時点」と呼び、カレンダー時間軸上の「時刻」とは区別する。サンプル時間軸上の時点 y_A と、カレンダー時刻 τ_A と τ_{i-1} の間には $y_A = \tau_A - \tau_{i-1}$ が成立する。

いま、時刻 τ_i において、健全度が i から $i+1$ に推移すると考える。この時、当該の施設の健全度が i に留まる期間長（以下、健全度 i の寿命と呼ぶ）は、 $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ と表せる。健全度 i の寿命 ζ_i は確率変数であり、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。ただし、健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の寿命 ζ_i の定義域は $[0, \infty)$ である。ここで、施設の健全度が時点 y_i まで i であり、かつ期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に健全度 $i+1$ に進展する条件付き確率は、

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (5)$$

と表せる。いま、対象とする施設の健全度が時点 y_i まで i の状態で推移し、かつ時点 y_i で $i+1$ に推移する確率密度 $\lambda_i(y_i)$ をハザード関数と呼ぶ。ハザード関数として、ワイブルハザード関数以外に多様な形式が提案されている^{19), 20)}。本研究では、社会基盤施設の劣化過程がワイブルハザード関数に従うと仮定する。このことにより、社会基盤施設の非定常な劣化過程を非齊次マルコフ連鎖モデルにより表現することができる。以下では、ハザード関数としてワイブルハザード関数を採用した場合を対象に議論を進めよう。すなわち、ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ に関して、

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \alpha_i y_i^{\alpha_i - 1} \quad (6)$$

が成立する。 θ_i は健全度 i に固有の定数パラメータ、 α_i は劣化の加速度パラメータである。 $\alpha_i > 1$ の場合は、初期時点からの使用時間 y_i が増加するにつれて加速度的に劣化が進行することを表す。逆に、 $\alpha_i < 1$ が成立する場合は、初期劣化が進むものの、使用時間が経過するにつれて、劣化の進行の程度が小さくなる。 $\alpha_i = 1$ の場合は、劣化の進行速度が使用時間に依存しないことを意味する。ワイブルハザード関数を用いれば、健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(y_i) &= \exp \left[- \int_0^{y_i} \lambda_i(u) du \right] \\ &= \exp(-\theta_i y_i^{\alpha_i}) \end{aligned} \quad (7)$$

と表され、ワイブルハザードモデルが得られる。また、健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の寿命分布を表す確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ は次式で示される⁸⁾。

$$f_i(\zeta_i) = \theta_i \alpha_i \zeta_i^{\alpha_i - 1} \exp(-\theta_i \zeta_i^{\alpha_i}) \quad (8)$$

(3) 多段階ワイブル劣化ハザードモデル

a) 初期時刻からの状態推移確率

まず、状態推移確率(1)を定式化しよう。時刻 τ_0 に施設の使用が開始され（時刻 τ_0 に健全度1が観測され）、現在時刻 τ の健全度が i であることが観測された場合を考える。この時、期間 $[\tau_0, \tau]$ において健全度が1から健全度 i に推移する確率 $\pi_i(s)$ は、

$$\pi_i(s) = \begin{cases} \exp(-\theta_1 s^{\alpha_1}) & (i = 1) \\ \int_0^s \int_0^{s-\zeta_1} \dots \int_0^{s-\sum_{m=1}^{i-2} \zeta_m} q_i(s, \zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-1} & (2 \leq i < I) \\ 1 - \sum_{m=1}^{I-1} \pi_m(s) & (i = I) \end{cases} \quad (9)$$

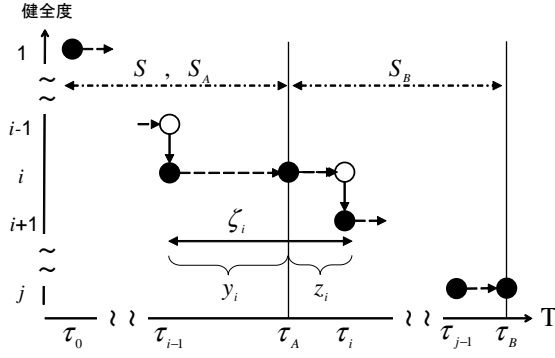
$$q_i(s, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{i-1}) = \prod_{m=1}^{i-1} f_m(\bar{\zeta}_m) \tilde{F}_i(s - \sum_{m=1}^{i-1} \bar{\zeta}_m) \quad (10)$$

$$(i = 2, \dots, I-1)$$

と表すことができる⁸⁾。ただし、 $s = \tau - \tau_0$ である。このように、状態推移確率(1)は、1) 健全度 m ($m = 1, \dots, i-1$) の寿命 ζ_m を $\bar{\zeta}_m$ に固定し、式(11)に示した寿命 $\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{i-1}$ の同時生起確率密度 $q_i(s, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{i-1})$ を求める、2) 寿命 $\bar{\zeta}_m$ を $0 \leq \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{i-1} < s$ を満たす確率変数 ζ_m として捉え、式(9)に示すように積分を行い状態推移確率(1)を計算する、という手順に従い定式化することができる。

b) 複数時刻における健全度の同時生起確率

複数の時刻 $\tau_A = \tau_0 + s_A$ 、 $\tau_B = \tau_0 + s_A + s_B$ に健全度 $h(s_A) = i$ ($i = 1, \dots, I$)、 $h(s_A + s_B) = j$ ($j = i, \dots, I$) が観測される同時生起確率を定義する。すなわち、図-5に示すように、時刻 τ_0 に使用が開始され、時刻 τ_A で



注) 初期時刻 τ_0 から時間 s が経過した時刻 τ (図中では τ_A) に健全度 i が観測される。3.b) では、2つの検査時刻 τ_A と τ_B に着目する ($s_A = \tau_A - \tau_0$, $s_B = \tau_B - \tau_A$)。その場合、時刻 τ_{i-1} から時刻 τ_A までの期間長を y_i 、時刻 τ_A から時刻 τ_i までの期間長を z_i と表し、健全度 i の寿命を $\zeta_i = y_i + z_i$ と表す。

図-5 初期時刻からの劣化過程と健全度の観測

健全度 i が観測され、時刻 τ_B で健全度 j が観測される事象が同時に生起する確率 $\pi_{ij}(s_A, s_B)$ を求める問題を考える。

いま、健全度 i から j までのそれぞれの寿命 ζ_m ($m = i, \dots, j$) を $\bar{\zeta}_m$ に固定しよう。時刻 $\bar{\tau}_m$ に健全度が m から $m+1$ に推移すると考えたとき、図-5 に示すように、 $\bar{\zeta}_i = \bar{y}_i + \bar{z}_i$, $\bar{\tau}_i - \tau_A = \bar{z}_i$, $\tau_A - \bar{\tau}_{i-1} = \bar{y}_i$ が成立すると考える。このとき、 \bar{y}_i が獲得されたという条件のもとでの、寿命 $\bar{\zeta}_{i+1}, \dots, \bar{\zeta}_{j-1}$ の条件付き同時生起確率密度 $g_{ij}(s_B, \bar{z}_i, \bar{\zeta}_{i+1}, \dots, \bar{\zeta}_{j-1} | \bar{y}_i)$ は

$$g_{ij}(s_B, \bar{z}_i, \bar{\zeta}_{i+1}, \dots, \bar{\zeta}_{j-1} | \bar{y}_i) = \frac{f_i(\bar{y}_i + \bar{z}_i)}{\tilde{F}_i(\bar{y}_i)} \prod_{m=i+1}^{j-1} f_m(\bar{\zeta}_m) \tilde{F}_j(s_B - \bar{z}_i - \sum_{m=i+1}^{j-1} \bar{\zeta}_m) \quad (11)$$

と定義される。以上の議論では $\bar{z}_i, \bar{\zeta}_{i+1}, \dots, \bar{\zeta}_{j-1}$ を固定していた。ここで、 $z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1}$ を $0 \leq z_i + \sum_{m=i+1}^{j-1} \zeta_m < s_B$ を満足する範囲の中で自由な値をとりうる確率変数として扱おう。このとき、目視点検時刻 τ_A において健全度 i の状態で時間 \bar{y}_i が経過したという条件の下で、2回目の検査時刻 $\tau_B = \tau_A + s_B$ において健全度 j が観測される条件付き確率 $\kappa_{ij}(s_B | \bar{y}_i)$ は

$$\kappa_{ij}(s_B | \bar{y}_i) = \int_0^{s_B} \int_0^{s_B - z_i} \dots \int_0^{s_B - z_i - \sum_{m=i+1}^{j-2} \zeta_m} g_{ij}(s_B, z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1} | \bar{y}_i) dz_i d\zeta_{i+1} \dots d\zeta_{j-1} \quad (12)$$

と表せる。以上では、 \bar{y}_i を固定して議論していたが、 y_i は $0 \leq y_i \leq s_A$ の範囲で自由な値を取る。時刻 $\tau_{i-1} =$

$\tau_A - y_i$ に健全度が i に推移する確率密度 $\eta_i(s_A, y_i)$ は

$$\eta_i(s_A, y_i) = \left\{ \int_0^{s_A - y_i} \int_0^{s_A - y_i - \zeta_1} \dots \int_0^{s_A - y_i - \sum_{m'=1}^{i-3} \zeta_{m'}} \prod_{m'=1}^{i-1} f_{m'}(\zeta_{m'}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-2} \right\} \tilde{F}_i(y_i) \quad (13)$$

$$\zeta_{i-1} = s_A - y_i - \sum_{m'=1}^{i-2} \zeta_{m'}$$

と表せる。この時、使用開始時刻から時間 s_A が経過した後の第1回目の検査時刻 τ_A で健全度 i が観測され、さらにそれより時間 s_B が経過した第2回目の検査時刻 $\tau_B = \tau_0 + s_A + s_B$ において健全度 j が観測される同時生起確率 $\pi_{ij}(s_A, s_B)$ は、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(s_A, s_B) &= \text{Prob}[h(s_A) = i, h(s_A + s_B) = j] \\ &= \int_0^{s_A} \eta_i(s_A, y_i) \kappa_{ij}(s_B | y_i) dy_i \\ &= \int_0^{s_A} \int_0^{s_A - y_i} \int_0^{s_A - y_i - \zeta_1} \dots \int_0^{s_A - y_i - \sum_{m'=1}^{i-3} \zeta_{m'}} \\ &\quad \int_0^{s_B} \int_0^{s_B - z_i} \int_0^{s_B - z_i - \zeta_1} \dots \int_0^{s_B - z_i - \sum_{m=i+1}^{j-2} \zeta_m} \\ &\quad f_i(y_i + z_i) \prod_{m'=1}^{i-1} f_{m'}(\zeta_{m'}) \prod_{m=i+1}^{j-1} f_m(\zeta_m) \\ &\quad \tilde{F}_j(s_B - z_i - \sum_{m=i+1}^{j-1} \zeta_m) dy_i d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-2} \\ &\quad dz_i d\zeta_{i+1} \dots d\zeta_{j-1} \quad (14) \\ &\quad \zeta_{i-1} = s_A - y_i - \sum_{m'=1}^{i-2} \zeta_{m'} \end{aligned}$$

と表せる。なお、目視点検時刻 τ_A において健全度 I が観測される確率は式 (9) で表される。また、検査時刻 τ_A において健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) が観測され、検査時刻 τ_B において健全度 I が観測される確率 $\pi_{iI}(s_A, s_B)$ は

$$\pi_{iI}(s_A, s_B) = \pi_i(s_A) - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(s_A, s_B) \quad (15)$$

と表される。以上のように、状態推移確率を定義できるが、それを明示的に関数形を用いて表現することは不可能である。状態推移確率を求めるためには多重積分値を数値計算法により求めることが必要となる。

(4) アセットマネジメントのための管理指標

多段階ワイブル劣化ハザードモデルに基づいて、社会基盤施設のアセットマネジメントのための管理指標を導出しよう。まず、ある健全度 i に到達した時刻 τ_i から、劣化が進展して次の健全度 $i+1$ に移行するまで

の期待期間長（以下、健全度期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて

$$RMD(i) = \int_0^{\infty} \tilde{F}_i(y_i) dy_i \quad (16)$$

と表すことができる¹⁹⁾。ここで、ワイブルハザード関数を用いた生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ が式 (7) で表されることに留意すれば、健全度期待寿命は

$$RMD(i) = \int_0^{\infty} \exp(-\theta_i y_i^{\alpha_i}) dy_i \quad (17)$$

と表される。しかし、限られた時刻に実施される目視点検により健全度を観測する場合、ある健全度に到達した時刻 τ_i に関するデータを獲得することができない。そこで、このような社会基盤施設を管理する場合、初期時刻からの使用時間 s と目視点検で観測された健全度 i に基づいて期待余寿命を定義した方が便利である。まず、初期時刻から健全度 i が終了し、つぎの健全度 $i+1$ に推移するまでの期待余寿命 $RL(i)$ （以下、健全度 i までの初期期待寿命と呼ぶ）を定義しよう。そのために、初期時刻から使用時間 s が経過した時刻 $\tau = \tau_0 + s$ において健全度 i が終了する（健全度 $i+1$ が開始する）確率密度を

$$\rho_i(s) = \int_0^s \int_0^{s-\zeta_1} \dots \int_0^{s-\sum_{m=1}^{i-2} \zeta_m} \prod_{m=1}^{i-1} f_m(\zeta_m) f_i(s - \sum_{m=1}^{i-1} \zeta_m) d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-1} \quad (18)$$

と定義しよう。 $RL(i)$ は初期時刻から健全度 i の状態が終了するまでの期待期間長であり、

$$RL(i) = \int_0^{\infty} s \rho_i(s) ds \quad (19)$$

と表すことができる。ワイブルハザード関数を用いた場合、健全度 i までの初期期待寿命 $RL(i)$ と各健全度の期待寿命 $RMD(m)$ の和 $\sum_{m=1}^i RMD(m)$ が一致する保証はない。つぎに、初期時刻から時間 s_A が経過した時刻 τ_A に健全度 i が観測されたと考えよう。式 (14) を利用すれば、目視点検時刻 $\tau_A = \tau_0 + s_A$ で健全度 i が観察されたのちに、時刻 τ_A から時間 s が経過した時刻で健全度 j が終了する条件付き確率密度 $\nu_j(s|h(s_A) = i)$ は

$$\begin{aligned} \nu_j(s|h(s_A) = i) &= \frac{1}{\pi_i(s_A)} \left\{ \int_0^{s_A} \int_0^{s_A-y_i} \int_0^{s_A-y_i-\zeta_1} \dots \right. \\ &\quad \int_0^{s_A-y_i-\sum_{m'=1}^{i-3} \zeta_{m'}} \int_0^s \int_0^{s-z_i} \dots \\ &\quad \int_0^{s-z_i-\sum_{m'=i+1}^{j-2} \zeta_{m'}} f_i(y_i + z_i) \prod_{m'=1}^{i-1} f_{m'}(\zeta_{m'}) \\ &\quad \left. \prod_{m=i+1}^{j-1} f_m(\zeta_m) f_j(s - z_i - \sum_{m=i+1}^{j-1} \zeta_m) dy_i d\zeta_1 \dots d\zeta_{i-2} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. dz_i d\zeta_{i+1} \dots d\zeta_{j-1} \right\} \quad (i \leq j; i, j = 1, \dots, I-1) \quad (20)$$

$$\zeta_{i-1} = s_A - y_i - \sum_{m'=1}^{i-2} \zeta_{m'}$$

と定義される。この時、初期時刻から時間 s_A が経過した時刻で実施された目視点検で健全度 i が観測された時に、健全度 j ($j \geq i$) が終了するまでの期待余寿命（以下、条件付き期待余寿命と呼ぶ） $RL_j(h(s_A) = i)$ は

$$RL_j(h(s_A) = i) = \int_0^{\infty} s \nu_j(s|h(s_A) = i) ds \quad (21)$$

$$(i \leq j; i, j = 1, \dots, I-1)$$

と表される。

4. 準モンテカルロ法

(1) モンテカルロ法と準モンテカルロ法

本研究においては、数値計算法を用いることで多段階ワイブル劣化ハザードモデルの状態推移確率を求め、代表的な数値計算法として、モンテカルロ法と準モンテカルロ法が挙げられる。この2つの方法の異なる点は、乱数と超一様分布列（準乱数）のどちらを用いるかに限られる。モンテカルロ法の特徴としては、適用範囲が広いため、他の数値計算法に比べ容易に適用することができる。特に、台数公式や二重指数関数型積分公式¹⁰⁾では適用が困難な多次元の数値積分に対しても適用できる点、モンテカルロ法の利点である。しかし、高い推定精度が要求される場合には、計算負荷が膨大になってしまうため、計算に要する時間が膨大になる。一方、準モンテカルロ法は、モンテカルロ法に比べ収束速度が速い。これは準モンテカルロ法の計算誤差に関連している。しかし、準モンテカルロ法の計算誤差は数値計算の次元数に依存しており、多次元になるほど計算誤差が大きくなる点が欠点である。そのため、多次元の数値計算を行う際には、モンテカルロ法を適用することが、従来では一般的であった。

ここで、モンテカルロ法および準モンテカルロ法による数値計算の方法について簡易的にではあるが説明する。

まず、 k 次元単位超立方体上の積分である

$$I = \int_{[0,1]^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (22)$$

について考える。数値計算法によって、この積分をどのような近似式で表現するかが異なる。モンテカルロ法および準モンテカルロ法では、この積分に対して

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(r_i) \quad (23)$$

と近似式を定義する。ここで、 N は乱数列の発生個数であり、 r_1, \dots, r_N はある点列を表している。

モンテカルロ法と準モンテカルロ法の異なる点は、このある点列 r_1, \dots, r_N の生成法である。モンテカルロ法においては、乱数を用いることにより、点列を生成している。すなわちこの点列がランダム性を有している確率論的な方法となり、数値計算の試行回数を多くするほど積分の近似値を算出することができる。この場合の計算誤差は

$$|I - I_N| < \sqrt{\frac{\log N}{N}} \quad (24)$$

であることが知られている²¹⁾。

一方、準モンテカルロ法においては、超一様分布列を用いることにより、点列を生成している。超一様分布列については **4.(2)** にて詳述するが、モンテカルロ法とは異なり、確率論的なものではないため、準モンテカルロ法は数論的数値積分法ともいわれている。この場合の計算誤差は

$$|I - I_N| < \frac{(\log N)^k}{N} \quad (25)$$

である。

このように、モンテカルロ法と準モンテカルロ法では計算誤差に違いがある。先述したように、モンテカルロ法は確率論的手法であり、準モンテカルロ法は数論的手法であるので、両者の収束スピードを比較することは容易ではないが、よく用いられる比較方法は、精度が1桁違うことに着目した方法である。モンテカルロ法においては、サンプル数の平方根に反比例しているのに対し、準モンテカルロ法においては、サンプル数に反比例する。よって、精度を1桁上げようとするれば、モンテカルロ法では試行回数を100倍にしなければいけないのに対し、準モンテカルロ法では10倍で済む。しかし、準モンテカルロ法の計算誤差は次元数に依存しており、次元数が大きくなるほど収束が遅くなる。よって、従来では高次元になるとモンテカルロ法の方が準モンテカルロ法よりも有効であると考えられていた。

しかし近年、金融工学の分野において収束の速い数値計算法の開発が急務となり、超一様分布列を用いた準モンテカルロ法に関する研究が、米国において急速に進展した。その結果、非常に高い次元（1000次元以上）においても数値積分の高速化を可能とする超一様分布列が開発された。**4.(2)** にて、代表的な超一様分布列について説明し、**4.(3)** にて、本研究で適用する超一様分布列である、一般化 Faure 列について詳述する。

(2) 超一様分布列

本研究では、超一様分布列という数論的な方法で生成される点列を使用する。これは特に点列の分布の一様性を高めつつ、効率的に計算精度を向上させる方法である。超一様分布列を使う準モンテカルロ法を数値計

算に使うことの理論的根拠は、次式の Koksma-Hlawka 不等式で表される¹⁵⁾。

$$\left| \int_{[0,1]^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) \right| \leq V_f D_N^{(k)} \quad (26)$$

ここで V_f は Hardy-Krause の意味における関数 f の全変動とよばれる量であり、被積分関数 f の積分領域上での変動を表し、 V_f が有限ならば被積分関数は有界変動となる。これは被積分関数のみで決まる量で、点列によらない。一方、 $D_N^{(k)}$ は有限個の点列の分布が理想的な一様分布からどの程度のずれを持っているかを表す尺度であり、 L_∞ ディスクレパンシーという。これは点列の一様性のみで決まり、被積分関数によらない量である。よって、 L_∞ ディスクレパンシーが最小となる点列、すなわち一様性ができるだけ高い点列を用いたとき、積分の収束が速い最適なアルゴリズムとなる。ここで、 L_∞ ディスクレパンシーを $D_N^{(k)}$ で表現すると

$$D_N^{(k)} = \sup_{\mathbf{y} \in [0,1]^k} \left| \frac{\#(E(\mathbf{y}); N)}{N} - \prod_{i=1}^k y_i \right| \quad (27)$$

で表される。ここで、 $P = \mathbf{x}_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ を $[0,1]^k$ の点集合とし、 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ を $[0,1]^k$ の点とし、 $E(\mathbf{y})$ を $[0,1]^k$ の部分集合、つまり $[0, y_1] \times \dots \times [0, y_k]$ として定義する。 $\#(E(\mathbf{y}); N)$ は $E(\mathbf{y})$ 中の要素 $\mathbf{x}_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ の個数を表すとする。しかし、 L_∞ ディスクレパンシーは計算が非常に困難であることが知られており、一様性の規準としては代替的に L_2 ディスクレパンシーが用いられる。 L_2 ディスクレパンシーを $T_N^{(k)}$ とすると、次式によって数値的に表される。

$$\begin{aligned} & (T_N^{(k)})^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \prod_{i=1}^k (1 - \max(x_n^{(i)}, x_m^{(i)})) \\ & \quad - \frac{2^{1-k}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^k (1 - (x_n^{(i)})^2) + 3^{-k} \end{aligned} \quad (28)$$

なお L_2 ディスクレパンシーの二乗の期待値は次式で表される。

$$E((T_N^{(k)})^2) = \frac{2^{-k} - 3^{-k}}{N} \quad (29)$$

ここで、超一様分布列の定義を示す。 k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ に属する（無限）点列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ は、任意の $N > 1$ に対して、初めの N 点のディスクレパンシーが以下の条件を満たすとき、超一様分布列と呼ばれる。

$$D_N^{(k)} \leq c(k) \frac{(\log N)^k}{N} \quad (30)$$

ここで $c(k)$ は次元 k のみに依存する定数である。

既存の超一様分布列としては、1次元の場合の van der Corput 列や、 s 次元の場合の Sobol' 列、Faure 列、Halton 列や Niederreiter 列が知られている。本研究で

は Faure 列をもとにした超一様分布列を用いるため、ここでは Faure 列の生成アルゴリズムを示す。

点列 $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})$ は次のように与えられる。基数 b を次元 k 以上の最小の素数とする。第 1 次元目 $x_n^{(1)}$ は、この基数 b による基底逆関数により得られ、基数 b による整数 n の *digit* 展開を

$$n = a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \dots + a_1 b + a_0 \quad (31)$$

とすると、

$$x_n^{(1)} = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_{r-1}}{b^r} + \frac{a_r}{b^{r+1}} \quad (32)$$

である。以降、第 $i (\geq 2)$ 次元目 $x_n^{(i)}$ は

$$x_n^{(i)} = \frac{a_0^{(i)}}{b} + \frac{a_1^{(i)}}{b^2} + \dots + \frac{a_{r-1}^{(i)}}{b^r} + \frac{a_r^{(i)}}{b^{r+1}} \quad (33)$$

となる。ただし

$$a_j^{(i)} = \sum_{l=j}^{\infty} {}_l C_j (i-1)^{l-j} a_l \pmod{b} \quad (34)$$

で与えられる。行列表現形では、第 i 次元目 $x_n^{(i)}$ を

$$x_n^{(i)} = \frac{a_0^{(i)}}{b} + \frac{a_1^{(i)}}{b^2} + \dots + \frac{a_r^{(i)}}{b^{r+1}} \quad (35)$$

とすれば、

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_r^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_r^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_0 C_0 & {}_1 C_0 & {}_2 C_0 & \cdots \\ & {}_1 C_1 & {}_2 C_1 & \cdots \\ & & {}_2 C_2 & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \pmod{b}, i \geq 2 \quad (37)$$

と表現することができる。

通常 Faure 列の L_2 ディスクレパンシーは、次元が増加するにつれ、著しく悪くなることが知られている。これは Faure 列の生成方法より、最初の b (基数) 個は全ての次元の成分が同じとなり、さらに次元 k の増加に伴いこの基数 b も増加することに起因する。すなわち、次元が高くなるにつれて初期の生成列の特異な性質が、 L_2 ディスクレパンシーに大きな影響を与え続けるのである。これらの問題点を解消し、高次元においても数値積分の高速化を実現させた超一様分布列である、一般化 Faure 列を次節で詳述する。

(3) 本研究で用いる超一様分布列の構成法

本研究では、田村ら¹⁷⁾が提案した一般化 Faure 列を用いる。この超一様分布列は、次元の増加に伴う一様性の低下という Faure 列の欠点を改善するために、前

節で示した既存の Faure 列をもとに 3 つの改良を施している。一般化 Faure 列の生成法に関しては、参考文献¹⁷⁾に詳しいが、読者の便宜を図るために詳述する。

第 1 の改良では、Faure 列を基数個単位で各次元ごとに成分をずらし、元々の Faure 列の第 i 次元の生成行列 (式 (36),(37)) に $diag(i, \dots, i)$ を掛ける処理を施す。式 (37) を改良すると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_r^{(i)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} {}_0 C_0 & {}_1 C_0 & {}_2 C_0 & \cdots \\ & {}_1 C_1 & {}_2 C_1 & \cdots \\ & & {}_2 C_2 & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \pmod{b}, i \geq 2 \quad (38)$$

ここで、行列 P は以下のように表される。

$$P = \begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ただし次元 k と基数 b が一致する場合には、最後の次元には基数より小さい任意の整数 (≥ 1) を掛けるものとする。この処理により、1,2 次元の場合は従来の Faure 列と変わらないものの、高次元においては L_2 ディスクレパンシーの向上が期待できる。

しかし、数値計算の性能向上には、サンプルパスの独立増分性が重要となるため、 L_2 ディスクレパンシーの改良だけでは不十分である。そこで改良 1 での Faure 列の生成行において、掛ける整数の順番の単調性にランダムな性質が現れるよう、基数 b を法とする原始根 p を適当に選び、その i 乗の値 p^i (ただし b を法とした値、 \pmod{b}) により、第 i 次元の生成行列に掛ける対角行列を構成し、改良 Faure 列 2 を生成させる。改良 Faure 列 2 を以下に示す。

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_r^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \\ & & q & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_r^{(i)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} {}_0 C_0 & {}_1 C_0 & {}_2 C_0 & \cdots \\ & {}_1 C_1 & {}_2 C_1 & \cdots \\ & & {}_2 C_2 & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \pmod{b}, i \geq 2 \quad (40)$$

ただし、

$$q = \text{基数 } b \text{ を法とするある原始根}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_i & & & \\ & p_i & & \\ & & p_i & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$p_i = q^i \pmod{b}$$

この操作によって、掛ける整数は基数 b より小さい整数を一見ランダムな順番であるかのように、かつ 1 から $b-1$ までの整数を重複することなく、ただか 1 回ずつ拾っていくことができる。特に $k = b-1$ の場合には、原始根の性質から、 1 から k の値を必ず 1 回ずつ使うことになる。

しかし改良 2 のシミュレーションにおける効果は、次元の入れ替えに用いる原始根に大きく依存する。そこで改良 3 では、改良 2 で計算した各要素に、 i だけの平行移動を施し、原始根による次元の入れ替えの効果を、よりランダムに引き出せるよう改良した。以上の改良を施した Faure 列を一般化 Faure 列として以下に示す。

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_r^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \\ & & q & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_r^{(i)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} {}_0C_0 & {}_1C_0 & {}_2C_0 & \cdots \\ & {}_1C_1 & {}_2C_1 & \cdots \\ & & {}_2C_2 & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} i \\ i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} \pmod{b}, i \geq 2 \quad (43)$$

ただし、

$q =$ 基数 b を法とするある原始根

$$P = \begin{pmatrix} p_i & & & \\ & p_i & & \\ & & p_i & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$p_i = q^i \pmod{b}$$

以上の生成方法により得られる一般化 Faure 列から点列をサンプリングし、準モンテカルロ法を用いて状態推移確率の数値積分を行う。

5. ベイズ推定

(1) ベイズの定理と MCMC 法

多段階ワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメータをベイズ推定する。ベイズ推定法では、パラメータは確率変数として扱われ、事後分布として推定される。このことにより、点検データが十分に蓄積されていない場合においても、推定結果の信頼性を事後分布を用いて評価することが可能となる。また、ベイズ推定法では、パラメータの事前分布を経験的な情報に基づき設定することができる。パラメータの事前分布と、観測データに基づき定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推定する。まず、尤度関数を $\mathcal{L}(\gamma)$ と表そう。 $\gamma = (\alpha, \beta)$ は未知パラメータベクトルであり、 Ξ は観測データ（目視点検データ）である。いま、 γ が確率変数であり、事前確率密度関数 $\pi(\gamma)$ に従うと仮定する。このとき、観測データ Ξ が与件のとき、未知パラメータベクトル γ の同時事後確率密度関数 $\pi(\gamma|\Xi)$ は、ベイズの定理より、

$$\pi(\gamma|\Xi) \propto \mathcal{L}(\gamma|\Xi)\pi(\gamma) \quad (45)$$

と表現できる。劣化ハザードモデルにおいては、同時事後確率密度関数である式 (45) を解析的に求めることはもとより、同時事後確率密度関数からの直接サンプリングも困難である。そのため、本研究では、代表的な MCMC 法の 1 つであるギブスサンプリングの考えに基づき、各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて数値計算により同時事後確率密度関数を算出する。なお、多段階ワイブル劣化ハザードモデルにおいて、ギブスサンプリングでの各パラメータの条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングすることも困難であるため、それぞれに対し、MCMC 法の 1 種である MH 法を用いる。

(2) 尤度関数の定式化

社会基盤施設に関する K 個の目視点検データが得られたとする。表記を簡略化するために点検サンプルには、サンプル 1 から k' までの k' 個の初期時刻と 1 回目の点検サンプルと、サンプル $k' + 1$ から K までの $K - k'$ 個の 2 回の点検サンプルで構成されていると考える。なお、議論の見通しを良くするために、初期時刻から 2 回の検査結果が獲得できる場合には、3 回以上の目視点検が実施された場合も、1 回目と 2 回目、2 回目と 3 回目等、2 回の目視点検が繰り返されると考える。

まず、検査サンプル k ($k = 1, \dots, k'$) に対して、当該サンプル施設の使用が開始された初期時刻 τ_0^k 、目視点検が実施されたカレンダー時刻 τ_A^k と、検査で計測された施設の健全度のレーティング $h(\delta^k)$ に関するデータのみが獲得できる場合を考えよう。ただし、記号「 $\bar{\cdot}$ 」

は実測値であることを示す。また、 $\bar{s}^k = \bar{\tau}_A^k - \bar{\tau}_0^k$ は検査サンプル k の使用時間である。さらに、検査時刻における健全度データに基づいて、ダミー変数ベクトル $\bar{\delta}^k = \{\bar{\delta}_i^k (i = 1, \dots, I)\}$ ($k = 1, \dots, k'$) の各要素を

$$\bar{\delta}_i^k = \begin{cases} 1 & h(\bar{s}^k) = i \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (46)$$

と定義する。

一方で、点検サンプル k ($k = k' + 1, \dots, K$) に関しては、当該サンプル施設の使用が開始された初期時刻 $\bar{\tau}_0^k$ と 2 回の目視点検が実施されたカレンダー時刻 $\bar{\tau}_A^k, \bar{\tau}_B^k$ と、検査で計測された施設の健全度 $h(\bar{s}_A^k), h(\bar{s}_A^k + \bar{s}_B^k)$ に関するデータが獲得できると考える。ただし、 $\bar{s}_A^k = \bar{\tau}_A^k - \bar{\tau}_0^k, \bar{s}_B^k = \bar{\tau}_B^k - \bar{\tau}_A^k$ である。さらに、ダミー変数ベクトル $\bar{\delta}^k = \{\bar{\delta}_{ij}^k (i = 1, \dots, I - 1, j = 1, \dots, I)\}$ ($k = k' + 1, \dots, K$) の各要素を

$$\bar{\delta}_{ij}^k = \begin{cases} 1 & h(\bar{s}_A^k) = i, h(\bar{s}_A^k + \bar{s}_B^k) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (47)$$

と定義する。

さらに、社会基盤施設の劣化速度に影響を及ぼす社会基盤施設の構造特性や使用環境を表す特性ベクトルを $\bar{\mathbf{x}}^k = (\bar{x}_1^k, \dots, \bar{x}_N^k)$ と表す。ただし、 \bar{x}_n^k ($n = 1, \dots, N$) は検査サンプル k の n 番目の特性変数の観測値を表す。検査サンプル k が有するデータは $\xi^k = (\bar{\delta}^k, \bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ として整理できる。ただし、 $\bar{s}^k = \bar{s}^k$ ($k = 1, \dots, k'$)、 $\bar{s}^k = (\bar{s}_A^k, \bar{s}_B^k)$ である。ここで、検査サンプル k ($k = 1, \dots, K$) の劣化過程をワイブルハザード関数

$$\lambda_i^k(y_i) = \theta_i^k \alpha_i y_i^{\alpha_i - 1} \quad (i = 1, \dots, I - 1) \quad (48)$$

を用いて表現することを考える。健全度 I は劣化過程の吸収状態であり、 $\lim_{s \rightarrow \infty} \pi_I(s) = 1$ が成立するためハザード率は定義されない。社会基盤施設の劣化過程を特徴づけるハザード率 θ_i^k ($i = 1, \dots, I - 1; k = 1, \dots, K$) は社会基盤施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え、ハザード率 θ_i^k を特性ベクトル $\bar{\mathbf{x}}^k$ を用いて

$$\theta_i^k = \exp(\bar{\mathbf{x}}^k \beta_i') \quad (49)$$

と表す。ただし、 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,N})$ は未知パラメータ $\beta_{i,n}$ ($n = 1, \dots, N$) による行ベクトルである。記号「'」は転置操作を表す。状態推移確率、あるいは複数時刻における健全度同時生起確率の推定手順の第 1 段階では、検査サンプルデータ ξ^k ($k = 1, \dots, K$) に基づいてワイブルハザード関数 $\lambda_i^k(y_i)$ を推定することになる。

検査サンプル k に関して獲得できるデータは $\xi^k = (\bar{\delta}^k, \bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ である。状態推移確率はワイブルハザード関数を用いて式 (9) のように表すことができる。複数時刻における健全度の同時生起確率はワイブルハザード関数を用いて式 (14), (15) のように表せる。ハザード率は社会基盤施設の特性ベクトル $\bar{\mathbf{x}}^k$ を用いて式 (49) で表現できる。また、状態推移確率はデータが観察された使用

時間 \bar{s}^k にも依存する。このことを明示的に表すため状態推移確率 $\pi_i(\bar{s}^k)$ を目視点検による実測データ $(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ と未知パラメータベクトル $\gamma = \{\alpha, \beta_i (i = 1, \dots, I - 1)\}$ の関数として $\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)$ と表す。ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1})$ は未知パラメータ α_i ($i = 1, \dots, I - 1$) によるベクトルである。健全度の同時生起確率 $\pi_{ij}(\bar{s}_A^k, \bar{s}_B^k)$ についても同様の考え方のもとで、目視点検による実測データ $(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ と未知パラメータ γ の関数として $\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)$ と表す。いま、 K 個の社会基盤施設の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば、全検査サンプルの劣化状態の分布パターン of の同時生起確率密度を表す尤度関数は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, \xi) &= \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)\}^{\bar{\delta}_i^k} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'}^K \{\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)\}^{\bar{\delta}_{ij}^k} \end{aligned} \quad (50)$$

と定式化できる^{22), 23)}。ただし、 $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^K)$ である。検査データ $\bar{\delta}^k, \bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k$ はすべて確定値であり、尤度関数は未知パラメータベクトル γ の関数である。

本研究では、ベイズ推定法により、パラメータの事前分布と観測されたデータを用いて定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推定する。しかし、以上の計算過程において、式 (50) の尤度関数に含まれる状態推移確率 $\pi_i(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)$ 、同時生起確率 $\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{\mathbf{x}}^k, \gamma)$ は解析的に求めることができず、多重積分値を数値計算法により求めることが必要となる。青木等は、多段階ワイブル劣化ハザードモデルの最尤推定法において、最尤推定量 $\hat{\gamma}$ の推定精度が多重積分の計算精度に依存することを指摘している。その上で、青木等は、単積分には二重指数関数型積分公式¹⁰⁾を、多重数値積分には、優良格子点法による多次元数値積分法¹⁰⁾を用いている。しかし優良格子点法による多次元数値積分法では、個々の検査データ毎に優良な格子点を探索するため、膨大な計算時間を必要とし、また現在までに 5 次元以上の優良格子点が発見されていないため、状態推移確率 $\pi_i(s)$ が高次元になれば対応できなかった。

そこで本研究では、状態推移確率 $\pi_i(s)$ を、4. で詳述した超一様分布列を用いた準モンテカルロ法による数値計算法を適用して求めている。

(3) 同時事後確率密度関数の定式化

事前確率密度関数 $\pi(\gamma)$ は、

$$\pi(\gamma) = \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\alpha_i) \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{n=1}^N \pi(\beta_{i,n}) \quad (51)$$

と展開することができる。未知パラメータ $\gamma = (\alpha, \beta)$ の事前確率密度関数 $\pi(\gamma)$ に関して、それぞれ以下のよ

うな設定を行う。まず、 α_i の事前確率密度関数 $\pi(\alpha_i)$ として $I-1$ 個のガンマ分布を設定する。ただし、パラメータ α_i に対応するガンマ分布の形状パラメータは b_i 、尺度パラメータは l_i である。また、 $\beta_{i,n}$ の事前確率密度関数 $\pi(\beta_{i,n})$ として $(I-1) \times N$ 個の正規分布を設定する。なお、パラメータ $\beta_{i,n}$ に対応する正規分布の期待値は $\mu_{i,n}$ 、分散は $\sigma_{i,n}$ である。

したがって、同時事後確率密度関数は、

$$\begin{aligned} & \pi(\gamma|\Xi) \\ & \propto \mathcal{L}(\gamma|\Xi) \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\alpha_i) \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{n=1}^N \pi(\beta_{i,n}) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_i^k} \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'}^K \{\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_{ij}^k} \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} (\alpha_i)^{b_i-1} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{l_i}\right) \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\frac{(\beta_{i,n} - \mu_{i,n})^2}{2(\sigma_{i,n})^2}\right\} \quad (52) \end{aligned}$$

のように定式化することができる。

(4) ギブスサンプリングと MH 法

未知パラメータを推定するためには式 (52) で表される同時事後確率密度関数を求める必要がある。しかしながら、上述したように、同時事後確率密度関数を解析的に求めることはもとより、同時事後確率密度関数から直接サンプリングすることも困難である。そこで本研究では、各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて数値計算により式 (52) の同時事後確率密度関数を算出する。このように条件付き事後確率密度関数を用いて、未知パラメータベクトルの要素それぞれに関して順次サンプリングを行うサンプリング方法を本研究ではギブスサンプリングと呼ぶ。ギブスサンプリングを用いることにより、同時事後確率密度関数から複数のパラメータを推定する際の次元の呪いを解消することができる。なお、ギブスサンプリングにおける各パラメータの条件付き事後確率密度関数の算出に際しても事後分布から直接サンプリングすることは困難であるために、それぞれに対して MH 法を用いる必要がある。

多段階ワイブル劣化ハザードモデルの同時事後確率密度関数を算出するために、各パラメータの条件付き事後確率密度関数を定式化する。未知パラメータの部分ベクトル α から要素 α_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, I-1$) を除いた未知パラメータベクトルを α^{-e_1} と表す。同様に、未知パラメータの部分ベクトル β から β_{e_2, e_3} ($e_2 = 1, \dots, I-1; e_3 =$

$1, \dots, N$) を除いた未知パラメータベクトルを β^{-e_2, e_3} と表す。このとき、式 (52) より、 α^{-e_1} 、 β を既知とした時の α_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 (ギブスサンプラー) $\pi(\alpha_{e_1}|\alpha^{-e_1}, \beta, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\alpha_{e_1}|\alpha^{-e_1}, \beta, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_i^k} \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'}^K \{\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_{ij}^k} \\ & \quad \cdot (\alpha_{e_1})^{b_{e_1}-1} \exp\left(-\frac{\alpha_{e_1}}{l_{e_1}}\right) \quad (53) \end{aligned}$$

と表せる。また、 $\alpha, \beta^{-e_2, e_3}$ を既知とした時の β_{e_2, e_3} の条件付き事後確率密度関数 (ギブスサンプラー) $\pi(\beta_{e_2, e_3}|\alpha, \beta^{-e_2, e_3}, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_{e_2, e_3}|\alpha, \beta^{-e_2, e_3}, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_i^k} \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'}^K \{\pi_{ij}(\bar{s}^k, \bar{x}^k, \gamma)\}^{\delta_{ij}^k} \\ & \quad \cdot \exp\left\{-\frac{(\beta_{e_2, e_3} - \mu_{e_2, e_3})^2}{2(\sigma_{e_2, e_3})^2}\right\} \quad (54) \end{aligned}$$

と表すことができる。これらの条件付き確率密度関数を用いて式 (52) の同時事後確率密度関数をギブスサンプリングにより算出する。具体的な手順を以下と図-3 にまとめる。

ステップ 1 先験的情報を用いて事前分布のパラメータ k, l, μ, σ を設定する。ただし、 $b = (b_1, \dots, b_{I-1})$ 、 $l = (l_1, \dots, l_{I-1})$ であり、また、 μ, σ はそれぞれ $\mu_{i,n}, \sigma_{i,n}$ を (i, n) 要素とする $(I-1) \times N$ 行列である。本研究では無条件事前分布として分散のパラメータ値を大きく設定することとする。また、未知パラメータベクトル $\gamma = (\alpha, \beta)$ の初期値ベクトル $\gamma^{(0)} = (\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ を設定する。初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく。 $n = 1$ とする。

ステップ 2-1 サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\alpha^{(n)}$ を次のように発生させる。
 $\cdot \alpha_1^{(n)}$ を $\pi(\alpha_1|\alpha^{-1(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。
 $\cdot \alpha_2^{(n)}$ を $\pi(\alpha_2|\alpha^{-2(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。
 \vdots
 $\cdot \alpha_{I-1}^{(n)}$ を $\pi(\alpha_{I-1}|\alpha^{I-1(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。

ステップ 2-2 サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\beta^{(n)}$ を次のように発生させる。

$\beta_{1,1}^{(n)}$ を $\pi(\beta_{1,1}|\beta^{-1,1(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。
 $\beta_{2,1}^{(n)}$ を $\pi(\beta_{2,1}|\beta^{-2,1(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。
 \vdots
 $\beta_{I-1,N}^{(n)}$ を $\pi(\beta_{I-1,N}|\beta^{-I-1,N(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする。

ステップ 3 十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\gamma^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$ を記録する。

ステップ 4 $n = \bar{n}$ ならば計算を終了する。 $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ と **ステップ 2** へ戻る。

十分大きな \underline{n} に対して、このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば、ギブスサンプリングによる $\gamma(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ のサンプリングは式 (52) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\gamma|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる。したがって、ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\gamma(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ を用いて、パラメータベクトル $\gamma = (\alpha, \beta)$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる。ただし、**ステップ 2** で利用する条件付き事後確率密度関数 (式 (53), (54)) からは直接にランダムサンプリングすることができない。条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングできない場合であっても、MH 法を利用することで条件付き事後確率からの標本を得ることができる。具体的には、 $\pi(\alpha_i|\alpha^{-i(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)$ ($i = 1, \dots, I-1$) からのサンプリングに対して独立 MH 法を、 $\pi(\beta_{i,n}|\beta^{-i,n(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ ($i = 1, \dots, I-1; n = 1, \dots, N$) からのサンプリングに対してランダムウォーク MH 法を適用する。MH 法では事後分布 (目標分布) からのサンプリングが難しい場合に、これを近似するような分布 (提案分布) からサンプリングを行う。これと同時に目標分布と提案分布の差異を、 $n-1$ 回目と n 回目のサンプリングにおける条件付き事後確率密度関数と提案分布の確率密度関数の積の比に従い修正する。これらの操作をギブスサンプリングの手順に従い繰り返したとき、十分に大きな繰り返し回数においてサンプリングされた標本は目標分布からランダムサンプリングされた標本とみなすことができる²⁴⁾。

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて、パラメータベクトル α, β に関する統計的性質を分析することができる。MCMC 法を用いた場合、パラメータの事後確率密度関数 $\pi(\alpha, \beta)$ を解析的な関数として表現することはできない。得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推定することとなる。いま、多段階ワイブル劣化ハザードモデルに含まれるパラメータベクトルを $\gamma = (\alpha, \beta) = (\gamma_1, \dots, \gamma_d, \dots, \gamma_D)$ と表す。

ただし、 $D = (I-1) + (I-1)N$ である。また、MCMC 法により得られた標本を $\gamma^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \bar{n}$) と表すこととする。このうち、最初の \underline{n} 個を事後分布への収束過程からの標本と考え、標本集合から除去する。そのうえで、パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する。このとき、パラメータ γ の要素 γ_d ($d = 1, \dots, D$) の確率分布関数 $G_d(\gamma)$ は、

$$G_d(\gamma_d) = \frac{\#\{\gamma_d^{(n)} \leq \gamma_d, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (55)$$

と表すことができる。ただし、 $\#\{\gamma_d^{(n)} \leq \gamma_d, n \in \mathcal{M}\}$ は括弧内の論理式が成立する標本の総数である。また、パラメータ γ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}(\gamma)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\gamma) &= (\tilde{\zeta}(\gamma_1), \dots, \tilde{\zeta}(\gamma_D))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\gamma_1^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\gamma_D^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (56)$$

と表される。また、ランダムウォーク MH 法による標本を用いて、パラメータ γ の信用域を定義できる。100(1-2 κ)%信用域は、標本順序統計量 $(\underline{\gamma}_d^\kappa, \bar{\gamma}_d^\kappa)$ ($d = 1, \dots, D$)

$$\underline{\gamma}_d^\kappa = \arg \max_{\gamma_d^*} \left\{ \frac{\#\{\gamma_d^{(n)} \leq \gamma_d^*, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \quad (57a)$$

$$\bar{\gamma}_d^\kappa = \arg \min_{\gamma_d^{**}} \left\{ \frac{\#\{\gamma_d^{(n)} \geq \gamma_d^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \quad (57b)$$

を用いて $\underline{\gamma}_d^\kappa < \gamma_d < \bar{\gamma}_d^\kappa$ と定義できる。

MCMC 法では、初期パラメータ値 $\gamma^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない。ランダムウォーク MH 法で発生させた \bar{n} 個の標本のうち、最初の \underline{n} 個の標本 $\gamma^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \underline{n}$) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える。その上で、第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本を取り上げる。 $\underline{n} + 1$ 以降の標本が、不変分布である事後分布からの標本であるかを Geweke の方法²⁵⁾を用いて仮説検定を試みる。

いま、パラメータの標本ベクトル $\gamma^{(n)}$ ($n = \underline{n}, \dots, \bar{n}$) の中から、最初の n_1 個と最後の n_2 個のベクトルを取りあげる。Geweke は、 $n_1 = 0.1(\bar{n} - \underline{n})$, $n_2 = 0.5(\bar{n} - \underline{n})$ を推奨している²⁵⁾。このとき、パラメータ γ_d ($d = 1, \dots, D$) の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は、

$$Z_{\gamma_d} = \frac{1\bar{\gamma}_d - 2\bar{\gamma}_d}{\sqrt{\nu_1^2(\gamma_d) + \nu_2^2(\gamma_d)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (58)$$

$$1\bar{\gamma}_d = \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \gamma_d^{(k)}}{n_1} \quad 2\bar{\gamma}_d = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \gamma_d^{(k)}}{n_2}$$

$$\nu_1^2(\gamma_d) = \frac{2\pi \hat{f}_{\gamma_d}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\gamma_d) = \frac{2\pi \hat{f}_{\gamma_d}^2(0)}{n_2}$$

と定義できる。ただし、 $\hat{f}_{\gamma_d}^l(x)$ ($l = 1, 2$) はスペクトル密度関数であり、 $2\pi \hat{f}_{\gamma_d}^l(0)$ の推定値は

$$2\pi \hat{f}_{\gamma_d}^l(0) = l\hat{\omega}_0 + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) l\hat{\omega}_m^s \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
{}_1\hat{\omega}_0 &= n_1^{-1} \sum_{g=n+1}^{n+n_1} (\gamma_d^{(g)} - {}_1\bar{\gamma}_d)^2 \\
{}_2\hat{\omega}_0 &= n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} (\gamma_d^g - {}_2\bar{\gamma}_d)^2 \\
{}_1\hat{\omega}_m^i &= n_1^{-1} \sum_{g=\bar{n}+s+1}^{n+n_1} (\alpha_m^{i,g} - {}_1\bar{\gamma}_d)(\gamma_d^{(g-s)} - {}_1\bar{\gamma}_d) \\
{}_2\hat{\omega}_m^i &= n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+s+1}^{\bar{n}} (\gamma_d^g - {}_2\bar{\gamma}_d)(\gamma_d^{(g-s)} - {}_2\bar{\gamma}_d) \\
w(s, q) &= 1 - \frac{s}{q+1}
\end{aligned}$$

として求まる^{26),27)}。 q はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが、Geweke に従って 20 を採用する²⁵⁾。ここで、 γ_d の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\gamma_d}| \leq z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\gamma_d}| > z_{\psi/2} \end{cases} \quad (60)$$

と設定する。ただし、 $z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である。有意水準 $\psi\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合、 $z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$ を満足する値として定義できる。ただし、 $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である。

6. おわりに

本研究では、多段階ワイブル劣化ハザードモデルにベイズ推定法を適用した方法論を提案した。さらに多段階ワイブル劣化ハザードモデルの状態推移確率の数値計算法として、超一様分布列を用いた準モンテカルロ法を援用した方法論を提案することで、従来多段階ワイブル劣化ハザードモデルを推定する際の課題であった、膨大な計算負荷を大幅に軽減することを可能にした。

本研究で提案した方法論の課題としては、すべての目視点検データに対して同一の構造を有するハザードモデルを適用していた点である。ハザード関数にサンプル固有の誤差が含まれる可能性があるため、今後は混合モデルや非斉次隠れマルコフモデルのようなモデルの高度化を図っていくことが重要である。また多段階ワイブル劣化ハザードモデルもしくはマルコフ劣化ハザードモデルのどちらのモデルを適用して社会基盤施設の劣化予測を行うかは、対象施設によって適性が異なると考えられる。よって、今後多段階ワイブル劣化ハザードモデルの適用事例を増やしていくことで、経験的知見を蓄積していくことが重要である。なお、講演会当日には、実際の高速道路上の伸縮装置を対象とした適用事例を用いて、本研究の有効性を実証的に検証した事例を紹介する。

参考文献

- 1) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 2) Shin, H.C. and Madanat, S.M.: Development of stochastic model of pavement distress initiation, *Journal of Infrastructure Planning and Management*, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
- 3) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.69-82, 2005.
- 4) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 5) 小林潔司, 貝戸清之, 林秀和: 測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008.
- 6) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
- 7) 小林潔司, 貝戸清之, 江口利幸, 大井明, 起塚亮輔: 舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D3, Vol.67, No.4, pp.422-440, 2011.
- 8) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 9) 貝戸清之, 小林潔司, 青木一也, 松岡弘大: 混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計, 土木学会論文集 D3, Vol.68, No.4, pp.255-271, 2012.
- 10) 森正武: 数値計算プログラミング, 岩波書店, 2000.
- 11) 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
- 12) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集 F, Vol.62, No.3, pp.473-491, 2006.
- 13) 小濱健吾, 岡田真一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 14) 湯前祥二, 鈴木輝好: モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店, 2000.
- 15) 汪金芳他: 計算統計学のフロンティアー計算統計 I, 確率計算の新しい手法, 岩波書店, 2003.
- 16) Ninomiya, S. and Tezuka, S.: Toward real-time pricing of complex financial derivatives, *Applied Mathematical Finance*, 3, pp.1-20, 1996.
- 17) 田村勉, 白川浩: 一般化 Faure 列による準乱数とそのオプション評価への応用, *JAFEE Journal*, pp.95-115, 1999.
- 18) 篠田昌弘, 佐藤忠信, 米澤豊司: 複数の潜在的すべり線を有する斜面の限界状態超過確率の効率的な算定方法, 土木学会論文集 C, Vol.63, No.3, pp.812-824, 2007.
- 19) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 20) Gouriéroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 21) P. Bickel, P. Diggle, S. Feinberg, U. Gather, I. Olkin, S. Zeger.: Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling, Springer, 2008.
- 22) Tobin, J.: Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, 26, pp.24-36, 1958.
- 23) Amemiya, T. and Boskin, M.: Regression analysis when the dependent variables is truncated lognormal, with an application to the determination of the duration of welfare dependency, *International Economic*

Review, Vol.15, p.485, 1974.

- 24) 伊庭幸人他：計算統計学のフロンティア-計算統計 II, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, 2005.
- 25) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, 1996.
- 26) Chib, S.: Marginal Likelihood from Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 27) Newey, W.K. and West, K.D.: A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Coisistent Covariance Matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.

(2014. 8. 1 受付)