

Harris & Wilson (1978) モデル再訪： 集積の経済を考慮した商業立地モデルの分岐解析

大澤実¹・赤松隆²・高山雄貴³

¹学生員 東北大学大学院 情報科学研究科 博士後期課程 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)
osawa@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)
akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 愛媛大学大学院助教 理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3) takayama@cee.ehime-u.ac.jp

商業店舗の立地パターンを消費者需要と企業行動の相互作用によって説明づける代表的なモデルとして、Harris & Wilson (1978) のモデルが挙げられる。しかし、モデルに規模の経済が存在することに起因する均衡解の分岐現象が障壁となり、このモデルの解析的性質は非常に単純なケースを除き調べられてこなかった。本研究では、Akamatsu et al. (2012) の分岐解析手法を援用し、多数のゾーンが存在するもとの Harris & Wilson モデルの挙動を分析する。その結果として、新経済地理学モデルで観察される“空間周期倍分岐カスケード”現象が、Harris & Wilson モデルにおいても生ずることを明らかにする。

Key Words : *spatial interaction, retail location, increasing return, bifurcation*

1. はじめに

商業施設の立地集積は、都市の魅力・活力を測る代表的な指標と言える。特に、人口が減少局面に入った我が国においては、都市内の活力を如何に維持していくかは喫緊の課題である。商業活動が自然にもつ集積の利益を表現した、予測能力を持つ商業立地モデルの重要性は、人口増加局面よりも寧ろ高まっている。

集積の経済を考慮しつつ、商業店舗の立地集積を企業の行動によって説明づける代表的な商業立地モデルとして、Harris & Wilson¹⁾ によるモデルが挙げられる(以下、HW モデル)。HW モデルでは、商業店舗への消費者からの需要が店舗床面積に関する規模の経済を考慮したゾーン間の空間相互作用モデルによって表現され、個々の企業のゼロ利潤条件によってゾーン毎の商業立地パターンが内生的に決定される。

このモデルは、1978 年の提案後、1980 年代を中心として盛んに研究されたが、その性質は十分に明らかにされていない。その根本的原因は、規模の経済が働くことによって、モデルの構造パラメータの変化に応じて均衡解の不連続な分岐現象が生ずることにある。このため、多数のゾーンが存在する場合の解析的分析は困難であり、2つのゾーンのみの非常に単純化された状況下での分析が主である²⁾。2ゾーンモデルの挙動をもとに多数のゾーンが存在する状況下での性質を類推する試み³⁾も存在するが、明快な結論は得られていない。結果として、多数のゾーンを仮定した場合の HW モデ

ルの分析は、現在に至るまでシミュレーションに基づく研究が大半となっている(例えば、Clark & Wilson⁴⁾を参照)。十分に多数のゾーンが存在するシミュレーションでは、Lösch の六角形パターン⁵⁾に酷似する空間的パターンが創発する等の興味深い結果が得られているが、その理論的根拠は未だに解明されないままである。HW モデルのような抽象化されたモデルを実務に適用する上での主たる利点は、説明可能性にある。理論的特性が不明確なままとなっている現状は、HW モデルの利点を大幅に損っている。

さて、同様の解析上の困難性を抱えていたモデルとして、Krugman⁶⁾以降の新経済地理学(New Economic Geograpy: NEG)で提案されてきた一群のモデルが挙げられる。これらのモデル(NEG モデル)も、規模の経済効果に起因する均衡解の分岐現象が存在することから、多数の都市が存在する場合の解析的分析は困難であり、2都市モデルの分析が主流であった。そのような状況はしかし、Akamatsu et al.⁷⁾によって提案された分岐解析手法によって解消された。この分岐解析手法は、(a) 円周都市システム(b) 空間割引行列(c) 離散 Fourier 変換という3つの鍵概念を組み合わせることで、NEG モデルの分析を大幅に単純化する手法である。この手法を用いることで、NEG モデルの性質を純粋な形で切り出し、解析的に分析することが可能となる。

上記3つの鍵概念のうち、(a)の円周都市システムは、各都市が地理的に平等であるという理想的な状況であり、規模の経済による集積・分散メカニズムを理解し

やすいという特性から、NEG 分野では数多くの研究蓄積がある。この都市構造化での特筆すべき結果としては、Tabuchi & Thisse⁸⁾、Ikeda et al.⁹⁾、Akamatsu et al. の一連の研究を通じて明らかにされてきた、空間周期倍分岐カスケード現象がある。これは、交通費用の低下に伴って解の分岐が生ずる度に都市の間隔が倍化すること、更にそれが繰り返して生ずる現象である。

本稿では、まず Akamatsu et al.⁷⁾ の分岐解析手法が HW モデルにも直ちに適用可能であることを示し、これまで解析的に十分調べられてこなかった多ゾーンシステムにおける HW モデルの挙動を解明する。その結果として、HW モデルにおいても、上述の空間周期倍分岐カスケード現象が観察されることを明らかにし、空間周期倍カスケード現象が NEG モデル固有の現象ではないことを確認する。なお、本稿では単純のため 4 都市の具体例を対象とするが、実際には一般のゾーン数において分析することが可能である。

以降の構成は次の通りである。2. では、HW モデルの定式化をまとめる。3. では、4 ゾーンが円周上に配置された具体例を対象として Akamatsu et al. の分岐解析手法を適用し、HW モデルの挙動を解析的に明らかにする。4. では、3. で得られた解析的な結果を数値的に確認する。5. は、本稿のまとめと今後の展望である。

2. HW モデル

(1) 状況設定

離散的なゾーンが C 箇所存在する状況を考える。ゾーンの集合を $\mathcal{C} \equiv \{0, \dots, C-1\}$ によって表現する。各ゾーンには固定的に消費者が立地している。

各ゾーン $c \in \mathcal{C}$ には商業部門の企業が 1 社ずつ存在し、商業店舗を操業している。企業は、店舗の床面積 $n_c \geq 0$ を決定することができる。企業の操業の際に要する費用は、占有床面積に応じてかかる地代のみである。

各ゾーンに固定的に立地する消費者は、商業店舗で販売される財を需要する。ゾーン c に立地する消費者全体での、商業部門に対する総需要額は予め定められた定数 O_c とする。ゾーン c に立地する消費者がゾーン $d \in \mathcal{C}$ の財を購入する際の交通費用を t_{cd} とする。

(2) 消費者からの需要

各ゾーン毎の床面積パターン $\mathbf{n} = [\dots, n_c, \dots]^\top$ が固定された状況下での、ゾーン c の全消費者からゾーン d の商業店舗への需要額 $Q_{cd}(\mathbf{n})$ は、次のような発地制約型の gravity タイプの関数で表現されるとする：

$$Q_{cd}(\mathbf{n}) = \frac{n_d^\alpha \exp[-\beta t_{cd}]}{\sum_e n_e^\alpha \exp[-\beta t_{ce}]} O_c \quad (1)$$

$\alpha, \beta > 0$ はそれぞれ定数である。

このうち α は商業店舗の床面積に関する規模の経済性の強さを表現するパラメタである。具体的には、 $\alpha > 1$ であれば床面積に関して収穫通増であり、 $\alpha < 1$ であれば床面積に関して収穫通減である。 β は需要の距離通減の強さを表現している。 $\exp[-\beta t_{cd}]$ はゾーン c, d 間の距離抵抗である。消費者が c, d 間の移動費用を負担して商業店舗に財を購入しに行く状況を考えていることに相当する。 β は、交通技術を表現するパラメタといえる。 $\beta = \log \tau$ ($\tau > 1$) とすれば、 τ をパラメタとする水解輸送型の輸送費用を意味する。

(3) 企業の利潤

床面積パターン $\mathbf{n}$ を固定したもとの、ゾーン c の企業に対する総需要額を $D_c(\mathbf{n})$ とする。(1) の消費者需要のもとでは、 $D_c(\mathbf{n}) = \sum_d Q_{dc}(\mathbf{n})$ である：

$$D_c(\mathbf{n}) = \sum_d \frac{n_c^\alpha \exp[-\beta t_{dc}]}{\sum_e n_e^\alpha \exp[-\beta t_{de}]} O_d \quad (2)$$

ゾーン c の単位床面積あたり地代を $\kappa_c > 0$ とする。このとき、ゾーン d で、床面積 n_c を占有する商業店舗を操業する企業の利潤関数 $\Pi_c(\mathbf{n})$ は以下のように与えられる：

$$\Pi_c(\mathbf{n}) = D_c(\mathbf{n}) - \kappa_c n_c \quad (3)$$

上記の利潤関数は、 $d_{cd} \equiv \exp[-\beta t_{cd}]$ なる空間割引行列 $\mathbf{D} = [d_{cd}]$ を定義することで、 $\mathbf{D}$ の関数として行列表現することができる：

$$\Pi(\mathbf{n}) = \mathbf{M}^\top \mathbf{O} - \text{diag}[\boldsymbol{\kappa}] \mathbf{n} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{O}$ および $\boldsymbol{\kappa}$ は各々、 $\mathbf{O} = [\dots, O_c, \dots]^\top$, $\boldsymbol{\kappa} = [\dots, \kappa_c, \dots]^\top$ なる C 次元ベクトルである。 $\mathbf{M}$ は、 $\mathbf{n}$ 及び $\mathbf{D}$ を用いて以下のように定義する：

$$\mathbf{M} \equiv \hat{\mathbf{D}} \text{diag}[\mathbf{n}]^\alpha = [d_{cd} n_d^\alpha / \Delta_c] \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}[\boldsymbol{\Delta}]^{-1} \mathbf{D} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Delta} \equiv \mathbf{D} \text{diag}[\mathbf{n}]^\alpha \mathbf{1} \quad (\text{i.e., } \Delta_c = \sum_e d_{ce} n_e^\alpha) \quad (7)$$

この利潤 $\Pi(\mathbf{n})$ の Jacobi 行列 $\nabla \Pi(\mathbf{n})$ は、下記のように求められる：

$$\nabla \Pi(\mathbf{n}) = \text{diag}[\tilde{\mathbf{M}}^\top \mathbf{O} - \boldsymbol{\kappa}] - \mathbf{M}^\top \text{diag}[\mathbf{O}] \tilde{\mathbf{M}} \quad (8)$$

ただしここで $\tilde{\mathbf{M}} \equiv \alpha \hat{\mathbf{D}} \text{diag}[\mathbf{n}]^{\alpha-1}$ 。

(4) 企業の床面積均衡条件

ここで各ゾーンに 1 社が立地する企業は、利潤が正であれば床面積を拡大し、負であれば縮小すると仮定する。このとき、床面積パターン $\mathbf{n}$ に関する均衡条件は、ゼロ利潤条件で与えられる：

$$\begin{cases} \Pi_c(\mathbf{n}) = 0 & \text{if } n_c > 0 \\ \Pi_c(\mathbf{n}) \leq 0 & \text{if } n_c = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$n_c = 0$ であれば必ず $D_c(\mathbf{n}) = 0$ であるため、結果的に

$$\Pi(\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \mathbf{n} \geq \mathbf{0}. \quad (10)$$

なる非線形連立方程式を解けばよい。均衡状態においては $\Pi_c(\mathbf{n}) = D_c - \kappa_c n_c = 0 \ \forall c$ であるから、需要額と床面積との間に $\sum_c D_c = \sum_c \kappa_c n_c = \sum_c O_c$ なる関係が成立する。

(5) 均衡状態の安定性と分岐

均衡状態の安定性を、次に示すの企業の床面積調整ダイナミクス：

$$\dot{n}_c(t) = V_c(\mathbf{n}(t)) = \varepsilon n_c(t) \Pi_c(\mathbf{n}(t)) \quad (11)$$

に基づいて定義する。 $\varepsilon > 0$ は、企業の感応度を表現するパラメタである。上述のダイナミクスは、利潤が正（負）であれば店舗床面積を拡大（縮小）するという企業の行動を表現する。(11) をベクトル表記すれば以下の通りとなる：

$$\dot{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{n}(t)) = \varepsilon \text{diag}[\mathbf{n}(t)] \Pi(\mathbf{n}(t)) \quad (12)$$

このダイナミクスの停留点は、均衡条件 (9) を満足する。

床面積調整ダイナミクス $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ の Jacobi 行列は、 $\nabla \Pi(\mathbf{n})$ を用いれば以下のように表現できる：

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}) = \varepsilon \text{diag}[\Pi(\mathbf{n})] + \varepsilon \text{diag}[\mathbf{n}] \nabla \Pi(\mathbf{n}) \quad (13)$$

ダイナミクスの停留点は均衡状態であることから、 $\Pi(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$ である。従って均衡状態におけるダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n})$ は実際には以下で与えられる：

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{J}(\mathbf{n}) \equiv \varepsilon \text{diag}[\mathbf{n}] \nabla \Pi(\mathbf{n}) \quad (14)$$

均衡状態の線形安定性は、この $\mathbf{J}(\mathbf{n})$ の固有値を調べることによって判定できる。

3. HW モデルの均衡集積パターン

HW モデルで創発する安定均衡解を明らかにするためには、調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\mathbf{J}(\mathbf{n})$ の固有値を調べる必要がある。行列の固有値解析は一般に複雑であり、数値計算に頼らざるを得ない。しかし、(1) 節で定義するような円周上に立地点が並ぶゾーン配置の下では、容易に分析が可能である。このケースでは、 $\mathbf{J}(\mathbf{n})$ の固有値は (2) に示す空間割引行列 $\mathbf{D}$ の固有値の関数として陽に表現される。(3), (4), (5) 節ではこれを示すとともに、HW モデルの均衡解の分岐挙動を明らかにする。

(1) ゾーンの設定と存在しうる均衡パターン

以降では、4 ゾーン的具体例を用いて HW モデルの分岐特性を解析的に確認する。本章の分析では、単純化のために各ゾーンの需要額および地代は一様であるとする ($O_c = O, \kappa_c = \kappa \ \forall c$)。

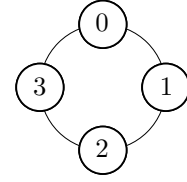


図-1 ゾーンの配置

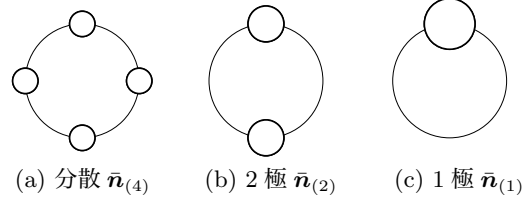


図-2 集積パターンの定義

図-1 に示すよう、半径 1 の単位円周上に番号 $c = 0, 1, 2, 3$ の順に、時計回りに 4 ゾーンを配置する。ゾーン間の距離は均等であると仮定し、隣接していないゾーン間の距離を円周上の最短距離で定義する。即ち、ゾーン c, d 間の距離 l_{cd} は (16) で与えられる：

$$l_{cd} = (2\pi/4) \min\{|c-d|, 4-|c-d|\}. \quad (15)$$

また、消費者のゾーン間の交通費用は l_{cd} に関して線形で、 $t_{cd} = t \cdot l_{cd}$ であるとする。

本稿では、全てのゾーンに小規模な商業店舗が成立している状態から出発する。そして、自動車使用率の増加・幹線道路の整備等の結果としてゾーン間の距離抵抗が徐々に減少していく状況を考える。このような状況では、創発しうる均衡パターンは下記の 3 通りのみである：

- 分散パターン : $\bar{\mathbf{n}}_{(4)} \equiv [n, n, n, n]^T$
- 2 極集中パターン : $\bar{\mathbf{n}}_{(2)} \equiv [2n, 0, 2n, 0]^T$
- 1 極集中パターン : $\bar{\mathbf{n}}_{(1)} \equiv [4n, 0, 0, 0]^T$

ここで、 n は均衡状態で成立する関係 $\sum_c O_c = \kappa \sum_c n_c$ によって、 $n = O/\kappa$ と定められる。これらの空間的パターンを図-2 に示した。

(2) 空間割引行列とその固有値

前節のようにゾーンを設定すると、空間割引行列 $\mathbf{D}$ は巡回行列となる。まず r を

$$r \equiv \exp[-\beta t(2\pi/4)] \quad (16)$$

によって定義しよう。 $r \in (0, 1]$ は、隣接するゾーン間の輸送がどれだけ自由であるかを表現し、1 に近ければ近い程 (i.e., β または t が小さい程) ゾーン間の交通条件が良好であることに相当する。本稿では r が次第に大きくなっていったとき、如何なる解が創発するかに興味がある。

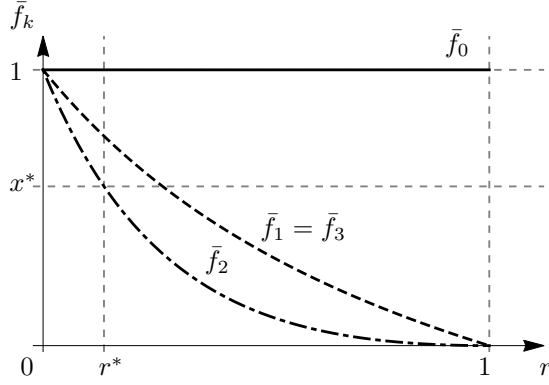


図-3 $\bar{D}$ の第 k 固有値 $\bar{f}_k$ と r の関係

さて、定義した r を用いれば、 D は第 1 行が

$$\mathbf{d}_0 \equiv [1, r, r^2, r] \quad (17)$$

で与えられる巡回行列となっていることがわかる。空間割引行列 D が巡回行列であることにより、 D の固有値を $\mathbf{f}$ とすれば、 $\mathbf{f}$ は離散 Fourier 変換 (Discrete Fourier Transform: DFT) により求められる。すなわち、 D は、DFT 行列 Z :

$$Z = [z_0, z_1, z_2, z_3] \quad (18a)$$

$$z_k = [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^\top \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (18b)$$

$$\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)] \quad (18c)$$

による相似変換によって対角化される：

$$Z^{-1} D Z = \text{diag}[\mathbf{f}]. \quad (19)$$

ここで Z^{-1} は $Z^{-1} = Z^*/N$ で与えられる。 Z^* は Z の共役転置行列である。また、固有値 $\mathbf{f}$ は、空間割引行列の第 1 行ベクトル $\mathbf{d}_0$ の DFT により与えられる：

$$\mathbf{f} = Z \mathbf{d}_0^\top. \quad (20)$$

右辺 $Z \mathbf{d}_0^\top$ は解析的に計算できる。結果としては、空間割引行列 D の固有値は r の陽関数となる：

$$f_k = \begin{cases} (1+r)^2 & k=0 \\ (1-r)(1+r) & k=1, 3 \\ (1-r)^2 & k=2 \end{cases} \quad (21)$$

さて、HW モデルは需要関数 (1) がシェアの形で定義されている。このことから、HW モデルの均衡の安定性を解析する上で実際に重要となるのは、空間割引行列 D をその行和 $d(r) \equiv \mathbf{d}_0 \mathbf{1} = (1+r)^2$ によって規格化した行列 $\bar{D} \equiv D/d(r)$ の固有値である。 $\bar{D}$ も巡回行列であり、 $\bar{D}$ の固有値 $\bar{\mathbf{f}}$ は D と同様の方法で求め

ることができ、 $\mathbf{f}$ と同様に r の陽関数となる：

$$\bar{f}_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ c(r) & k=1, 3 \\ \{c(r)\}^2 & k=2 \end{cases} \quad (22a)$$

$$\text{where } c(x) \equiv \frac{1-x}{1+x} \quad (22b)$$

ここで $r \in (0, 1)$ では $c(x) > 0$, $c'(x) < 0$ であることから、 $k=1, 2, 3$ について $d\bar{f}_k/dr < 0$ であることが容易に確認できる。従って $r \in (0, 1)$ において $\bar{f}_1 = \bar{f}_3, \bar{f}_2$ は r に関する狭義減少関数である。また、このとき常に $1 = \bar{f}_0 > \bar{f}_1 = \bar{f}_3 > \bar{f}_2 > 0$ が成立することも確認できる (図-3 参照)。

(3) 分散均衡パターンの安定性

各ゾーンに一樣に店舗が存在する分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}_{(4)}$ を考える。ゾーン間の交通条件が良好ではなく (i.e., 輸送の自由度 r が十分小さく)、他ゾーンへの需要が無視できるほど小さい状況では、各ゾーン内で商業の需給が均衡する。需要パターン $\mathbf{O}$ は一樣であると仮定しているため、この均等分散パターン $\bar{\mathbf{n}}_{(4)}$ は安定な均衡であると考えられる。

以降では、調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ の固有値解析によって、上述の予測を確認し、均等分散パターンから出発し、交通条件の改善 (i.e., r の増大) に伴っていかなる均衡解の分岐が生ずるのかに注目して調べていく。

まず、分散均衡状態において、ダイナミクス・企業の利潤の Jacobi 行列 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$, $\nabla \Pi(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ について下記が成立する。即ち、 $\nabla \Pi(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ は、下記で与えられ：

$$\nabla \Pi(\bar{\mathbf{n}}_{(4)}) = k\alpha [-\bar{D}^2 + (1 - \alpha^{-1}) \mathbf{I}] \quad (23)$$

これを用いると、 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ が次のように求められる：

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)}) = \varepsilon n \nabla \Pi(\bar{\mathbf{n}}_{(4)}) \quad (24)$$

更に、 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$, $\nabla \Pi(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ は各々が巡回行列である。

これらの行列が巡回行列であるという事実を用いると、分散均衡状態におけるダイナミクスの Jacobi 行列 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{n}}_{(4)})$ の固有ベクトル・固有値 $\mathbf{g}$ は次のように求められる：

(a) 第 k 固有ベクトルは、DFT 行列の第 k 列ベクトル：

$$\mathbf{z}_k = [1, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^\top \quad (25)$$

で与えられる。ただし $\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)]$ 。また、

(b) 第 0 固有値は常に $-\varepsilon O$ である。第 k 固有値は、規格化された空間割引行列 $\bar{D}$ の第 k 固有値 $\bar{f}_k$ の 2 次関数で与えられる：

$$g_k = (\varepsilon O \alpha) G(\bar{f}_k) \quad (26a)$$

$$G(x) \equiv -x^2 + 1 - \alpha^{-1}. \quad (26b)$$

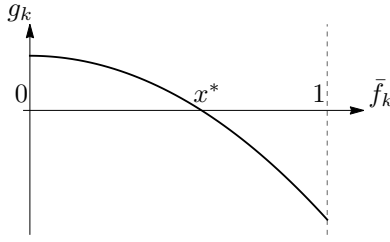


図-4 $\bar{f}_k$ と g_k の関係

(26) に示した、ダイナミクス Jacobi 行列の第 k 固有値 g_k と $\bar{D}$ の第 k 固有値 $\bar{f}_k$ との関係を図-4 に示す。 r がゼロに近い場合、 $\bar{f}_k \approx 1$ である。このとき、 α の値によっては、 g_k は全て負となり、分散均衡状態は安定均衡となり得る。

(26) に示された固有値が全て負であれば、分散均衡状態は安定である。一方、ある固有値 g_k が正であれば、分散均衡状態は不安定であり、 g_k に対応する固有ベクトル z_k 方向に床面積パターンが変化する。 $J(\bar{n}_{(4)})$ の固有ベクトル $\{z_k\}$ の配置を図-5 に示す。 z_1, z_3 方向に解が分岐した場合、ゾーン $c = 3$ の床面積が減少し、ゾーン 0 の床面積が増加する。 z_2 方向に解が分岐した場合、ゾーン $c = 1, 3$ の床面積が減少し、ゾーン 0, 2 の床面積が増加する。

(4) 分散均衡状態からの分岐

a) 分岐の発生条件

輸送条件の改善 (i.e., r の増大) によって、分散均衡状態から解が分岐し、新たな集積パターンが生ずるためには、 r の増大に伴って負から正に変わる g_k の固有値が存在する必要がある。このためには、 α についてある条件が成立しなければならない。

まず、 $d\bar{f}_k/dr < 0$ であるから、 r の増大に伴って $\bar{f}_k$ は減少する。従って、 $\bar{f}_k$ の減少に伴って g_k が負から正へと変化すればよい。図-4 から明らかなよう、 $\bar{f}_k$ 軸の減少方向に進んだ場合に、 $\bar{f}_k \in (0, 1)$ において g_k がその符号を転ずるためには、 $G(0) > 0$ かつ $G(1) < 0$ が必要十分である。

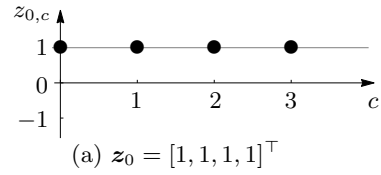
実際には、このための条件は次の通りである：

$$\alpha > 1 \quad (27)$$

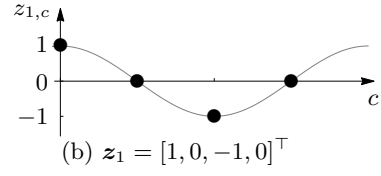
ここで、 α は床面積に関する規模の経済効果を表現するパラメタであった。(27) は即ち、商業の立地に床面積に関する収穫増効果が存在しない場合には、交通条件が改善した場合でも均等分散パターンが不安定化せず、安定な均衡であり続けることを意味する。

b) 2 極集中パターンの創発

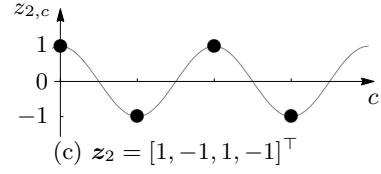
以降では、条件 (27) は満足されているとし、均等分散パターン $\bar{n}_{(4)}$ からいかなる均衡が創発するか注目



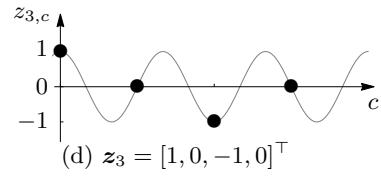
(a) $z_0 = [1, 1, 1, 1]^T$



(b) $z_1 = [1, 0, -1, 0]^T$



(c) $z_2 = [1, -1, 1, -1]^T$



(d) $z_3 = [1, 0, -1, 0]^T$

図-5 z_k の配置パターン

しよう。 g_k が符号を転ずる点は $G(x) = 0, x \in (0, 1)$ の解である。このときの値を x^* とすれば、次のように与えられる：

$$x^* = \sqrt{1 - \alpha^{-1}} \quad (28)$$

輸送の自由度 r が徐々に増大し、 $\{\bar{f}_k\}$ が次第に減少したとき、この値 x^* に達した $\bar{f}_k$ が生じた時点で、均衡床面積パターンは対応する固有ベクトル z_k 方向に変化する。また、このときの r の値 r^* は、関係 (22) を用いて求めることができる。

さて、 $\bar{f}_0 > \bar{f}_1 = \bar{f}_3 > \bar{f}_2$ より、常に $\bar{f}_2$ が最小であるから、 $\bar{f}_2$ に対応する g_2 が最初に符号を転ずる固有値である。図-3 から、 x^* が定まっているとき、 r の増大によって最初に直線 $\bar{f}_k = x^*$ を横切るのは $\bar{f}_2$ であることが図的にも確認できる。従って、最初に不安定化する $J(\bar{n}_{(4)})$ の固有ベクトルは z_2 であり、分散均衡状態から最初に創発する均衡パターンは、

$$\begin{aligned} n &= \bar{n}_{(4)} + \delta z_2 \quad (0 \leq \delta \leq n) \\ &= [n + \delta, n - \delta, n + \delta, n - \delta]^T \end{aligned} \quad (29)$$

の形に表現できるパターンである (図-6 (a))。 δ は、 r の増大に伴って急激に増加し、創発する均衡パターンは 2 極集中パターン $\bar{n}_{(2)}$ となる。

(5) 集積の進展：2 極集中パターンからの分岐

本節では、2 極集中パターンが安定的である状態から、次の分岐が生ずるための条件を調べよう。均等分

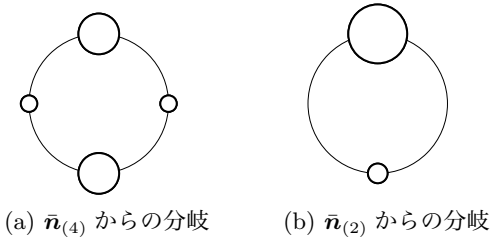


図-6 $\bar{n}_{(4)}$, $\bar{n}_{(2)}$ からの分岐によって創発するパターン

散パターンからの分岐の解析と同様の手続きによって、2 極集中パターン $\bar{n}_{(2)}$ におけるダイナミクスの Jacobi 行列 $J(\bar{n}_{(2)})$ の固有値 g は以下のように求められる：

$$g_k = \begin{cases} -\varepsilon O & k = 0 \\ 0 & k = 1, 3 \\ (\varepsilon O \alpha) G_{(2)}(c(r^2)) & k = 2 \end{cases} \quad (30a)$$

$$G_{(2)}(x) \equiv -x^2 + 2(1 - \alpha^{-1}) \quad (30b)$$

ここで、(30) より、 $g_2 < 0$ となる r が存在し (i.e., 2 極パターンが安定的である r が存在し)、かつ r の変化に応じて g_2 の符号が変化するためには

$$1 < \alpha < 2 \quad (31)$$

が成立しなければならないことがわかる。分散均衡状態からの分岐が発生するための条件 (27) と異なる部分は、 $\alpha < 2$ という追加的な条件が存在することである。これは、集積力 α があまりに強い場合には 2 極集中パターンは安定ではあり得ず、直ちに崩壊する不安定均衡となることを意味する。

さて、(31) が満足されているとし、2 極集中パターン $\bar{n}_{(2)}$ が安定である状況を考えよう。この状態から r を増加させると、最初に符号を転じる g_k が生ずる $r = r^{**}$ において解の分岐が生ずる。(30) より、 r の増加に伴い符号を変化させる固有値は、明らかに g_2 のみである。 g_2 に対応する $J(\bar{n}_{(2)})$ の固有ベクトルは $\tilde{z}_2 = [1, 0, -1, 0]^\top$ と求められる。従って、2 極集中パターンから分岐によって創発する集積パターンは

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{n}}_{(2)} + \delta \tilde{z}_2 & (0 \leq \delta \leq 2n) \\ &= [2n + \delta, 0, 2n - \delta, 0]^\top \end{aligned} \quad (32)$$

である (図-6 (b))。 r の更なる増大に伴ない δ は急激に増加し、最終的に $\mathbf{n}$ は 1 極集中パターン $\bar{n}_{(1)}$ となる。

以上の結果、即ち

$$4 \text{ 極集中} \rightarrow 2 \text{ 極集中} \rightarrow 1 \text{ 極集中}$$

という推移は、NEG モデルにおいてその存在が証明されている“空間周期倍分岐カスケード”現象^{9),7)}が、HW モデルにおいても成立することを示唆している。ここで空間周期倍分岐カスケードとは、商業が立地してい

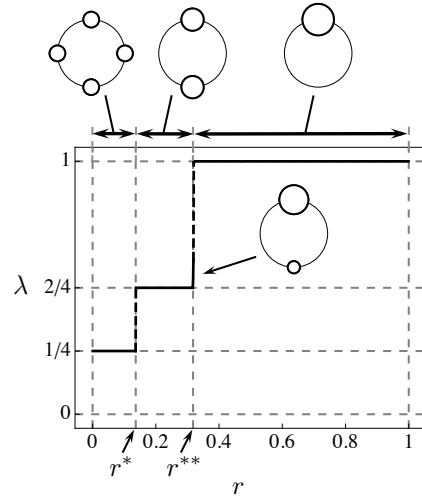


図-7 HW モデルの均衡集積パターン ($\alpha = 1.5$)

るゾーン間の距離が、分散状態 $\bar{n}_{(4)}$ では $\pi/2$ 、2 極集中パターン $\bar{n}_{(2)}$ では π 、1 極集中パターン $\bar{n}_{(1)}$ では 2π のよう、分岐が生ずる毎に倍化していく挙動である。

それぞれが全く異なる出自を持ち、細部の仮定も全く異なる NEG モデルと HW モデルとで、非常に似通った挙動が観察されるという事実は興味深い。同時に、過去に提案されてきた多くの空間相互作用モデルをその挙動によって系統的に分類するための手段として、Akamatsu et al.⁷⁾ の分岐解析手法が有用であることを端的に示している例であると言える。

4. 数値例

本章では、前章までに得られた理論解析結果を確認するため、交通費用の低下 (i.e. 輸送の自由度 r の増加) に伴って生ずる HW モデルの均衡解の分岐を数値的に調べる。なお、数値計算によって安定均衡解を追跡する手法としては、計算分岐理論に基づくアルゴリズムを採用する (Ikeda et al.⁹⁾, 藤井ら¹⁰⁾ 参照)。

(1) 交通費用パラメタに関する分岐特性

パラメータを $O = 1, k = 1, \alpha = 1.5, \varepsilon = 1$ とした場合を考える。このパラメータのもとでは、分散均衡状態からの分岐は $r^* \approx 0.14$ 、2 極集中パターンからの分岐が $r^{**} \approx 0.32$ において生ずると予測される。

数値実験の結果として得られた、輸送費用の減少に伴って生ずる均衡解は、図-7 に示す通りである。黒の実線が安定均衡解を示す。ここで、縦軸は床面積が最大であるゾーンが全体に占める割合 $\lambda \equiv n_{\max} / \sum_d n_d$ 、横軸は輸送の自由度 r である。

図-7 より、交通費用が高い (r が小さい) 状態においては、分散均衡状態が安定的であり、交通費用が徐々に減少 (r が徐々に増加) すると、 r^* における最初の分

謝辞： 本研究は日本学術振興会・科学研究費補助金・特別研究員奨励費（課題番号 26・291）の助成金を受けた研究の一部である。ここに記し、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Harris, B. and Wilson, A. G. : Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models, *Environment and Planning A*, Vol. 10, No. 4, pp. 371–88, 1978.
- 2) Rijk, F. and Vorst, A. : On the uniqueness and existence of equilibrium points in an urban retail model, *Environment and Planning A*, Vol. 15, No. 4, pp. 475–482, 1983.
- 3) 奥村誠, 足立康史, 吉川和広 : 不均衡商業立地モデルの解の挙動に関する研究, 土木計画学研究・講演集, Vol. 11, pp. 629–636, 1988.
- 4) Clarke, M. and Wilson, A. : The dynamics of urban spatial structure: the progress of a research programme, *Transactions of the Institute of British Geographers*, Vol. 10, No. 4, pp. 427–451, 1985.
- 5) Losch, A. : Economics of location, 1954.
- 6) Krugman, P.: Increasing returns and economic geography, Technical report, National Bureau of Economic Research, 1990.
- 7) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1729–1759, 2012.
- 8) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. : A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol. 69, No. 2, pp. 240–252, 2011.
- 9) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T. : Spatial period-doubling agglomeration of a core–periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 754–778, 2012.
- 10) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社.
- 11) Zipf, G. K.: *Human behavior and the principle of least effort*, Addison-Wesley Press, 1949.
- 12) 赤松隆, 森知也, 高山雄貴 : 新経済地理学モデルにおける中心法則性の創発, 応用地域学会研究発表大会, 2011.

(2014.8.1 受付)

BIFURCATION ANALYSIS OF A RATAIL LOCATION MODEL WITH AGGLOMERATION ECONOMY

Minoru OSAWA, Takashi AKAMATSU, Yuki TAKAYAMA

The present paper demonstrates that the bifurcation analysis method proposed by Akamatsu et al.⁷⁾ is readily applicable to the retail location model formulated in Harris & Wilson (1978)¹⁾. Employing 4-zone example, we analytically predict when and in which zone the agglomeration of retailers emerge. Our analysis also suggests that “spatial period doubling cascade” in some new economic geography models, proved in Ikeda et al.⁹⁾ and Akamatsu et al.⁷⁾, does exist in Haris & Wilson model.