

ボトルネック渋滞を考慮した 出発・始業時刻選択モデル

高山 雄貴¹

¹正会員 愛媛大学 助教 大学院理工学研究科 (〒790-8577 愛媛県松山市文京町3番)
E-mail: takayama@cee.ehime-u.ac.jp

時差出勤制度の効果を検証するために、出発・始業時刻選択モデルに関する研究が古くから行われてきた。しかし、これらの研究では、分析の困難さを回避するために、構築されたモデルの殆どが通勤費用を静学的な枠組みで表現している。すなわち、通勤ラッシュ時を対象とした分析を実施しているにもかかわらず、従来研究では交通渋滞が通勤費用に与える影響を無視してしまっている。そこで、本研究では、ポテンシャルゲームの性質を利用したボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルの分析手法を提示する。そして、その分析手法を利用することにより、これまで殆ど不明であった、均衡状態・社会的最適状態の一般特性を理論的に明らかにする。

Key Words : *staggered work hours, bottleneck congestion, production effect, potential game*

1. はじめに

(1) 背景と目的

多くの都市で中心市街地に向かう通勤交通による交通渋滞が発生している。その大きな理由の一つに、殆どの企業の業務スケジュールが固定的であり、同時に始業することが挙げられる。そこで、企業の始業時刻を分散化することで交通渋滞を緩和させる、時差出勤制度に関する議論が多く行われてきた。しかし、この制度は、その有効性は広く認識されている一方で、効果が十分に得られるまでには普及していない。

時差出勤制度が普及していない大きな原因の一つとして指摘されているのが、制度導入による企業間の相互取引機会の減少と、それに伴う業務効率の低下である。実際、“生産性効果 (production effect)” と呼ばれる、始業時刻の集中が企業の業務効率を上昇させる効果の存在が Wilson¹⁾、吉村ら²⁾により観測されており、その観測結果から時差出勤制度の悪影響は決して小さくないことが示されている。この事実から、始業時刻の分散化を推進する方策は、社会的には家計の通勤混雑解消と企業の生産性低下のトレードオフ関係を内包していることがわかる。

このトレードオフ関係の存在は、空間経済学分野でよく用いられる空間的な集積の経済・不経済が時間軸上にも存在することを示唆している。すなわち、多くの企業の始業時刻が同一もしくは近接すると、企業の生産効率が上がる“時間集積の経済”と交通渋滞が悪化する“時間集積の不経済”が同時に生じる。したがって、

時差出勤などの始業時刻を分散化する方策の効果を検証するには、時間集積の経済・不経済の両方を同時に考えた枠組みが必要となる。

Henderson³⁾ は、時間集積の経済 (i.e., 生産性効果) と不経済 (i.e., 交通混雑) を同時に考慮し、時差出勤制度の効果を検証した最初の研究である。この研究で構築された始業時刻選択モデルは、空間上の集積現象を扱った Beckmann⁴⁾ の social interaction モデルとほぼ同じ構造であり¹⁾、非常に単純かつ応用可能性に富むものである。それゆえ、その枠組みは、次節に示すように、様々な形で応用・拡張されている。しかしながら、Henderson³⁾ だけでなく、その枠組みを応用・拡張した殆ど全ての研究において、モデル解析上の困難を回避するために、通勤費用が静学的な枠組みで表現されている。すなわち、これらの枠組みは、通勤のピーク時を対象としているにもかかわらず、通勤時間に多大な影響を与えることが広く知られている渋滞現象を全く考慮していない。

そこで、本研究では、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルを構築する。また、このモデルの特性の理解を妨げる解析上の困難を解決するために、ポテンシャルゲーム^{10), 11)} の性質を利用した“ポテンシャル関数アプローチ (potential function approach)” を提示する。そして、そのアプローチを利用することによ

¹ Beckmann⁴⁾ の social interaction モデルの詳細については、都市経済学に関する教科書 (e.g., Fujita and Thisse⁵⁾) 参照。なお、social interaction モデルに関する最新の研究において、本稿で扱うモデルにも応用可能な分析手法や有益な知見が幾つか提示されている。その詳細については、例えば、Akamatsu et al.⁶⁾、高山・赤松^{7), 8)}、Picard and Mossay⁹⁾ 参照。

り、モデルの均衡状態・社会的最適状態の一般特性を理論的に明らかにする。本研究の大まかな手順は、以下の通りである。まず、Vickrey¹²⁾、Arnott et al.¹³⁾の標準的な出発時刻選択モデルにHenderson³⁾型の生産性効果を導入し、労働者の出発時刻選択行動・労働供給先(i.e., 企業)の選択行動と、企業の始業時刻選択行動をモデル化する。このモデルでは、労働者の出発時刻選択は短期間で均衡する一方、企業の始業時刻選択・労働者の企業選択が均衡するには長期間かかると仮定する。すなわち、均衡条件を、出発時刻選択行動に関する“短期均衡条件”と始業時刻選択・企業選択行動に関する“長期均衡条件”とに分類する。このとき、短期均衡状態は一意に定まる一方、長期均衡状態が複数存在することが示される。そこで、均衡選択のために、長期均衡状態がポテンシャルゲーム^{10), 11)}のNash均衡状態とみなせることを利用する。この場合、長期均衡状態はポテンシャル関数を最大化する問題のKurash-Kuhn-Tucker条件を満足する状態で与えられ、さらに、安定均衡状態はポテンシャル関数を極大化する状態と一致する。したがって、ポテンシャル関数の形状を調べることで長期均衡状態の特性が明らかにされる。さらに、社会厚生関数とポテンシャル関数の性質の違いを確認することで、社会的最適状態と安定均衡状態の特性を比較する。その結果から、時差出勤制度の効果が示される。

本稿の構成は以下の通りである。本章(2)節では、関連研究の成果と課題を整理したのち、本研究の位置づけを述べる。第2章では、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルの枠組みを示した上で、短期・長期均衡条件を定式化する。そして、第3章において、短期均衡状態と長期均衡状態の特性をポテンシャル関数アプローチにより明らかにする。第4章では、第3章で得られる安定均衡状態と社会的最適状態の特性を比較し、その結果から時差出勤制度の有効性を議論する。以上で得られた結果やポテンシャル関数アプローチの有用性を具体的に確認するために、企業が設定できる始業時刻を2種類に限定したケースの分析を第5章で実施する。最後に、第6章で結論を述べる。

(2) 関連研究と本研究の位置づけ

本稿で扱う時間集積の経済・不経済を考慮した枠組みに関する研究は、Henderson³⁾以降、徐々に蓄積されてきた。Arnott et al.¹⁴⁾は、Henderson³⁾モデルに余暇活動とのスケジュールコストや支配的企業(dominant firm)を導入し、これらが時差出勤制度に与える影響を調べている。我が国でも、奥村らの一連の研究^{15), 16)}により、鉄道通勤を対象とした枠組みへと拡張がなされている。また、高山ら¹⁷⁾は、Henderson³⁾による枠組みの下では、社会的最適状態の達成を意図した標準

的なビグー政策が有効に機能しない場合があることを指摘している。しかし、これらのモデルは、前節でも指摘したように、通勤ピーク時の道路混雑を静学的なモデルにより表現しており、通勤費用に多大な影響を与える渋滞待ち行列の影響を考慮できない。

ボトルネック渋滞を考慮した枠組みで時差出勤制度に関する分析を行った研究に佐藤・赤松¹⁸⁾がある。この研究では、Henderson³⁾モデルにボトルネック渋滞を導入した枠組みが構築されている。しかし、その分析は、始業時刻が完全に一時点に集中、もしくは完全に分散した状態のみに限られている。さらに、このモデルには複数の均衡状態が存在することが確認されているにもかかわらず、その安定性は確認されていない。また、時差出勤制度とは異なるものの、フレックスタイム制度に関する研究^{19), 20), 21), 22)}でも、ボトルネック渋滞を考慮した枠組みに関する研究が蓄積されている。その中でも、Mun and Yonekawa²²⁾はフレックスタイムの導入効果・効率性を理論解析・数値解析を併用することで、明らかにしている。しかし、この研究でも複数の均衡状態の存在が確認されている一方で、その安定性は数値解析例で確認されているのみである。したがって、時間集積の経済・不経済を含み、かつボトルネック渋滞を考慮したモデルの特性は、未だ殆ど明らかにされていないのが現状である。

本研究では、これらの従来研究の課題を解決し、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルの一般特性を理論的に解明している。その結果、ボトルネックの容量改善が交通渋滞の悪化を招きうること、渋滞を完全に解消できるのであれば時差出勤を進めることは社会的には望ましくないことが明らかにされる。

本研究の特徴は、出発・始業時刻選択モデルの特性の解明だけでなく、モデル分析を可能にするアプローチを提示している点にもある。これまで、ボトルネックモデル^{12), 13)}は、その解析が困難であることから、時間集積の経済・不経済の両方を取り扱う研究では殆ど用いられていなかった。本研究は、Akamatsu et al.⁶⁾により提示されている集積の経済・不経済を含むsocial interactionモデルに対するポテンシャル関数アプローチをボトルネック渋滞を含むモデルに適用できる形に応用することで、その困難を解消することに成功している²⁾。実際、以降の章では、このアプローチを用いることで、非常に簡単にボトルネック渋滞を含むモデルの特性を知ることができることが明らかにされる。さらに、このアプローチは、本稿で提示する出発・始業時

²⁾ ポテンシャル関数アプローチは、様々な分野でその有用性が知られており、既に広く応用されている。本研究と関連する空間経済モデルに関する最近の研究はOyama²³⁾、Fujishima²⁴⁾、通勤交通を対象とした枠組みへの適用例はSandholm²⁵⁾、菊地・赤松²⁶⁾、和田・赤松²⁷⁾を参照。

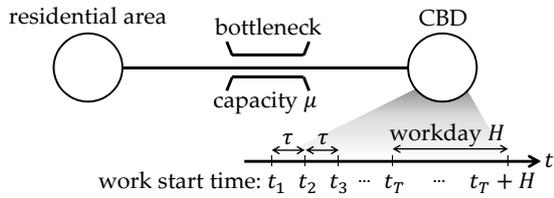


図-1 都市空間の設定

刻選択モデルだけでなく、Arnott²⁸⁾などのボトルネック渋滞を考慮した幅広いクラスモデルに適用することができる。したがって、本研究は、ボトルネックモデルを多様な枠組みと統合する道を拓くことにも貢献している。

2. 出発・始業時刻同時均衡モデル

(1) 都市と交通条件の設定

住宅地とCBDが単一の道路により結ばれている都市を想定する(図-1)。この道路には、CBD直前に容量 μ のボトルネックが存在する。このボトルネックのサービスはFirst-In-First-Out (FIFO)原則を満足し、待ち行列はVickrey¹²⁾、Arnott et al.¹³⁾のpoint queueモデルにより表現できると仮定する。このとき、住宅地からCBDへの所要時間は、住宅地からボトルネックまでの移動時間とボトルネックでの待ち時間で与えられる。ここで、全ての自動車は、住宅地からボトルネックまで一定速度で走行すると仮定するため、その移動時間は一定値 c_f となる。この移動時間 c_f は以降の結果に全く影響を与えないことから、表記を簡略化するため $c_f = 0$ とする。

本モデルでは、企業は始業時刻を T 種類の選択肢 $\mathbb{T} \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_T\}$ から決定すると仮定する³。以降では、始業時刻が t_i の企業を“企業 i ”と呼ぶ。この選択可能な始業時刻 \mathbb{T} は、全て同一の時間間隔 τ で並んでおり、 $t_i = t_{i-1} + \tau$ ($i = 2, 3, \dots, T$)が成立する。また、全企業の労働時間 H は同一かつ一定値であり、さらに、必ず全企業が同時に業務を行っている時間帯が存在する(i.e., $t_T \leq t_1 + H$)と仮定する。

(2) 主体の行動

a) 労働者の行動

総数 N 人の労働者は、全て住宅地に居住しており、労働を供給する企業 i 、CBD到着時刻 t を選択し、賃金・通勤費用から構成される効用を最大化する⁴。全て

³ 本稿では、企業が選択できる始業時刻は連続的でなく離散的であると仮定している。これは、殆どの始業時刻が、8:00, 8:30, 9:00のように、いくつかの時刻に集中している状況を反映するためのものである。

⁴ 本研究では、労働者は住宅地の出発時刻ではなく、CBDへの到着時刻を選択する問題を考えている。これは以降の解析を明快にするためのものであり、以降の結果に影響を与えるものでは

の労働者は均質であり、その効用最大化行動は次のように与えられる:

$$\max_i \left\{ \max_t u_i(t) = w_i - c_i(t) \right\}. \quad (1)$$

ここで、 t はCBD到着時刻、添え字 i は企業 i (i.e., 始業時刻 t_i)を表している。また、 $u_i(t)$ は時刻 t にCBDに到着する企業 i に勤める労働者の効用、 w_i は企業 i から得られる賃金、 $c_i(t)$ は渋滞待ち時間 $q(t)$ とスケジュールコスト $s(|t - t_i|)$ の和で表される通勤費用である:

$$c_i(t) = q(t) + s(|t - t_i|). \quad (2)$$

本稿では、スケジュールコスト関数 $s(x)$ は、 $s(0) = 0$ 、単調増加かつ狭義凸であると仮定する。

b) 企業の行動

企業は全てCBDに立地しており、完全競争下で単位の労働を投入し財を生産する。この財の生産に関して、本研究では、Henderson³⁾、Arnott et al.¹⁴⁾と同様の生産性効果を導入する。すなわち、ある企業のある時点での生産性は、すでに始業している企業数が多い程、高まると仮定する。この生産性効果を表現するために、企業のある時刻 t での“瞬間的”生産関数 $f(t)$ を次のように定義する; ある企業の時刻 t での瞬間的生産量 $f(t)$ は、その時刻までに始業している企業の労働者数 $N(t)$ の増加関数で与えられる:

$$f(t) = \alpha N(t). \quad (3)$$

ここで、 α はパラメータである。したがって、各企業の労働時間が一定値 H であることから、始業時刻が t_i の企業の一日の生産量 F_i は、瞬間的生産関数 $f_i(t)$ を始業時刻 t_i から終業時刻 $t_i + H$ まで積分したものととなる:

$$F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t) dt = \alpha \int_{t_i}^{t_i+H} N(t) dt. \quad (4)$$

ここで、 $t_i = t_{i-1} + \tau$ であるため、始業時刻が t_i の企業全体の総労働者数を N_i とすると、 $N(t)$ は次のように与えられる(図-2):

$$N(t) = \begin{cases} N_1 & \text{if } t \in (t_1, t_2), \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^j N_k & \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}), \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^T N_k & \text{if } t \in [t_T, t_1 + H), \\ \sum_{k=2}^T N_k & \text{if } t \in [t_1 + H, t_2 + H), \\ \vdots & \\ \sum_{k=j}^T N_k & \text{if } t \in [t_{j-1} + H, t_j + H), \\ \vdots & \\ N_T & \text{if } t \in [t_{T-1} + H, t_T + H). \end{cases} \quad (5)$$

ない。実際、FIFOサービスの下では、CBD到着時刻と住宅地出発時刻は一対一対応する。

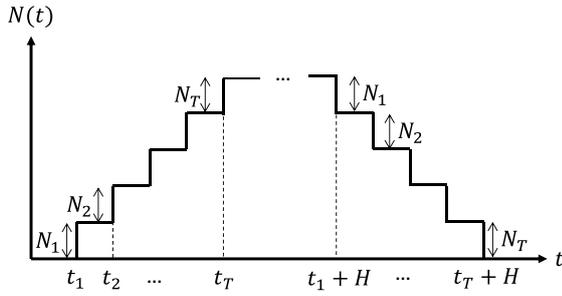


図-2 時刻別の労働者数

なお、各企業は固定的に一単位の労働を投入することから、 N_i は始業時刻が t_i の総企業数、 $N(t)$ は時刻 t が労働時間に含まれる総企業数も表している。

以上の生産関数の下で、各々の企業は、自らの利潤を最大化する始業時刻を \mathbb{T} から選択する：

$$\max_{t_i \in \mathbb{T}} \pi_i = F_i - w_i. \quad (6)$$

(3) 均衡条件の定式化

本モデルでは、短期と長期の2段階の均衡を考える。短期的には、労働者は、自らの始業時刻 t_i (i.e., 労働を供給する企業 i) を与件として、通勤費用 $c_i(t)$ を最小化する CBD 到着時刻を選択する。その結果、企業 i の労働者の均衡通勤費用 c_i^* が定まる。長期的には、均衡通勤費用 c_i^* を与件として、企業・労働者が利潤・効用を最大化する始業時刻・労働を供給する企業を選択する。そして、均衡状態における始業時刻別の企業数・労働者数 (以降、始業時刻分布) $N^* = (N_i^*)_{i=1}^T$ が決まる。本節では、これらの短期・長期均衡状態が満たす均衡条件を定式化する。

a) 短期均衡状態: 出発時刻選択均衡条件

前述したとおり、労働者は、短期的には、始業時刻 t_i が定まっているとの前提の下で CBD 到着時刻 t を選択する。したがって、短期均衡状態は、企業 i の労働者数 N_i を与件としたうえで決定される。この短期均衡状態が満たす均衡条件は、標準的な出発時刻選択モデルの均衡条件と完全に一致する。より具体的には、この均衡条件は以下に示す3条件で与えられる：

$$\begin{cases} n_i(t) \{c_i^* - q(t) - s(|t - t_i|)\} = 0, \\ n_i(t) \geq 0, c_i^* - q(t) - s(|t - t_i|) \geq 0, \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} q(t) \{\mu - \sum_k n_k(t)\} = 0, \\ q(t) \geq 0, \mu - \sum_k n_k(t) \geq 0, \end{cases} \quad (7b)$$

$$\int n_i(t) dt = N_i. \quad (7c)$$

ここで、 $n_i(t)$ は時刻 t に CBD に到着する企業 i の労働者数、 c_i^* は企業 i の労働者の均衡通勤費用である。この短期均衡条件より、短期均衡状態での $n_i(t), q(t), c_i^*$ が定

まる。

均衡条件 (7a) は、CBD 到着時刻選択の無裁定条件を表している。すなわち、この条件は、短期均衡状態ではどの労働者も自らの CBD 到着時刻を変更するインセンティブを持たないことを意味している。条件 (7b) は、ボトルネックの容量制約である；この条件は、流出時刻 t においてボトルネックに渋滞 (渋滞待ち時間 $q(t)$) が発生する場合、その時刻のボトルネック流出者数は容量 μ に等しく、渋滞が発生していない時刻の流出者数は μ 以下であることを表している。条件 (7c) はフロー保存則である。

b) 長期均衡状態: 始業時刻選択均衡条件

長期均衡状態が満たす均衡条件は、次の3条件で与えられる：

$$\begin{cases} N_i \{u^* - (w_i - c_i^*)\} = 0, \\ N_i \geq 0, u^* - (w_i - c_i^*) \geq 0, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} N_i \{\pi^* - (F_i - w_i)\} = 0, \\ N_i \geq 0, \pi^* - (F_i - w_i) \geq 0, \end{cases} \quad (8b)$$

$$\sum_k N_k = N. \quad (8c)$$

ここで、 u^*, π^* は、各々、労働者の均衡効用、企業の均衡利潤である。

均衡条件 (8a), (8b) は、労働者・企業の始業時刻選択均衡条件である。したがって、単一の労働者・企業のみでは自らの効用・利潤を改善できない状態が、長期均衡状態となる。また、条件 (8c) は労働者数の保存則を表す。

本モデルでは、企業は完全競争下で財を生産するため、 $\pi^* = 0$ となる。これを利用すると、長期均衡条件 (8a), (8b) は以下の条件で表現することができる：

$$\begin{cases} N_i \{u^* - (F_i - c_i^*)\} = 0, \\ N_i \geq 0, u^* - (F_i - c_i^*) \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

したがって、長期均衡状態での N_i, u^* は長期均衡条件 (8c), (9) により定まる。

3. 均衡状態の特性分析

本章では、前章で示したモデルの短期・長期均衡状態の特性を順に調べる。その結果、短期均衡状態は唯一に定まる一方、長期均衡状態は複数存在することが示される。さらに、長期均衡状態が複数存在することから、均衡選択のために、その局所的な漸近安定性をポテンシャルゲーム^{10), 11)}の性質を利用して明らかにする。その結果から、本モデルの安定均衡状態の特性が示される。

(1) 短期均衡状態の特性

最初に、短期均衡状態の一意性を確認しよう。本モデルの短期均衡条件は、標準的な出発時刻選択モデルと一致する。したがって、FIFO原則を満足し、かつ $s(x)$ が狭義凸関数であることから、Daganzo²⁹⁾, Kuwahara³⁰⁾, Lindsey³¹⁾ より、次の命題が得られる:

命題 1 短期均衡状態は一意に決まる。さらに、この均衡状態では First-In-First-Work (FIFW) 原則が成立する。

命題 1 で示したように、短期均衡状態が FIFW 原則を満足するため、始業時刻が早い企業に勤める労働者ほど、自宅を早く出発し、CBD にも早く到着する。

短期均衡状態は、始業時刻毎の企業数・労働者数 $\mathbf{N} = (N_i)_{i=1}^T$ を与件として、条件 (7) から得られる。したがって、均衡通勤費用 $c_i^*(\mathbf{N})$ は、 \mathbf{N} の関数で与えられる。この $c^*(\mathbf{N}) = (c_i^*(\mathbf{N}))_{i=1}^T$ は、長期均衡状態の特性を調べる際に有益となる次の性質を有する。

補題 1 均衡通勤費用 $c^*(\mathbf{N})$ の Jacobi 行列 $\nabla c^*(\mathbf{N}) = [\partial c_i^*(\mathbf{N})/\partial N_j]$ は、対称かつ正定値である。

証明 付録 I 参照。

(2) 長期均衡状態の特性

a) ポテンシャルゲーム

次に、長期均衡状態の特性を調べる。そのために、長期均衡状態がポテンシャルゲームの Nash 均衡状態とみなすことができることを示しておこう。長期均衡状態は、均衡条件 (8c), (9) より、プレイヤーの集合が $\mathbb{I} \equiv [0, N]$, 戦略集合が $\mathbb{S} \equiv \{1, 2, \dots, T\}$, 利得関数が $\mathbf{u}(\mathbf{N}) = (F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N}))_{i \in \mathbb{S}}$ の population game の Nash 均衡状態と一致する。なお、以降では、このゲームをゲーム $G = [\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbf{u}]$ と表記する。

このゲーム G は、Sandholm¹¹⁾ により示されているように、任意の $\mathbf{N} \in \Delta \equiv \{\mathbf{N} \mid \sum_i N_i = N, N_i \geq 0 \forall i \in \mathbb{S}\}$ に対して⁵、次の条件を満たすポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ が存在すれば、ポテンシャルゲームである:

$$\frac{\partial P(\mathbf{N})}{\partial N_i} = u_i(\mathbf{N}) \quad \forall i \in \mathbb{S}. \quad (10)$$

ここで、 $u_i(\mathbf{N}) = F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N})$ である。また、 $\mathbf{F} = (F_i(\mathbf{N}))_{i \in \mathbb{S}}$ は (4) より以下で与えられる:

$$\mathbf{F}(\mathbf{N}) = \alpha \{HE - \tau D\} \mathbf{N}. \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{E} は全ての要素が 1 の $T \times T$ 行列、 \mathbf{D} は i, j 要素が $|i - j|$ で与えられる $T \times T$ の Toeplitz 行列である。

⁵ より正確には、 Δ 上の偏微分が well-defined となるように、 Δ を含む開集合上でポテンシャル関数 P を定義する必要がある。本稿で扱う simplex 上の偏微分の拡張可能性については、例えば、Sandholm³²⁾ Chapter 3 参照。

条件 (10) は、Sandholm¹¹⁾ により、“externality symmetry” と呼ばれる次の条件と等価であることが示されている:

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{N})}{\partial N_j} = \frac{\partial u_j(\mathbf{N})}{\partial N_i} \quad \forall i, j \in \mathbb{S} \text{ and } \mathbf{N} \in \Delta. \quad (12)$$

補題 1 と (11) より、明らかにゲーム G は (12) を満たすため、次の命題が得られる。

命題 2 ゲーム G は次のポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ を持つポテンシャルゲームである:

$$P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N}). \quad (13)$$

ここで、 $P_1(\mathbf{N}), P_2(\mathbf{N})$ は、各々、生産性効果による正の外部性、通勤混雑による負の外部性を表す凸関数であり、次の関係を満たす:

$$P_1(\mathbf{N}) = \frac{1}{2} \alpha \mathbf{N}^\top \{HE - \tau D\} \mathbf{N}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{N})}{\partial N_i} = c_i^*(\mathbf{N}). \quad (15)$$

証明 付録 II 参照。

ゲーム G がポテンシャルゲームであることから、その均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満たす \mathbf{N}^* の集合と一致する:

$$\max_{\mathbf{N}} P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{N} \in \Delta. \quad (16)$$

この事実は、上記の問題の KKT 条件が、均衡条件 (8c), (9) と完全に一致することから容易に確認できる。

この最適化問題 (16) より、均衡状態はポテンシャル関数の第 1 項 $P_1(\mathbf{N})$ で表される (生産性効果による正の外部性を表現した) 時間集積力と、第 2 項 $P_2(\mathbf{N})$ で表される (ボトルネック渋滞による負の外部性を表現した) 時間分散力のバランスに応じて決まることがわかる。すなわち、ポテンシャル関数 P のうち、第 1 項が卓越する場合は始業時刻が集中し、第 2 項が卓越する場合は始業時刻が分散する。

この事実を利用すると、本モデルでは、ボトルネック容量 μ の増加が交通渋滞を悪化させる可能性があることがわかる。そのメカニズムを確認しておこう。本モデルにおける μ の増加は、 $c_i^*(\mathbf{N})$ の低下、すなわち第 2 項 $P_2(\mathbf{N})$ の低下をもたらす。その結果、ポテンシャル関数 P の第 1 項が卓越し、始業時刻分布が μ が小さかった場合より集中する。この始業時刻分布の集中は、場合によっては容量増強効果を上回り、ボトルネック渋滞を激しくする。なお、本節では容量増加が渋滞を悪化させる可能性を示すことしかできないものの、具体例を用いれば、その事実の有無が確認できる。そこで、本稿では、このような結果が実際に起こることを、第 5 章で提示する具体例により確認する。

b) 長期均衡状態の一意性

長期均衡状態の一意性は、(16) より、ポテンシャル関数 $P(N)$ の形状により確認できる。より具体的には、 $P(N)$ が単峰であればゲーム G の均衡状態は一意であり、そうでなければ一意とは言えない。この事実と、 $P_1(N), P_2(N)$ の凸性より、次の補題が得られる:

補題 2 ゲーム G の均衡状態は、一般に一意ではない。

補題 2 は長期均衡状態が一般に非一意であることを主張している。ただし、この主張は、必ずしも長期均衡状態の“本質的な”一意性を示しているわけではない点に注意が必要である。これを具体的に確認するために、完全に始業時刻が 1 時点に集中している状態のみが長期均衡状態であると想定しよう⁶。このとき、 $N^* = (N, 0, \dots, 0)^T$ や $N^* = (0, 0, \dots, N)^T$ となる状態は明確に区別できるものではない (i.e., 異なる状態とは言えない) にもかかわらず、長期均衡状態は T だけ存在すると判定されてしまう。したがって、補題 2 は、本質的には長期均衡状態は 1 種類のみであるにもかかわらず、複数の均衡状態が存在すると主張している可能性がある。

そこで、ゲーム G の均衡状態の“本質的な”一意性を確認する。そのために、最初に均衡状態の特徴を明らかにしておこう。状態 N のサポートを $\text{supp } N \equiv \{i \in \mathbf{S} \mid N_i > 0\}$ と表すと、均衡状態 N^* のサポートが次の性質を持つことが示される。

補題 3 ゲーム G の均衡状態 N^* のサポート $\text{supp } N^*$ は次の性質を有する:

$$\text{supp } N \in \left\{ \{i_1, i_2, \dots, i_a\} \subseteq \mathbf{S} \mid \begin{array}{l} i_{j+1} = i_j + 1, \\ j \in [1, a-1], \\ a \in \mathbf{S} \end{array} \right\}. \quad (17)$$

証明 付録 III 参照。

補題 3 は、均衡状態において、企業が設定する始業時刻の集合が凸集合となることを意味している。したがって、本モデルでは、例えば $\tau = 30$ 分とすると、8:00 と 9:00 に始業する企業が存在すれば、必ず 8:30 に始業する企業も存在する。

均衡状態 N^* が補題 3 の特性を持つため、モデルの対称性より、 $\text{supp } N^*$ の要素数が T 未満、かつ $\max\{\text{supp } N^*\} < T$ であれば、次を満たす N^* と本質的に同一な均衡状態 \hat{N}^* が存在する:

$$\hat{N}^* = PN^*. \quad (18)$$

ここで、 $P = [P_{ij}]$ は以下で与えられる、ベクトルの要素をひとつずらす、 $T \times T$ の置換行列である:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j-i=1 \text{ or } j-i=1-T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

⁶ 後で示されるように、この想定は正しくない。

なお、 $s(x) = s(-x)$ を満足するスケジュールコスト関数を用いる (i.e., 早着と遅着に費用上の区別がない) 場合、以下を満たす \hat{N}^* も、 N^* と本質的に同一な均衡状態となる:

$$\hat{N}^* = RN^*. \quad (20)$$

ここで、 $R = [R_{ij}]$ は、以下で与えられる、ベクトルの要素を反転させる、 $T \times T$ の置換行列である:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i+j=T+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

これらの本質的に同一な均衡状態 N^*, \hat{N}^* は、明らかに次の関係を満たす:

$$P(N^*) = P(\hat{N}^*), \quad (22a)$$

$$\det(D^2P(N^*)) = \det(D^2P(\hat{N}^*)). \quad (22b)$$

ここで、 $D^2P(N^*)$ は P の Hessian matrix である。Simsek et al.³³⁾ の index theorem により、最適化問題 (16) の KKT 条件を満たす N^* の集合 $\text{KKT}(P, \Delta)$ は次の関係を満たす:

$$\sum_{N \in \text{KKT}(P, \Delta)} \text{ind}_P(N) = 1, \quad (23a)$$

$$\text{ind}_P(N) = \begin{cases} -1 & \text{if } \det(D^2P(N)) < 0, \\ 0 & \text{if } \det(D^2P(N)) = 0, \\ 1 & \text{if } \det(D^2P(N)) > 0. \end{cases} \quad (23b)$$

集合 $\text{KKT}(P, \Delta)$ は、明らかにゲーム G の均衡状態の集合を表しているため、(22b) と index theorem より、ゲーム G の本質的な一意性に関する次の命題が得られる。

命題 3 ゲーム G の均衡状態は、本質的に非一意である。

証明 (18) を満たす、本質的に同一な複数の均衡状態が存在する状況を考える。これらの均衡状態は、(22b) より、必ずポテンシャル関数の Hessian matrix の行列式 $\det(D^2P(N^*))$ も同一となる。このとき、本質的に同一な均衡状態のみしか存在しない場合、明らかに、(23) を満足しない。したがって、ゲーム G に複数の均衡状態が存在する場合、必ず、本質的に異なる複数種類の均衡状態が存在する。□

c) 長期均衡状態の安定性

命題 3 より、長期均衡状態は本質的に非一意であることが示された。そこで、均衡選択のために、ゲーム G の均衡状態の局所的な漸近安定性を調べる。この均衡状態の安定性を調べるには、均衡状態への調整ダイナミクス $\dot{N} = V(N)$ を定義する必要がある。ここで、 \dot{N} は状態 N の変化速度を表す。本稿では、そのダイナミクスとして、次の 2 条件を満たす *admissible dynamics* を考える。

(PC) $V(N) \neq 0$ のときは常に,

$$V(N) \cdot u(N) = \sum_{i \in S} V_i(N) u_i(N) > 0. \quad (24)$$

(NS) $V(N) = 0$ であれば, N はゲーム G の均衡状態.

条件 (PC) は, positive correlation と呼ばれ, 調整ダイナミクスと利得関数が正の相関を持つことを要求している. また, 条件 (NS) は, 調整ダイナミクスの定常状態が, ゲーム G の Nash 均衡状態と一致することを要求している. なお, この admissible dynamics は, best response dynamic, Brown-von Neumann-Nash (BNN) dynamic, projection dynamic を特殊ケースとして含む, 一般的なダイナミクスである⁷.

ポテンシャルゲーム G の均衡状態 N^* の安定性は, Sandholm¹¹⁾ で示されているように, 次の特性を持つ:

ポテンシャルゲーム G において, ポテンシャル関数 $P(N)$ を局所的に最大化する N^s は, admissible dynamics の下で, 安定均衡状態であり, ポテンシャル関数 $P(N)$ を局所的に最小化する N^u は不安定均衡状態である.

したがって, ゲーム G の均衡状態の安定性は, ポテンシャル関数の形状のみから確認できることがわかる. そこで, この性質を利用して, 第4章では安定均衡状態と社会的最適状態の特性を比較する. さらに, 第5章では安定均衡状態の特性を具体例で確認する.

4. 社会的最適状態と安定均衡状態

本章では, 本モデルの社会的最適状態・次善最適状態と安定均衡状態の特性を比較する. そのために, (1) 節で社会的最適状態を定義した上で, 安定均衡状態との特性の違いを明らかにする. そして, (2) 節では, 社会的最適状態の実現方策について議論する.

(1) 社会的最適状態と安定均衡状態の比較

社会的最適状態は, 労働者の総効用を最大化する状態であると定義する. すなわち, 次の問題の解が社会的最適状態である:

$$\max_{\{n_i(t)\}, N} W = W_1(N) - W_2(\{n_i(t)\}) \quad (25a)$$

$$\text{s.t. } \mu - \sum_{k \in S} n_k(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad (7c), \quad n_i(t) \geq 0 \quad \forall i, t, \quad (25b)$$

$$N \in \Delta. \quad (25c)$$

ここで, $W_1(N), W_2(\{n_i(t)\})$ は以下で与えられる, 各々, 生産性効果による正の外部性・通勤費用による負の外

部性の影響を表す項である:

$$W_1(N) = \sum_{k \in S} N_k F_k = 2P_1(N), \quad (26a)$$

$$W_2(\{n_i(t)\}) = \sum_{k \in S} \int n_k(t) \{q(t) + s(|t_k - t|)\} dk. \quad (26b)$$

社会的最適状態では必ず渋滞が完全に解消される⁸ ため, $W_2(\{n_i(t)\})$ を次の $\hat{W}_2(\{n_i(t)\})$ で与えても, (25) の解は社会的最適状態と一致する:

$$\hat{W}_2(\{n_i(t)\}) = \sum_{k \in S} \int n_k(t) s(|t_k - t|) dk. \quad (27)$$

以降では, この性質を利用して, 社会的最適状態と安定均衡状態を比較する.

社会的最適状態での始業時刻分布 N^o と安定均衡状態 N^s の性質を比較するために, (25) の目的関数 W を $P_1(N), P_2(N)$ のみで表現することを考える. その際, $\hat{W}_2(\{n_i(t)\})$ の次の性質が有益である.

補題 4 $Z(N) = \min_{\{n_i(t)\}} \hat{W}_2(\{n_i(t)\})$ s.t. (25b) は, 次の性質を満たす:

$$\frac{\partial Z(N)}{\partial N_i} = c_i^*(N). \quad (28)$$

証明 付録 IV 参照

補題 4 は, $Z(N)$ が (15) と一致した条件を満たすことを示している. したがって, $P_2(N)$ は $Z(N)$ で与えられることがわかる. この結果と (26a) から, 次の命題が導かれる.

命題 4 社会的最適状態での始業時刻分布 N^o は, 次の問題の解で与えられる:

$$\max_N P(N) + P_1(N) \quad \text{s.t. } N \in \Delta. \quad (29)$$

命題 4 は, N^o を求める最適化問題 (29) の目的関数が, ポテンシャル関数 $P(N)$ に生産性効果による正の外部性の影響を表す項 $P_1(N)$ を加えた形になることを示している. この事実は, 明らかに, 社会的最適状態での始業時刻分布 N^o は, 安定均衡状態での始業時刻分布 N^s と比較して, より集中する傾向にあることを意味している. 時差出勤制度の導入は始業時刻分布を安定均衡状態からさらに分散させる効果を持つことから, この結果は, 渋滞を完全に解消できる場合であれば, 時差出勤制度は社会的には非効率な結果をもたらすことを意味している. ただし, ここで注意が必要なのは, 本稿での結論は, 佐藤・赤松¹⁸⁾ の結果「始業時刻が集中した均衡パターンの方が社会的に望ましい」を支持するものではない点である. なぜなら, (29) の目的関数には通勤混雑による負の外部性の影響を表す項 $P_2(N)$ が含まれているため, “始業時刻が集中すればするほど社会的に望ましい”とは言えないからである.

⁷ admissible dynamics に含まれる他の例は, Sandholm³⁴⁾ 参照.

⁸ 詳細については, Vickrey¹²⁾, Hendrickson and Kocur³⁵⁾, Arnott et al.^{36), 13), 37)}などを参照.

(2) ピグー政策の有効性検証

次に、社会的最適状態を達成するための代表的な方策であるピグー政策の適用を考える。ピグー政策は、私的効用が社会的限界効用と一致するよう、経済主体に税金を賦課、または補助金を交付するものである。この政策の下では、社会的最適状態が均衡状態となることが保証されるものの、正・負の外部性が同時に存在する場合、必ずしも有効ではないことが、Akamatsu et al.³⁸⁾で指摘されている。より具体的には、ピグー政策を実施しても、社会的最適状態が不安定均衡状態となる可能性がある。本モデルでは、短期的には渋滞による負の外部性しか働かない (i.e., 均衡状態が唯一に定まり、ピグー政策が必ず機能する) 一方で、長期的には生産性効果と渋滞による正・負の外部性が両方存在する。したがって、長期的にはピグー政策が有効に機能しない可能性がある。そこで、ここではピグー政策の長期的な有効性を検証するために、ピグー政策実施下での社会的最適状態の安定性を確認する。なお、その際、短期的には (ピグー政策等により) 渋滞は解消されていると仮定する。

ピグー政策を企業 $i \in \mathcal{S}$ の労働者に適用する場合、その水準 $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^T$ は、命題 2, 4 より次で与えられる:

$$\mathbf{p} = \{HE - \tau D\} N^0. \quad (30)$$

そして、このピグー政策 \mathbf{p} を実施した状況は、利得関数が $\hat{\mathbf{u}}(N) = \mathbf{u}(N) + \mathbf{p}$ で与えられるゲーム $\hat{G} = \{\mathbb{I}, \mathcal{S}, \hat{\mathbf{u}}\}$ とみなすことができる。このゲーム \hat{G} は、次のポテンシャル \hat{P} を持つことから、ポテンシャルゲームであることがわかる:

$$\hat{P}(N) = P(N) + \mathbf{p} \cdot N. \quad (31)$$

このポテンシャル $\hat{P}(N)$ は、 $P(N)$ が必ずしも単峰ではないことから、一般には単峰とはならない。したがって、ゲーム \hat{G} の均衡状態は一般には一意ではないことがわかる。そこで、ゲーム \hat{G} のもとで均衡状態となる社会的最適状態 N^0 の安定性を確認しよう。この安定性は、3. (2) c) にあるとおり、ポテンシャル関数の Hessian matrix $\nabla^2 \hat{P}(N^0)$ により確認できる。より具体的には、 $\nabla^2 \hat{P}(N^0)$ が負定値であれば N^0 は安定、そうでなければ不安定である。ここで、 $\nabla^2 \hat{P}(N^0) = \nabla^2 P(N^0)$ であるため、 $\nabla^2 W(N^0) = \nabla^2 \hat{P}(N^0) + \nabla^2 P_1(N^0)$ 、かつ $\nabla^2 W(N^0)$ は負定値、 $\nabla^2 P_1(N^0)$ は正定値 (命題 2) となることに注目しよう。この事実は、明らかに $\nabla^2 \hat{P}(N^0)$ が負定値であることを意味している。この結果から、次の命題が得られる。

命題 5 ピグー政策 \mathbf{p} のもとでは、社会的最適状態 N^0 は安定均衡状態となる。

5. 始業時刻が 2 種類の場合のモデル特性の確認

本章では、単純な設定の下でこれまでに得られたモデルの特性を確認する。さらに、前章までの一般的な設定では調べるのが困難であった、安定均衡状態・社会的最適状態の具体的な特性も明らかにする。

なお、本章で考える具体的なモデルの設定は、以下に示すとおりである:

$$T = 2, \quad s(x) = \beta x^2. \quad (32)$$

ここで、 β は正のパラメータである。この設定下で短期均衡状態において FIFO 原則を満足するには、任意の t において $dq(t)/dt \leq \mu$ が成立する必要がある。短期均衡状態では、 $t \in [t_i^f, t_i^l]$ の範囲で $dq(t)/dt = -ds(|t - t_i|)/dt$ が成立することを利用すると、次の条件の下では、常に FIFO 原則が満たされることがわかる:

$$\beta N \leq \mu. \quad (33)$$

そこで、本章ではこの条件 (33) が常に満たされると仮定して分析を実施する。

(1) 安定均衡状態の特性

企業が設定できる始業時刻が $T = 2$ 種類である場合、均衡状態における始業時刻・出発時刻パターンは、次の 3 通りに分類できる:

Pattern 1: 全ての企業の始業時刻が同一となる (図-3-a).

Pattern 2.1: 時差出勤が実現し、かつ、渋滞が発生する時間帯 (rush hour) が 2 つに分かれる (図-3-b).

Pattern 2.2: 時差出勤が実現し、かつ、渋滞が発生する時間帯 (rush hour) が唯一 (図-3-c).

本章で扱うスケジュールコスト関数は $s(x) = s(-x) = \beta x^2$ となるため、Pattern 2.1, 2.2 が均衡状態となり得るのは、各々、 $\tau - N/(2\mu)$ が正・負のときのみである。この事実を利用すると、ポテンシャル最大化問題 (16) は、以下の形で表すことができる:

$$\max_{N_1} P(N_1) = P_1(N_1) - P_2(N_1) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq N_1 \leq N. \quad (34)$$

ここで、 $P_1(N_1), P_2(N_1)$ は、各々、次で与えられる:

$$P_1(N_1) = \alpha \left\{ \frac{HN^2}{2} - \tau N_1(N - N_1) \right\}, \quad (35a)$$

$$P_2(N_1) = \begin{cases} \frac{\beta N}{12\mu^2} \{N^2 - 3N_1(N - N_1)\} & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}, \\ \frac{\beta N^3}{12\mu^2} + \beta \tau \left(\frac{\tau}{N} - \frac{1}{\mu} \right) N_1(N - N_1) & \text{if } \tau \leq \frac{N}{2\mu}. \end{cases} \quad (35b)$$

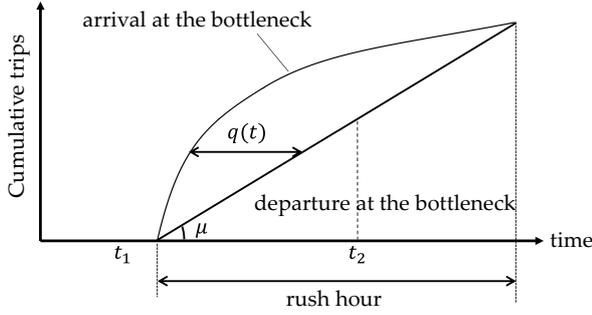


図-3-a Pattern 1

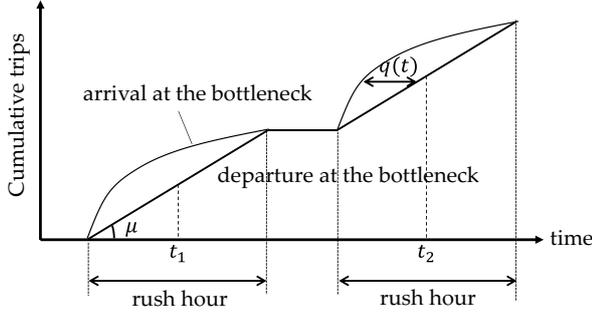


図-3-b Pattern 2.1

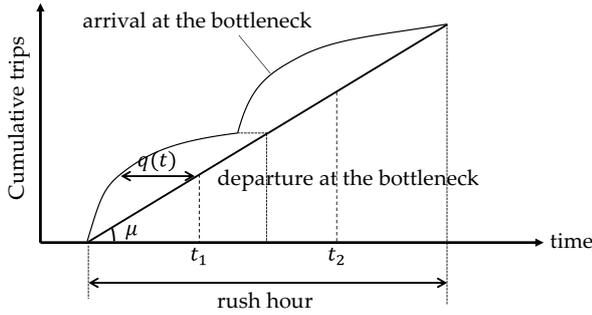


図-3-c Pattern 2.2

図-3 均衡状態となりうる始業時刻・出発時刻パターン

ここで注目すべきは、目的関数 $P(N_1)$ が N_1 の 2 次関数となることである。これは、 $P(N_1)$ が凸関数となるならば $N_1^s = 0, N$ 、すなわち、Pattern 1 が安定均衡状態となり、凹関数であれば $N_1^s = N/2$ 、すなわち、Pattern 2.1 または Pattern 2.2 が安定均衡状態となることを意味している (図-4)。そこで、目的関数の形状を調べるために、 $\partial^2 P(N_1)/\partial N_1^2$ を示しておこう：

$$\frac{\partial^2 P(N_1)}{\partial N_1^2} = \begin{cases} 2\left(\alpha\tau - \frac{\beta N}{4\mu^2}\right) & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}, \\ 2\tau\left\{\alpha + \beta\left(\frac{\tau}{N} - \frac{1}{\mu}\right)\right\} & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}. \end{cases} \quad (36)$$

これを用いると、次の命題が得られる：

命題 6 $T = 2$, $s(x) = \beta x^2$ とした場合の安定均衡状態における始業時刻分布は本質的に一意である。この安定均衡状態 N_1^s とパラメータ $\alpha, \beta, \mu, \tau, N$ との関係は次の

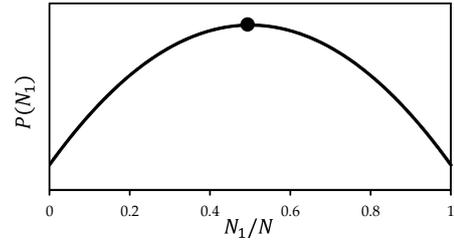


図-4-a 凹関数

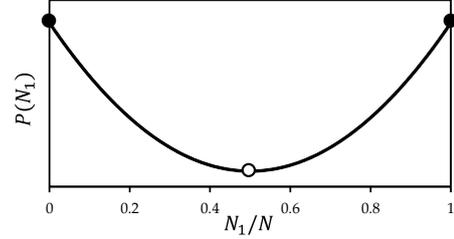


図-4-b 凸関数

図-4 ポテンシャル関数 $P(N_1)$ の形状と均衡状態 (●: 安定均衡状態, ○: 不安定均衡状態)

通り⁹

Pattern 1: $N_1^s = N$ and 0

$$\tau > \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (37)$$

Pattern 2.1: $N_1^s = N/2$

$$\tau < \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > \frac{N}{2\mu} \quad (38)$$

Pattern 2.2: $N_1^s = N/2$

$$\tau < N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \tau \leq \frac{N}{2\mu} \quad (39)$$

以上で示した、安定均衡状態とパラメータとの関係を図示したのが、図-5 である。なお、この図では、 $\alpha = 0.2, \beta = 1.0, N = 1.0$ と設定した。この結果から明らかに、 τ, μ が小さいほど、 t_1, t_2 の始業時刻に均等に労働者が出勤する時差出勤が安定均衡状態として実現しやすいことがわかる。

ここで、第 3 章でも議論した、ボトルネック容量増強が交通渋滞を悪化させ得ることを確認しておこう。その具体例として、ボトルネック容量 μ を 1.5 倍することで、始業時刻分布が Pattern 2.1 から Pattern 1 に変化する状況を考える (図-5 参照)。このケースでは、容量増強前・後の渋滞総待ち時間 Q_b, Q_a は、次で与えら

⁹ パラメータが $\tau = \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2}$ かつ $\tau > \frac{N}{2\mu}$ を満足するか、または $\tau = N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right)$ かつ $\tau \leq \frac{N}{2\mu}$ となる状況では、目的関数 P が一定値となる。したがって、任意の状態 $N_1 \in [0, N]$ は無差別であり、リアプノフの意味で安定均衡状態であると言える。(ただし、局所的な漸近安定均衡状態は存在しない。)

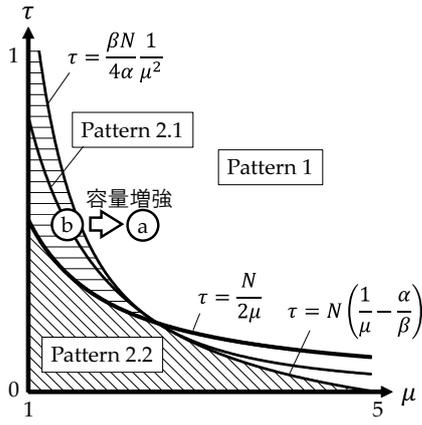


図-5 安定均衡状態とパラメータの関係

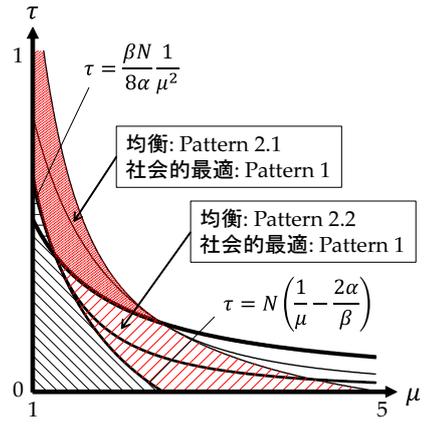


図-6 社会的最適状態と均衡状態の比較

れる:

$$\begin{aligned}
 Q_b &= \int_{t_f^1}^{t_i^1} n_1(t) q(t) dt + \int_{t_f^2}^{t_i^2} n_2(t) q(t) dt \\
 &= \mu \int_{t_f^1}^{t_i^1} c_1^* - s(|t - t_1|) dt + \mu \int_{t_f^2}^{t_i^2} c_2^* - s(|t - t_2|) dt \\
 &= \left\{ N_1 c_1^* + N_2 c_2^* \right\} - \frac{2\mu\beta}{3} \left\{ \left(\frac{N_1}{2\mu} \right)^3 + \left(\frac{N - N_1}{2\mu} \right)^3 \right\} \\
 &= \frac{8\mu\beta}{3} \left(\frac{N}{4\mu} \right)^3 \quad (40a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_a &= \int_{t_f^i}^{t_i^i} n_i(t) q(t) dt = 1.5\mu \int_{t_f^i}^{t_i^i} c_i^* - s(|t - t_i|) dt \\
 &= N c_i^* - \mu\beta \left(\frac{N}{3\mu} \right)^3 = 3\mu\beta \left(\frac{N}{3\mu} \right)^3 \quad (40b)
 \end{aligned}$$

この結果は、明らかに $Q_b < Q_a$ となることを示している。したがって、本モデルでは、ボトルネック容量の増加が交通渋滞を悪化させ得ることが確認できる。

(2) 社会的最適状態

次に、社会的最適状態の特性を調べよう。命題4より、社会的最適状態での始業時刻分布 $N_1^o, N_2^o (= N - N_1^o)$ は、次の問題の解で与えられる:

$$\max_{N_1} W(N_1) = 2P_1(N_1) - P_2(N_1) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq N_1 \leq N. \quad (41)$$

ここで、 $P_1(N_1), P_2(N_2)$ は (35) で与えられる。

最適化問題 (41) の目的関数 $W(N_1)$ も、ポテンシャル関数 $P(N_1)$ と同様、 N_1 の2次関数となる。したがって、 $W(N_1)$ が凸関数となるならば $N_1^o = 0, N$ 、すなわち、Pattern 1 が社会的最適状態となり、凹関数であれば $N_1^o = N/2$ 、すなわち、Pattern 2.1 または Pattern 2.2 が社会的最適状態となる。そこで、 $W(N_1)$ の形状を調

べるために、 $\partial^2 W(N_1) / \partial N_1^2$ を示しておこう:

$$\frac{\partial^2 W(N_1)}{\partial N_1^2} = \begin{cases} 2 \left(2\alpha\tau - \frac{\beta N}{4\mu^2} \right) & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}, \\ 2\tau \left\{ 2\alpha + \beta \left(\frac{\tau}{N} - \frac{1}{\mu} \right) \right\} & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}. \end{cases} \quad (42)$$

(42) より、次の命題が得られる:

命題7 $T = 2, s(x) = \beta x^2$ とした場合の社会的最適状態における始業時刻分布 N_1^o とパラメータ $\alpha, \beta, \mu, \tau, N$ との関係は以下で与えられる:¹⁰

Pattern 1: $N_1^s = N$ and 0

$$\tau > \frac{\beta N}{8\alpha\mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2\alpha}{\beta} \right) \quad (43)$$

Pattern 2.1: $N_1^s = N/2$

$$\tau < \frac{\beta N}{8\alpha\mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > \frac{N}{2\mu} \quad (44)$$

Pattern 2.2: $N_1^s = N/2$

$$\tau < N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2\alpha}{\beta} \right) \quad \text{and} \quad \tau \leq \frac{N}{2\mu} \quad (45)$$

以上の結果を具体的に確認するために、前節で示した図-5と同じ設定下での、社会的最適状態と安定均衡状態を比較しよう。この結果は、図-6に示すとおりである。この図の赤色部分が、社会的最適状態と安定均衡状態の出発・始業時刻パターンが異なるパラメータ範囲である。この結果から、社会的最適状態は必ず安定均衡状態より始業時刻分布が集中していることがわかる。したがって、第4章で議論したとおり、渋滞を完全に解消できる状況下では、始業時刻の分散化は社会的には望ましくないことがわかる。

¹⁰ パラメータが $\tau = \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2}$ かつ $\tau > \frac{N}{2\mu}$ を満足するか、または $\tau = N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right)$ かつ $\tau \leq \frac{N}{2\mu}$ となる状況では、目的関数 W が一定値となるため、任意の状態 $N_1 \in [0, N]$ が社会的最適状態となる。

6. おわりに

本研究では、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルを構築し、その均衡状態の特性を明らかにした。これまで時差出勤制度の効果を検証するために、時間集積の経済・不経済の両方を考慮したモデルが構築されてきた。しかし、その解析の困難さに起因し、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻選択モデルの特性は、殆ど明らかにされてこなかった。本研究は、労働者の出発時刻選択が短期間で均衡する一方、企業の始業時刻選択が均衡するにはは長期間かかるかと仮定することで、進化ゲーム理論分野で開発されたポテンシャル関数アプローチを利用することができることを明らかにした。そして、このアプローチを用いれば、ボトルネック渋滞を考慮したモデルの特性が非常に簡単に得られることを示した。

本研究では、時差出勤制度の効果を検証するために、モデルの均衡状態と社会的最適状態の特性を比較した。ただし、これまでの膨大な研究蓄積で明らかにされているように、社会的最適状態では交通渋滞が完全に解消されることに注意が必要である。和田・赤松による一連の研究^{27), 39), 40)}で提示されたボトルネック通行権を利用したメカニズムなど、交通渋滞を完全に解消する方策は確かに存在する。しかし、交通渋滞の完全な解消を近い将来実現することは難しいと言わざるを得ない。したがって、今後は、交通渋滞の解消が望めない次善最適状態と安定均衡状態の特性の比較に基づき、時差出勤制度の有効性を再度検証するとともに、次善最適状態を達成するための方策を提案することが必要であろう。

また、本稿で提示したアプローチは、出発・始業時刻選択モデルだけでなく、ボトルネックモデルを拡張した幅広い枠組みであっても、externality symmetry (条件 (12)) さえ満たせば、適用することが可能となる。この条件を満たす重要な枠組みの一つに、ボトルネック渋滞を考慮した Alonso⁴¹⁾ 型の住宅立地モデル²⁸⁾ などがある。そこで、これらのモデルに本研究で提示したアプローチを適用して、その特性を明らかにすることも、今後の重要な研究課題である。

謝辞: 本研究は、日本学術振興会・科学研究費補助金(課題番号 24760415)の助成金を受けた研究の一部である。また、本論文の初稿に対して、東北大学の赤松隆教授、神戸大学の井料隆雅教授、東京大学の和田健太郎助教から有益な意見を頂いた。ここに記し、感謝の意を表す。

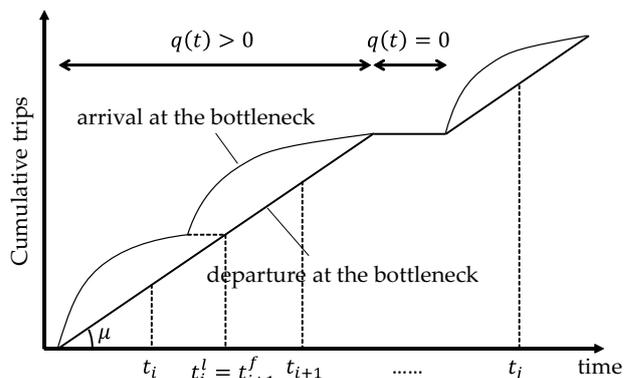


図-7 ボトルネックでの累積流入・流出通勤者数

付録 I 補題 1 の証明

(1) $\nabla c^*(N)$ の対称性

本モデルでは、ボトルネック渋滞を明示的に考慮している。そのため、Henderson³⁾, Arnott et al.¹⁴⁾ が導入している静的な交通混雑のみを考えた (i.e., c_i^* が N_i のみの関数で与えられる) 枠組みとは異なり、企業 i の労働者の均衡通勤費用 c_i^* は、企業 $j (< i)$ の労働者数 N_j の変化による影響を受け得る。より具体的には、企業 i の労働者の通勤時間帯から企業 $j (&neq i)$ の通勤時間帯にかけて、渋滞待ち行列が消滅しない (i.e., $q(t)$ がゼロにならない) 場合、 N_j の限界的な増加(減少)は、均衡状態における企業 i の通勤時間帯の渋滞を悪化(軽減)させる。ただし、そうでなければ、 N_j の限界的な変化は、 $c_i^*(N)$ に何ら影響を与えない。

この事実を確認した上で補題 1 を証明するために、企業 i の労働者が最初に CBD に到着する時刻を t_i^f 、最後に CBD に到着する時刻を t_i^l と定義する。命題 1 より、短期均衡状態 $n_i(t), q(t), c_i^*$ は一意に定まり、かつ FIFW 原理が成立するため、 t_i^f, t_i^l は次の関係を満たす:

$$t_{i-1}^l \leq t_i^f \quad \forall i \in S \setminus \{1\}. \quad (I.1)$$

また、企業 i の均衡通勤費用に影響を与えることができる企業 j の集合 S_i を以下のように定義しておこう:

$$S_i \equiv \{j \mid q(t) > 0 \quad \forall t \in [t_i, t_j] \text{ or } [t_j, t_i]\}. \quad (I.2)$$

最初に、企業 i の労働者の通勤時間帯と企業 $j (&neq i)$ の通勤時間帯の間で、渋滞待ち行列が解消するケースを考える(図-7)。これは、 j が S_i に含まれない (i.e., $j \notin S_i$) ケースを考えていることに相当する。このとき、明らかに、 N_j の変化は t_i^f, t_i^l に何の影響も及ぼさない。当然、 N_i の変化も $c_j^*(N)$ に影響を与えないため、次の関係が得られる:

$$\frac{\partial c_i^*(N)}{\partial N_j} = \frac{\partial c_j^*(N)}{\partial N_i} = 0 \quad \forall j \notin S_i \quad (I.3)$$

次に、企業 i の労働者の通勤時間帯と企業 $j (&neq i)$ の通勤時間帯の間、渋滞待ち行列が解消しない (i.e., $j \in S_i$)

ケースを考える。このとき、 $a_i \equiv \min \mathbf{S}_i, b_i \equiv \max \mathbf{S}_i$ とすると、 $q(t_{a_i}^f) = q(t_{b_i}^l) = 0$ が成立するため、次の関係が得られる:

$$c_i^*(\mathbf{N}) = \begin{cases} s(|\Delta t_i^f|) = q(t_i^f) + s(|\Delta t_i^l|) & \text{if } i = a_i, \\ q(t_i^f) + s(|\Delta t_i^f|) = s(|\Delta t_i^l|) & \text{if } i = b_i, \\ q(t_i^f) + s(|\Delta t_i^f|) = q(t_i^f) + s(|\Delta t_i^l|) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

ここで、 $\Delta t_i^f = t_i - t_{a_i}^f, \Delta t_i^l = t_i^l - t_i$ である。この関係を利用すると、均衡通勤費用はスケジュールコスト関数 $s(x)$ のみで表現できる:

$$\begin{aligned} c_i^* &= q(t_i^f) + s(|\Delta t_i^f|) \\ &= q(t_{i-1}^f) + s(|\Delta t_{i-1}^f|) - s(|\Delta t_{i-1}^l|) + s(|\Delta t_i^f|) \\ &= \dots = \sum_{k=a_i}^{i-1} \{s(|\Delta t_k^f|) - s(|\Delta t_k^l|)\} + s(|\Delta t_i^f|). \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

また、 $\Delta t_i^f, \Delta t_i^l$ は、 $t_{a_i}^f, \mathbf{N}$ を用いて、次のように表すことができる:

$$\Delta t_i^f = t_i - t_{a_i}^f - \frac{\sum_{k=a_i}^{i-1} N_k}{\mu}, \quad (\text{I.6a})$$

$$\Delta t_i^l = t_{a_i}^f + \frac{\sum_{k=a_i}^i N_k}{\mu} - t_i. \quad (\text{I.6b})$$

したがって、 $i > j$ となる i, j について、 N_j, N_i の変化が $c_i^*(\mathbf{N}), c_j^*(\mathbf{N})$ に与える影響は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i^*(\mathbf{N})}{\partial N_j} &= -\frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_j} \left[\sum_{k=a_i}^{i-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} + \psi(\Delta t_i^f) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \left[\psi(\Delta t_j^l) + \sum_{k=j+1}^{i-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} + \psi(\Delta t_i^f) \right], \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{\partial c_j^*(\mathbf{N})}{\partial N_i} = -\frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_i} \left[\sum_{k=a_i}^{j-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} + \psi(\Delta t_j^f) \right], \quad (\text{I.8})$$

$$\psi(x) \equiv \delta(x) \frac{ds(x)}{dx}, \quad (\text{I.9})$$

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

また、 $\partial c_i^*(\mathbf{N})/\partial N_i$ は、次のように表される:

$$\frac{\partial c_i^*(\mathbf{N})}{\partial N_i} = -\frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_i} \left[\sum_{k=a_i}^{i-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} + \psi(\Delta t_i^f) \right]. \quad (\text{I.11})$$

ここで、 $i = b_i$ のとき $q(t_i^l) = 0$ が成立することから、以下が与えられる:

$$\sum_{k \in \mathbf{S}_i} \{s(\Delta t_k^f) - s(\Delta t_k^l)\} = 0. \quad (\text{I.12})$$

この両辺を N_j で微分することで、次の関係が得られる:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_j} \left[\sum_{k \in \mathbf{S}_i} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \left[\psi(\Delta t_j^l) + \sum_{k=j+1}^{b_i} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

(I.7) に (I.13) を代入することで、次の関係が得られる:

$$\frac{\partial c_i^*(\mathbf{N})}{\partial N_j} = -\frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_i} \left[\sum_{k=a_i}^{j-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\} + \psi(\Delta t_j^f) \right]. \quad (\text{I.14})$$

この関係 (I.14) と (I.8) より、 $i > j$ となる i, j について

$$\frac{\partial c_i^*(\mathbf{N})}{\partial N_j} = \frac{\partial c_j^*(\mathbf{N})}{\partial N_i} = \frac{S_{ij}^f S_{ji}^l}{S_i}, \quad (\text{I.15})$$

$$S_{ij}^f \equiv \psi(\Delta t_j^f) + \sum_{k=a_i}^{j-1} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\}, \quad (\text{I.16})$$

$$S_{ij}^l \equiv \psi(\Delta t_j^l) + \sum_{k=j+1}^{b_i} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\}, \quad (\text{I.17})$$

$$S_i \equiv \mu \sum_{k \in \mathbf{S}_i} \{\psi(\Delta t_k^f) + \psi(\Delta t_k^l)\}, \quad (\text{I.18})$$

が成立する。ここで、 $\psi(\Delta t_i^f) + \psi(\Delta t_{i+1}^f) > 0 \forall i, i+1 \in \mathbf{S}_i, \psi(\Delta t_{a_i}^f) > 0, \psi(\Delta t_{b_i}^l) > 0$ より、 S_i, S_{ij}^f, S_{ij}^l は常に正である:

$$S_i > 0, \quad S_{ij}^f > 0, \quad S_{ij}^l > 0. \quad (\text{I.19})$$

これらの結果 (I.3), (I.15) から、直ちに $c^*(\mathbf{N})$ の Jacobi 行列 $\nabla c^*(\mathbf{N})$ は対称であることがわかる。

(2) $\nabla c^*(\mathbf{N})$ の正定値性

Horn and Johnson⁴²⁾, Strang⁴³⁾ で示されているように、対角成分が正の下三角行列 \mathbf{L} により、 $\nabla c^*(\mathbf{N})$ を以下に示すように Cholesky 分解することができれば、 $\nabla c^*(\mathbf{N})$ は正定値である:

$$\nabla c^*(\mathbf{N}) = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top. \quad (\text{I.20})$$

ここで、 \top は転置を表す。(I.11), (I.15) より、任意の $i \in \mathbf{S}$ に対して $S_{i0}^f = 0, S_{i0}^l > 0$ と定義すると、 $\mathbf{L} = [L_{ij}]$ は以下で与えられる:

$$L_{ij} = \begin{cases} S_{ii}^l \sqrt{\frac{1}{S_i} \left\{ \frac{S_{ij}^f}{S_{ij}^l} - \frac{S_{i(j-1)}^f}{S_{i(j-1)}^l} \right\}} > 0 & \text{if } i \geq j, j \in \mathbf{S}_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

なお、定義 (I.16), (I.17) より、 $S_{ij}^f > S_{i(j-1)}^f, S_{i(j-1)}^l > S_{ij}^l$ が成立するため、 $(S_{ij}^f/S_{ij}^l - S_{i(j-1)}^f/S_{i(j-1)}^l) > 0$ となることに注意せよ。

$j \in \mathbf{S}_i$ に対して $S_i = S_j, S_{ik}^f = S_{jk}^l, S_{ik}^l = S_{jk}^f$ が成立することに注意すると, LL^T の i, j 要素が次で与えられることから, 上記の結果が容易に確認できる:

$$\sum_k L_{ik}L_{jk} = \begin{cases} \frac{S_{ii}^l S_{ij}^l}{S_i} \sum_{k=a_i}^{\min(i,j)} \left\{ \frac{S_{ik}^f}{S_{ik}^l} - \frac{S_{i(k-1)}^f}{S_{i(k-1)}^l} \right\} & \text{if } j \in \mathbf{S}_i, \\ 0 & \text{if } j \notin \mathbf{S}_i, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{S_{ij}^f S_{ii}^l}{S_i} & \text{if } i \geq j, j \in \mathbf{S}_i, \\ \frac{S_{ii}^f S_{ij}^l}{S_i} & \text{if } i < j, j \in \mathbf{S}_i, \\ 0 & \text{if } j \notin \mathbf{S}_i. \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

付録 II 命題 2 の証明

$P(N)$ がポテンシャル関数であることは, (10), (12) より明らかである. そこで, ここでは, $P_1(N), P_2(N)$ が凸関数であることを証明する.

まず, $P_2(N)$ は, その Hessian 行列 $\nabla c^*(N)$ が, 補題 (1) より正定値であるため, 明らかに狭義凸関数である.

次に, $P_1(N)$ の凸性を調べる. $P_1(N)$ の Hessian 行列 $D^2P_1(N) = \nabla F(N)$ は, 以下で与えられる:

$$D^2P_1(N) = \alpha \{HE - \tau D\}. \quad (\text{II.1})$$

$\Phi \equiv HE - \tau D$ と定義すると, その逆行列 Φ^{-1} が次のように表される:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \gamma & -0.5 & & & \epsilon \\ -0.5 & 1 & -0.5 & & \mathbf{O} \\ & -0.5 & 1 & -0.5 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{O} & & -0.5 & 1 & -0.5 \\ \epsilon & & & & -0.5 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{II.2a})$$

$$\gamma = \epsilon + 0.5, \quad (\text{II.2b})$$

$$\epsilon = \frac{\tau}{2\{2H - (T-1)\tau\}}. \quad (\text{II.2c})$$

Gershgorin の定理 (定理の詳細は, Horn and Johnson⁴², Strang⁴³, 伊理⁴⁴ 参照) より, Φ^{-1} の任意の固有値 $\lambda_{\Phi^{-1}}$ は次の範囲に存在することがわかる:

$$0 \leq \lambda_{\Phi^{-1}} \leq \max\{1 + 2\epsilon, 2\}. \quad (\text{II.3})$$

この結果から, $D^2P_1(N) = \alpha\Phi$ の固有値 $\alpha\lambda_{\Phi^{-1}}$ は全て非負であることがわかる. したがって, $D^2P_1(N)$ は半正定値, すなわち $P_1(N)$ は凸関数である.

付録 III 補題 3 の証明

$i, j \in \text{supp } N^*$ かつ $j - i \geq 2$ となる i, j に対して, $N_k^* = 0 \forall k \in (i, j)$ が成立する均衡状態 N^* が存在すると仮定する. このとき, $d_{ij} \equiv |i - j|, \tilde{N}_k^- \equiv \sum_{m=1}^k N_m, \tilde{N}_k^+ \equiv \sum_{m=k}^T N_m$ と定義すると, $k \in (i, j)$ に対して次の関係が成立する:

$$u_i = u_j \geq u_k, \quad (\text{III.1a})$$

$$u_i - u_j = \tau d_{ij} \{\tilde{N}_k^- - \tilde{N}_k^+\} - c_i^*(N) + c_j^*(N) = 0, \quad (\text{III.1b})$$

$$u_i - u_k = \tau d_{ik} \{\tilde{N}_k^- - \tilde{N}_k^+\} - c_i^*(N) + c_k^*(N) \geq 0, \quad (\text{III.1c})$$

$$u_j - u_k = \tau d_{kj} \{\tilde{N}_k^+ - \tilde{N}_k^-\} - c_j^*(N) + c_k^*(N) \geq 0. \quad (\text{III.1d})$$

ここで, $\tilde{N}_k^- \geq \tilde{N}_k^+$ が成立すると仮定しよう. このとき, (III.1b) より $c_i^*(N) \geq c_j^*(N) > 0$, (III.1d) より $c_k^*(N) \geq c_j^*(N) > 0$ が得られる. この結果から, t_k 時点では渋滞が存在する. すなわち, 企業 i の労働者が最後に CBD に到着する時刻 t_i^l は t_k より遅くなる (i.e., $t_i^l > t_k$) ことがわかる. また, 企業 i の労働者が最初に CBD に到着する時刻を t_i^f と表すと, (III.1d) に (III.1b) を代入することにより, 次の関係が得られる:

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= -\frac{d_{ik}}{d_{ij}} c_j^*(N) - \frac{d_{kj}}{d_{ij}} c_i^*(N) + c_k^*(N), \\ &= -\frac{d_{ik}}{d_{ij}} s(|t_j - t_j^f|) - \frac{d_{kj}}{d_{ij}} s(t_i^l - t_i) + s(t_i^l - t_k), \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

$t_i^l < t_j$ となるとき, $s(x)$ の凸性を利用すると,

$$\begin{aligned} s(t_i^l - t_k) - \frac{d_{kj}}{d_{ij}} s(t_i^l - t_i) \\ &\leq s(t_i^l - t_k) - \frac{d_{kj}}{d_{ij}} s(t_i^l - t_k) - \tau \frac{d_{ik} d_{kj}}{d_{ij}} s'(t_i^l - t_k) \\ &= \frac{d_{ik}}{d_{ij}} \{s(t_i^l - t_k) - \tau d_{kj} s'(t_i^l - t_k)\} < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

ここで, $s'(x) = ds(x)/dx$ である. また, $t_i^l \geq t_j$ の場合, $t_i^l = t_j^f$ となるため, $s(x)$ が凸関数であることを利用すると, 次の関係が得られる:

$$s(t_i^l - t_k) < \frac{d_{ik}}{d_{ij}} s(t_i^l - t_k) + \frac{d_{kj}}{d_{ij}} s(t_i^l - t_k). \quad (\text{III.4})$$

(III.3), (III.4) を (III.2) に代入することで, $u_j - u_k < 0$ が得られる. また, $\tilde{N}_k^- < \tilde{N}_k^+$ となる場合についても, (III.1b), (III.1c) を利用すると, これまでと全く同様の手順により, $u_i - u_k < 0$ となることが確認できる. しかし, これらは, (III.1a) と矛盾することから, 補題 3 が得られる.

付録 IV 補題 4 の証明

企業 i の労働者が最初・最後に CBD に到着する時刻を、各々、 t_i^f, t_i^l と表す。このとき、 $Z(\mathbf{N})$ は、次のように表すことができる：

$$Z(\mathbf{N}) = \sum_{k \in \mathbf{S}} \int_{t_k^f}^{t_k^l} \mu s(|t_k - t|) dt. \quad (\text{IV.1})$$

$t_i^l = t_i^f + N_i/\mu$ が成立するため、(I.2) で定義される \mathbf{S}_i を用いることで、 t_i^f, t_i^l は以下で与えられる：

$$t_i^f = t_{a_i}^f + \frac{1}{\mu} \sum_{k=a_i}^{i-1} N_k, \quad (\text{IV.2a})$$

$$t_i^l = t_{a_i}^f + \frac{1}{\mu} \sum_{k=a_i}^i N_k. \quad (\text{IV.2b})$$

ここで、 $a_i \equiv \min \mathbf{S}_i$ である。この関係を利用すると、 $\partial Z(\mathbf{N})/\partial N_i$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(\mathbf{N})}{\partial N_i} &= s(|t_i - t_i^l|) + \sum_{k=i+1}^{b_i} \{s(|t_k - t_k^f|) - s(|t_k - t_k^l|)\} \\ &+ \frac{\partial t_{a_i}^f}{\partial N_i} \sum_{k \in \mathbf{S}_i} \{s(|t_k - t_k^f|) - s(|t_k - t_k^l|)\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

ここで、 $b_i \equiv \max \mathbf{S}_i$ である。これに、(I.5)、(I.12) を代入すると、(28) が得られる。

参考文献

- 1) Wilson, P. W.: Wage variation resulting from work hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 24, No. 1, pp. 9–26, 1988.
- 2) 吉村充功, 奥村誠, 塚井誠人: 都市内業務トリップにおける時間的集積の経済性, 都市計画論文集, Vol. 34, pp. 217–222, 1999.
- 3) Henderson, J. V.: The economics of staggered work hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 9, No. 3, pp. 349–364, 1981.
- 4) Beckmann, M. J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, in Papageorgiou, G. J. ed. *Mathematical Land Use Theory*, Lexington Books, pp. 117–125, 1976.
- 5) Fujita, M. and Thisse, J.-F.: *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Regional Growth*, Cambridge University Press, pp. 466, 2002.
- 6) Akamatsu, T., Fujishima, S., and Takayama, Y.: On Stable Equilibria in Discrete-Space Social Interaction Models, *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*, No. 55938, 2014.
- 7) 高山雄貴, 赤松隆: 空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 67, No. 1, pp. 1–20, 2011.
- 8) 高山雄貴, 赤松隆: Beckmann 型都心創発モデルの均衡解の一意性と安定性, 土木学会論文集 D, Vol. 66, No. 2, pp. 232–245, 2010.
- 9) Picard, P. M. and Mossay, P.: On spatial equilibria in a social interaction model, *Journal of Economic Theory*, Vol. 146, No. 6, pp. 2455–2477, 2010.
- 10) Monderer, D. and Shapley, L. S.: Potential games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 14, No. 1, pp. 124–143, 1996.
- 11) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, pp. 81–108, 2001.
- 12) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, *The American Economic Review*, Vol. 59, No. 2, pp. 251–260, 1969.
- 13) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand, *The American Economic Review*, Vol. 83, No. 1, pp. 161–179, 1993.
- 14) Arnott, R., Rave, T., and Schöb, R.: *Alleviating Urban Traffic Congestion*, MIT Press, 2005.
- 15) 奥村誠, 小林潔司, 田中成興: 鉄道時差出勤の社会的便益と導入インセンティブに関する分析, 応用地域学研究, Vol. 4, pp. 63–75, 1999.
- 16) 吉村充功, 奥村誠: ダイナミカルシステム論による鉄道時差出勤パターン分析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 17, No. 2, pp. 879–884, 2000a.
- 17) 高山雄貴, 松岡香織, 吉井稔雄: 時間集積の経済不経済を考慮した始業時刻選択モデル, 交通工学研究発表会論文集, Vol. 33, 2013.
- 18) 佐藤慎太郎, 赤松隆: 企業と家計の相互作用を考慮した始業・出発時刻均衡モデル, 土木計画学研究・論文集, Vol. 23, No. 4, pp. 903–910, 2006.
- 19) 吉村充功, 奥村誠: 鉄道通勤における「スーパーフレックス」制度の経済評価, 都市計画論文集, Vol. 35, pp. 1075–1080, 2000b.
- 20) Yoshimura, M. and Okumura, M.: Optimal commuting and work start time distribution under flexible work hours system on motor commuting, *Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 3, No. 2, pp. 455–469, 2001.
- 21) 吉村充功, 奥村誠, 松本寛史: フレックスタイム制度下における最適ピークロードプライシング, 土木計画学研究・論文集, Vol. 19, No. 4, pp. 823–830, 2002.
- 22) Mun, S.-i. and Yonekawa, M.: Flexitime, traffic congestion and urban productivity, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 40, No. 3, pp. 329–358, 2006.
- 23) Oyama, D.: Agglomeration under forward-looking expectations: Potentials and global stability, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, No. 6, pp. 696–713, 2009.
- 24) Fujishima, S.: Evolutionary implementation of optimal city size distributions, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 43, No. 2, pp. 404–410, 2012.
- 25) Sandholm, W. H.: Evolutionary implementation and congestion pricing, *The Review of Economic Studies*, Vol. 69, No. 3, pp. 667–689, 2002.
- 26) 菊地志郎, 赤松隆: 進化ゲーム理論に基づいたネットワーク通行権取引制度の自律分散的インプリメンテーション, 土木計画学研究・論文集, Vol. 25, No. 3, pp. 589–596, 2008.
- 27) 和田健太郎, 赤松隆: 単一ボトルネックにおける渋滞と混雑を解消する情報効率的メカニズムの設計, 土木学会論文集 D, Vol. 66, No. 2, pp. 160–177, 2010.
- 28) Arnott, R.: Congestion tolling and urban spatial structure, *Journal of Regional Science*, Vol. 38, No. 3, pp. 495–504, 1998.
- 29) Daganzo, C. F.: The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck, *Transportation Science*, Vol. 19, No. 1, pp. 29–37, 1985.
- 30) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak, *Transportation Science*, Vol. 24, No. 3, pp. 217–229, 1990.

- 31) Lindsey, R.: Existence, uniqueness, and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes, *Transportation Science*, Vol. 38, No. 3, pp. 293–314, 2004.
- 32) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 33) Simsek, A., Ozdaglar, A., and Acemoglu, D.: Generalized Poincaré-Hopf theorem for compact nonsmooth regions, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 32, No. 1, pp. 193–214, 2007.
- 34) Sandholm, W. H.: Excess payoff dynamics and other well-behaved evolutionary dynamics, *Journal of Economic Theory*, Vol. 124, No. 2, pp. 149–170, 2005.
- 35) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model, *Transportation Science*, Vol. 15, No. 1, pp. 62–77, 1981.
- 36) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: Economics of a bottleneck, *Journal of Urban Economics*, Vol. 27, No. 1, pp. 111–130, 1990.
- 37) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 28, No. 2, pp. 139–161, 1994.
- 38) Akamatsu, T., Fujishima, S., and Takayama, Y.: Stabilization of social optimum in economies with positive and negative externalities, *mimeograph*, 2014.
- 39) 和田健太郎, 赤松隆: ネットワーク通行権取引市場のオークション・メカニズム, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 67, No. 3, pp. 376–389, 2011.
- 40) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: An auction mechanism with day-to-day capacity control, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 60, pp. 94–112, 2013.
- 41) Alonso, W.: *Location and Land Use*, pp. Harvard University Press, 1964.
- 42) Horn, R. A. and Johnson, C. R.: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- 43) Strang, G.: *Linear Algebra and Its Applications*, Thomson Brooks/Cole, 4th edition, 2006.
- 44) 伊理正夫: 一般線形台数, 岩波書店, 2003.

(2014.8.1 受付)

A MODEL OF DEPARTURE TIME AND WORK START TIME CHOICES WITH BOTTLENECK CONGESTION

Yuki TAKAYAMA

A number of studies have been devoted to examine the effect of staggered work hours by analyzing a model of departure time and work start time choices. Although the introduction of staggered work hours is one of the transportation demand management measures for alleviating traffic congestion during peak hours, almost all of these studies do not consider bottleneck congestion due to analytical difficulties. In order to overcome these difficulties, this study provides an approach to analyzing a model of departure time and work start time choices with bottleneck congestion which utilizes the properties of potential game. By applying this approach, the intrinsic properties of the model are characterized.