

コリドー型道路網における 通勤交通流のダイナミクス

関直哉¹・赤松隆²・林俊介³

¹学生会員 東北大学 情報科学研究科 (〒 980-8576 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: n.seki@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学 情報科学研究科 (〒 980-8576 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学 情報科学研究科 (〒 980-8576) 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09)

E-mail: s.hayashi@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究の目的は、ボトルネックが直列に連なる道路を利用する、多起点1終点ODをもつ通勤者の出発時刻選択の均衡状態の特性を特徴づけることである。本研究ではそれをもとに実験し、均衡状態の特徴を探る。まず通勤者の出発時刻選択に関する均衡状態を数理モデルとして定式化する。さらに、そのような均衡状態を求める問題を、座標系の工夫によって、線形相補性問題として定式化する。その解法アルゴリズムを構築して系統的に数値実験を行い、パラメータの変化に対する均衡解の変化を調べる。具体的には、各地点での渋滞のパターンを、交通需要と交通容量の比である正規化需要を基準に分類できることを観察する。

Key Words: 出発時刻選択均衡問題, ボトルネック渋滞, 動的利用者均衡配分問題

1. はじめに

渋滞現象は、世界中の多くの都市で起こる現象であり、改善を求められている社会問題である。なかでも、都市の日常的な渋滞問題としては、朝の通勤ラッシュが最も顕著である。そこで、朝の通勤ラッシュの渋滞現象を把握するために、都心部 (CBD: Central Business District) へ向かう通勤者の出発時刻の選択行動の均衡状態を知ることが重要である。

通勤ラッシュの渋滞現象の表現については、利用者が出発時刻を選択する均衡問題として、Vickrey¹⁾をはじめとして多くの研究がなされてきた。たとえば、単路型道路網における単一ボトルネックを考慮したモデルに対して、解の存在 (Smith²⁾) や唯一性 (Daganzo³⁾) などが証明されている。一方、複数のボトルネックを考慮した出発時刻選択均衡問題に関する研究はこれまであまりなく、2つのボトルネックを考慮した Kuwahara⁴⁾ や高山ら⁵⁾ の研究が存在するものの、3つ以上のボトルネックを有するモデルへの拡張はほとんどなされていない。現実には、コリドー型道路網 (単路) においても多くのボトルネックやランプが存在しているが、その均衡状態は解析的に自明ではないため、ボトルネック数やオンランプ数を一般化したモデルに対する出発時刻に関する選択均衡問題を研究する必要がある。

本研究の目的は、複数ボトルネックを考慮したコリドー型道路網において、出発時刻選択問題の均衡解の特徴を明らかにすることである。そのために、複数のボトルネックのモデルを含む出発時刻選択均衡配分問題を線形相補性問題 (LCP: Linear Complementarity Problem) として定式化し、解法アルゴリズムを構築する。そのアルゴリズムを用いて、様々な問題に対する均衡解の特徴づけをする。

2. モデル

(1) ネットワークの設定

本研究では、朝の通勤 (多起点1終点) パターンとして、単路 (1本の分岐のない道路) のネットワークを対象とする。これは、幹線道路や高速道路のネットワークを表現していると捉えることができる。

図-1のように、道路上には N 箇所のボトルネックとオンランプ (流入口) が存在する。地点 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ のボトルネックを BN_i 、その交通容量は μ_i 、ランプ総流入量を Q_i とする。 Q_i は地点 i の CBD への通勤人口に対応する。

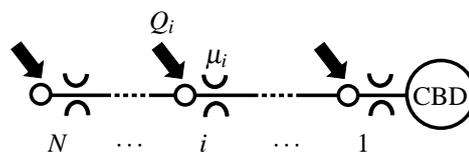


図-1 朝の通勤モデル

(2) 到着時刻ベースの座標系の導入

この研究では、各通勤者の到着時刻を基準とした、到着時刻ベースの座標系を基に定式化する。この座標系を用いることによって、複数ボトルネックを考慮したモデルの数学的な解析が容易になる。

地点 i からの通勤者 ($User_{i,u}$) は、CBD への到着時刻が u となるように、出発時刻を選択する。均衡状態では、 $User_{i,u}$ が、出発時刻から到着時刻を推定 (時刻の情報を把握) できる状態と仮定する。長期的には $User_{i,u}$ が渋滞現象を把握できるようになることから、この仮定は妥当と言える。

(3) 出発時刻選択均衡問題

出発時刻選択の均衡条件は、通勤者の行動原理、渋滞の発生原理、およびフロー保存則の3条件からなる。

a) 出発時刻選択均衡条件

$User_{i,u}$ は、各自の交通費用 $TC_i(u)$ を最小にするような行動原理に基づき行動する。通勤者らが共通して持つ希望到着時刻 t_w と実際の到着時刻 u との差異に対し、早着・遅着への不効用を表現するペナルティ関数 $d(u)$ を導入する。(ペナルティ関数の具体例は4-(2)を参照のこと。) $User_{i,u}$ の交通費用は、自由走行時間 m_i 、渋滞による待ち時間 $w_i(u)$ 、および $d(u)$ の和で定まる。

$$TC_i(u) = \sum_{j=1}^i (m_j + w_j(u)) + d(u) \quad (1)$$

$User_{i,u}$ の BN_i への流入率を $q_i(u)$ とする。交通費用 $TC_i(u)$ が最小交通費用 ρ_i に等しいとき ($\rho_i = \min_u TC_i(u)$)、地点 i から CBD への交通が発生し ($q_i(u) > 0$)、それ以外のときは交通が発生しない ($q_i(u) = 0$)。これを線形相補性条件として表す。すべての通勤者が出発時刻を変更しても交通費用を下げることができないとき、Nash 均衡状態であると定義する。ここで、内生変数は $w_i(u), q_i(u)$ および ρ_i である。均衡条件:

$$\begin{cases} [TC_i(u) - \rho_i] \cdot q_i(u) = 0 \\ TC_i(u) - \rho_i \geq 0 \\ q_i(u) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

b) 渋滞の発生原理

地点 i において、上流からの通勤者 $User_{j,u} (i \leq j \leq N)$ の流入率の総和 $\sum_{j=i}^N q_j(u)$ がボトルネック容量 μ_i を超過した場合、地点 i では渋滞が発生し、渋滞による待ち時間 $w_i(u)$ が発生する。ただし、到着時刻ベースの座標系を考えているため、実際に $User_{j,u} (i \leq j \leq N)$ が通行するボトルネックの容量は、見かけ上の容量 $\hat{\mu}_i(u)$ になる。渋滞の発生条件:

$$\begin{cases} [\sum_{j=i}^N q_j(u) - \hat{\mu}_i(u)] \cdot w_i(u) = 0 \\ \sum_{j=i}^N q_j(u) - \hat{\mu}_i(u) \geq 0 \\ w_i(u) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{where } \hat{\mu}_i(u) \equiv \mu_i \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{dw_j(u)}{du} \right)$$

c) フロー保存則

対象時間帯 $\mathcal{U} = [U, \bar{U}]$ ですべての通勤者が CBD へ到着する。つまり、 $q_i(u)$ の \mathcal{U} に対する積分値は、通勤人口 Q_i に等しくなる。フロー保存則:

$$\int_U^{\bar{U}} q_i(u) du - Q_i = 0 \quad (4)$$

(4) 線形相補性問題への変換

式(2), 式(3), 式(4)より、出発時刻選択均衡問題は適当な行列 M とベクトル b を用いて、以下のような LCP として整理できる。

$$\begin{aligned} 0 \leq x(u) \perp Mx(u) + b \geq 0 \\ x(u) = (q(u), w(u), \rho)^T \end{aligned} \quad (5)$$

しかし、 u は連続の値を取るため、LCP(5)の変数は無限次元となり、解析や求解が困難である。よって、本研究では連続時間 $u \in [U, \bar{U}]$ を離散時間 $k = 1, 2, \dots, K$ に

変換した場合について考える。離散化した場合の行列 M は以下のような行列となる。

$$M = \begin{bmatrix} 0 & (N^{-1})^T & -1 \\ -N^{-1} & \mathcal{M} \left(I - (N^{-1})^T \right) \otimes \Delta w & 0 \\ 1^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 \mathcal{M} は対角成分が μ である対角行列、 $\Delta w = w(k+1) - w(k)$,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

である。

3. 均衡解の特性を調べる数値実験

(1) 均衡解のパターン分類

ここでは、既存研究における単路ネットワークでの均衡解のパターンについて言及する。2つのボトルネックを考慮したモデルの均衡解では、高山ら⁵⁾によって渋滞パターンが定性的に2種類に分類できることがわかっており、 $User_1$ と $User_2$ の交通流が、それぞれ干渉する推移パターンと干渉しないパターンに分類される。特徴は、上流側における渋滞現象が、前者は発生せず、後者では必ず発生するという違いが生まれることである。このことを参考に、多数のボトルネックにおいてこれらのようなパターンへ分類できるかどうか検証した。

(2) 数値実験の目的と方法

実験の目的は、均衡解の渋滞現象に規則性があるかどうかを観察することである。本章では、離散化した定式化をもとに、均衡解を解くためのアルゴリズムを構築する。構築したアルゴリズムをもとに、外生変数に対し網羅的に実験した。その結果、均衡状態における渋滞パターンが規則的に現れることが明らかになった。そこで、この規則性を調べるために、実験結果とパターン分類の方法について考察する。

(3) アルゴリズム

LCP(5) を離散化した問題は、以下のような二次計画問題に帰着することができる。

二次計画問題:

$$\begin{aligned} \min_{q(u), w(u), \rho} \quad & F_{QP} = \sum_U^{\bar{U}} \left[d(u) \mathbf{1} + (N^{-1})^T m \right] q(u) \delta u \\ & + \sum_U^{\bar{U}} w(u) \cdot \mathcal{M} \left(I - (N^{-1})^T \right) (w(u + \delta u) - w(u)) \\ & - \rho Q \\ \text{subject to} \quad & d(u) \mathbf{1} + (N^{-1})^T m - \rho \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \\ & \mathcal{M} \left(I - (N^{-1})^T \right) (w(u + \delta u) - w(u)) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \\ & \sum_U^{\bar{U}} q(u) \delta u = Q \quad \forall u \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

本研究ではこの解法アルゴリズムとして Frank-Wolfe 法を用いた。

アルゴリズム:

step 0: $m, Q, d(u), \mu, \delta u$ を設定. $k = 0$
 step 1: $F_{QP}(x) \sim \nabla F_{QP}(x^{(k)}) \cdot x + const$ に変換
 step 2: $x^{(k+1)} = \alpha x + (1 - \alpha)x^{(n)}$ として
 $\min_{0 \leq \alpha \leq 1} F_{QP}(x^{(k+1)})$ を解く
 step 3: 収束ならば終了.
 それ以外の時 $k = k + 1$ として step 1 へ

(4) パターン分類の方法

解析解の渋滞のパターンを分類するために、外生変数に対する均衡解の変化を網羅的に調べた。

その結果、パターンを定性的に把握するために、地点 i における総交通量をボトルネック容量で除したものを‘正規化需要’: $RD_i \equiv \sum_{j=1}^N Q_j / \mu_i$ と定義し、これが分類の評価基準とできることがわかった。正規化需要は、その地点におけるボトルネックがどの程度逼迫しているかを表す数値である。

4. 実験結果による均衡解の特性

(1) 実験結果

5つのボトルネックを考慮した実験では、正規化需要の大小関係より区別される $5! = 120$ 種類の実験のうち、図-2 は一部である。正規化需要をもとに網羅的に実験をし、均衡状態において渋滞が発生している地点に色をつけた。

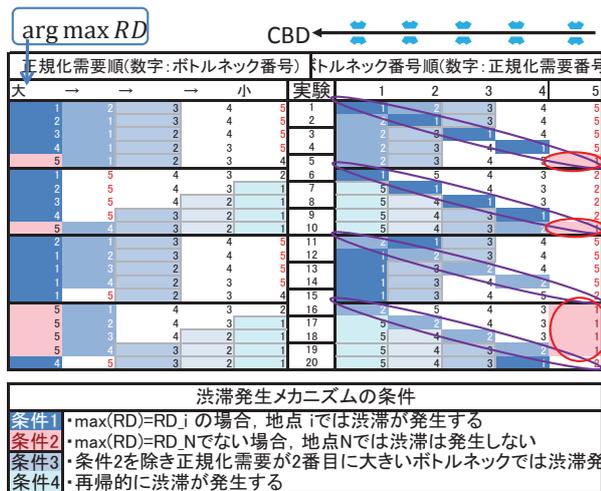


図-2 正規化需要とボトルネック渋滞地点の関係

例えば、図-2 中の実験 17 では、 $RD_5 > RD_2 > RD_4 > RD_3 > RD_1$ という条件で実験し、結果として BN_1, BN_2, BN_5 で渋滞が発生することを表している。この実験を、4つのボトルネック、3つのボトルネックでも同様に実験した。

(2) 結果の特性

実験から以下のような特徴があることが明らかとなった。

- $RD_i = \max\{RD_1, \dots, RD_N\}$ のとき、地点 i では必ず渋滞が発生する。(図-2の青色部分)
- $RD_N = \max RD_N$ を満たす場合、 $RD_i = \max\{RD_1, \dots, RD_{N-1}\}$ のとき、地点 i では必ず渋滞が発生する。さらにこの条件下で... と再帰

的な条件下で渋滞が発生する。(図-2の薄い青色部分)

1点目は、通勤路の中で最も逼迫したボトルネックで必ず渋滞が発生するというを表している。2点目は、もっとも逼迫したボトルネックが最上流の場合、最上流を除いたネットワークとして、1点目と次の条件が適用される。これは再帰的な条件である。

また、数式に現れていないが以下の条件があることも明らかになった。

- 特に BN_N において、 $RD_N \neq \max RD_i$ の場合、 BN_N では渋滞は必ず発生しない。(図-2の赤色部分が渋滞発生状態。赤字が渋滞が発生していない状態。)これは最上流のボトルネックで渋滞が発生する条件を表している。具体的には、最も上流のボトルネックが最も逼迫している状態の時に限り最上流で渋滞が発生し、それ以外の時には渋滞が発生しないということである。

このことによって、ある地点よりも上流側の全てのボトルネックで渋滞している場合の交通流パターンを、数学的に評価することができた。

また、上2点(図-2の青色系部分の一部)は以下のように数学的に表すこともできる。 $\mathcal{N} = 1, \dots, N$ に対して以下の条件を満たしていれば、正規化需要の条件によって再帰的に渋滞することが保証できる地点を見つけることができる。

$$\begin{aligned} \max_{j \in \mathcal{N}} RD_j = RD_i &\Rightarrow w_i(u) > 0 \exists u \\ \text{for } k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \max_{j \in \mathcal{N}-k} RD_j = RD_{N-k} &\Rightarrow w_{N-k}(u) > 0 \exists u \\ \text{else } &\text{break} \end{aligned}$$

(3) 明らかになった規則性の応用例

以上の渋滞発生パターンにおける規則性の具体例として、4つのボトルネックにおける2つの実験結果を紹介する。まずすべての地点で渋滞が発生する実験例、そして最上流(BN_4)が渋滞している場合のうち、3番目(BN_3)の渋滞が発生しない例を紹介する。なお総流入量が既知の場合は、正規化需要に伴いボトルネック容量が定まる。

外生変数を、それぞれ以下のように設定する。

$$\begin{aligned} Q &= [1000, 1000, 1000, 1000]^T, m = [0, 60, 60, 60]^T \\ d(u) &= \begin{cases} 0.5(t_w - u) & \text{if } u < t_w \\ 2(u - t_w) & \text{if } u \geq t_w \end{cases} \end{aligned}$$

実験 1:

$$\begin{aligned} RD &= [10, 30, 40, 50]^T \\ \mu &= [400, 100, 50, 20]^T \end{aligned}$$

この結果を用いた、各地点で観測される累積流入交通量及び累積流出交通量を表したものが図-3である。この図は、各ボトルネックで観測される流量の集計的な累積交通量を表したものである。希望到着時刻 t_w に BN_1 を通過するために、 $User_{i,u}$ が出発時刻を選択している様子が分かる。今回の実験では、累積流入交通量と累積流出交通量が一致している地点が存在せず、すべての地点で渋滞が発生しているということが分かる。

次に BN_3 の正規化需要を $RD_3 < RD_2$ として実験した。実験 2:

$$\begin{aligned} RD &= [10, 30, 20, 50]^T \\ \mu &= [400, 100, 100, 20]^T \end{aligned}$$

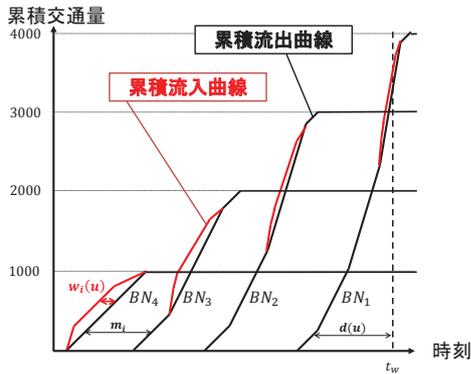


図-3 4-ボトルネックの場合の交通流:BN₃で渋滞発生

この結果は図-4である。今回の実験では、地点1,2,4では渋滞が発生するが、地点3において渋滞が発生しないことがわかる。

このことから、上流の正規化需要は最も大きい ($\arg \max RD_i = 4$) が、それを除く正規化需要の中で最大でないこと $\arg \max RD_i \neq 3$ で地点3で渋滞が発生しなくなる。このことは、 RD_3 だけでなく、 RD_1 を除いたすべての地点で観測できることである。

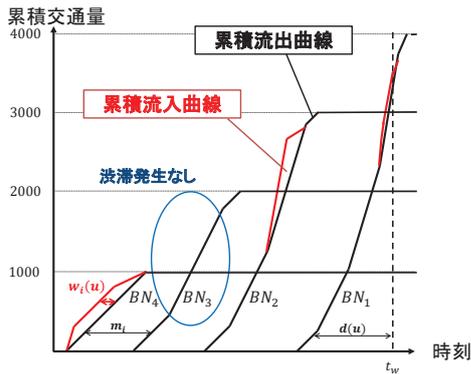


図-4 4-ボトルネックの場合の交通流:BN₃で渋滞発生なし

これらの現象について、 $User_i$ の行動を追った、非集計型の累積交通量が図-5である。

BN_4 では $User_4$ が交通容量の上限値 μ_4 で流出し(図-5:4-4)、その交通流が BN_3 へ流入している(同:4-3)。 BN_3 では、 $User_3$ は、 μ_3 を超過しないように交通流が発生することがわかる(同:3-3)。

さらに、 $User_{i,u}$ の交通費用を表したのが、図-6、図-7である。 $\rho_{i+1} = \rho_i$ となる場合のうち一部で、渋滞が発生しない場合が確認されている。

5. おわりに

本研究では、複数のボトルネックを考慮した出発時刻選択均衡問題における解析解を、定性的に分類した。具体的には、渋滞現象を地点別に発生する条件を均衡解に対して分類した。地点総流量とボトルネック容量の比である正規化需要によって、渋滞が発生する条件をパターン化して分類できることがわかった。

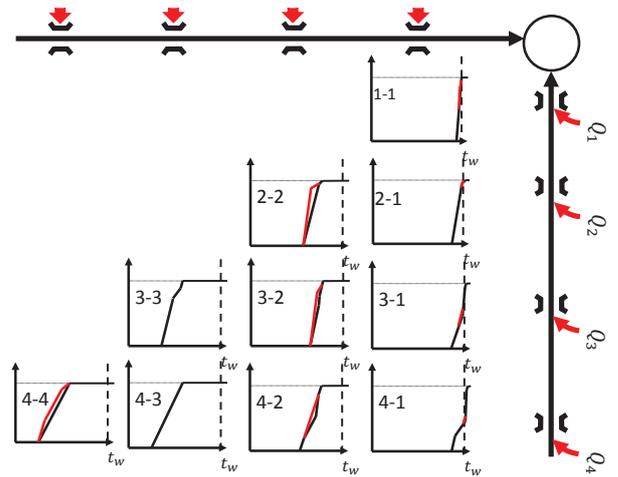


図-5 4-ボトルネックの場合の交通流:BN₃で渋滞発生なし

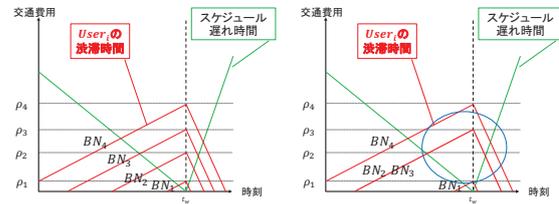


図-6 4-ボトルネックの場合の交通費用:BN₃で渋滞発生
図-7 4-ボトルネックの場合の交通費用:BN₃で渋滞発生なし

参考文献

- 1) Vickrey, W. S. (1969). Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review*, 59(2), 251–260.
- 2) Smith, M. J. (1993). A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on congested capacity-constrained road networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 27(1), 49–63.
- 3) Daganzo, C. F. (1985). The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. *Transportation science*, 19(1), 29–37.
- 4) Kuwahara, M. (1990). Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak. *Transportation Science*, 24(3), 217–229.
- 5) 高山雄貴, 赤松隆. (2009). ボトルネック渋滞を考慮した住居立地均衡モデル—時間軸の縮約可能性について—. *土木学会論文集 D*, 65(1), 39–52.
- 6) Hendrickson, C., Kocur, G. (1981). Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model. *Transportation science*, 15(1), 62–77.

(2014年8月1日受付)