動的利用者均衡状態における**MFD**の解析：**1**起点多終点ネットワークの場合

和田 健太郎[1]・佐津川 功季[2]

[1]正会員　東京大学助教 生産技術研究所（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp
[2]学生会員　東京大学大学院 工学系研究科 修士課程（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

本稿では，1 起点多終点ネットワークを対象に，渋滞延伸を考慮した動的利用者均衡（DUE）状態における *Macroscopic Fundamental Diagram* (MFD) を解析する．具体的には，任意の DUE 渋滞パターンで実現するネットワーク全体のトリップ完了率と車両存在台数の関数関係を解析的に評価する方法論を構築する．そして，DUE の数値実験により生成した MFD が提案手法によって解析的に近似できることを示す．

Key Words: *Macroscopic fundamental diagram, Network exit function, Dynamic user equilibrium, Physical queue*

1. はじめに

近年, 都市レベルの複雑な道路ネットワークの運用・管理を可能とするために，エリアの交通状態をマクロに評価する指標 *Macroscopic Fundamental Diagram*（MFD）が Daganzo[1)]により提案された．MFD はある時刻のエリアの空間平均密度に対して空間平均交通量をプロットしたときに現れる関数関係であり，ばらつきの小さい well-defined MFD の存在が横浜エリアにおいて実証的に確認されている[2)]．また，この MFD は OD 需要の変化に *insensitive* であることが示唆されている．

この様な MFD は，観測情報（エリア平均密度）のみでエリアの交通状態をリアルタイムに把握できるため，信頼性の高いエリアの制御法構築のための有用な指標となりうる．例えば，エリア内の密度を臨界密度以下に流入制御することでネットワークの性能を最大活用することができる[1)]．しかし，MFD を実際に活用するためには,「どのような条件下で well-defined MFD が成立するのか？，その容量や形状はどのような要因で決まるのか？」といった MFD の特性を把握することが必須である．

これらの問いに対しては，エリア内の “空間的な密度分布”（渋滞パターン）が鍵となることがいくつかのシミュレーション研究によって示されている[3),4),5)]．Geroliminis and Sun[6)]は横浜エリアのデータを用いて，ある平均密度に対して実現する密度分布が（統計的に）同一であれば well-defined MFD が成立することを示した．しかし，密度の頻度分布と MFD のばらつき度合いの相関関係を議論しているのみであり，密度分布（渋滞パターン）によって MFD の容量・形状がどのように特徴付けられるかは示されていない．

一方，理論研究としては，ネットワークの物理的条件（e.g., 信号パラメータ）から，MFD の容量・形状を解析的に近似する手法が開発されている[7),8)]．しかし，単純な単一道路区間の解析結果に基づいており，空間的な要素（e.g., ネットワーク構造，渋滞パターン）を捨象している．また，渋滞パターンに強く影響を与えるドライバーのネットワーク上の経路選択行動を考慮することもできない．近年，Leclercq and Geroliminis[9)]が平行経路における経路選択を考慮して MFD を解析的に評価しているが，本質的には単一道路区間の問題と変わりはない．

本研究では，1 起点多終点ネットワークを対象に，渋滞延伸を考慮した動的利用者均衡（DUE: *Dynamic User Equilibrium*）状態における MFD を解析する．具体的には，ネットワーク内の車両存在台数とトリップ完了率の関係を表す Network Exit Function (NEF)[1]を解析的に評価する方法論を構築する．その基盤となるアイディアは，物理的条件および OD 需要から内生的に渋滞パターンを求める DUE 問題を，“渋滞パターンを与件として，定常状態において流れうるトリップ完了率（i.e., OD 需要の総和）を導出する問題”（逆問題）へと変換することである．この方法論により，ネットワークのマクロな特性を，よりミクロなネットワーク構造，渋滞パターンおよび経路選択行動と関連づけて解析・評価することが可能となる．最後に，DUE の数値実験に

[1] 後でも述べるように（ある条件下では）MFD は NEF を単にスケール変換したものである[1)]．

より生成したNEFが提案手法によって解析的に近似できることを示す．

本稿の構成は次の通りである．続く **2.** では，時刻別分解されたDUE状態を概説する．そして，このモデルが渋滞パターンを与件としたとき，線形システム方程式に帰着することを示す．**3.** では，NEFを解析的に導出する．**4.** では，数値実験により提案手法の有効性を検証する．最後に **5.** では，本研究のまとめと今後の課題を述べる．

2. 動的利用者均衡状態

(1) 解析の前提条件

本稿では，1起点多終点のネットワークを対象とする．ネットワークはノード集合 N，リンク集合 L，起終点の集合 W で表現されており，各々の要素を $i \in N$，$ij \in L$，$od \in W$ とする．ネットワークの構造は，ノード・リンク接続行列 $\mathbf{A}^*$（$N \times L$ 行列）で表される．この行列のランクは $N-1$ であるため[10)]，唯一の起点に対応する行を除き，その行列を既約接続行列 $\mathbf{A}$ とする．さらに，既約接続行列の +1 の要素を 0 にした行列を $\mathbf{A}_-$ とおく．

各ODペア間の交通需要は "外生的" に与えられる（以降の章では，"内生変数" とする）．より具体的には，時刻 t までに起点 o を出発し終点を d とする累積OD交通量を $Q_{od}(t)$ と表す．

各リンクはFirst-In-First-Out (FIFO) 原理を仮定し，交通状態はpoint queueモデルで表現されるとする（ただし，以降の章では "physical queue" も取り扱う）．具体的には，各リンク (i,j) は自由走行リンクと待ち行列リンクで構成されているとし，自由走行リンクの旅行時間は定数 m_{ij}，待ち行列リンクのボトルネック容量は $\overline{\mu}_{ij}$ とする．このとき，時刻 t にリンク (i,j) に流入した車両の旅行時間は，

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + \frac{x_{ij}(t+m_{ij})}{\overline{\mu}_{ij}} \tag{1}$$

$$\text{where} \quad x_{ij}(t) = A_{ij}(t) - D_{ij}(t) \tag{2}$$

ここで，$x_{ij}(t)$ は時刻 t のリンク下流端での待ち行列台数，$A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ は各々時刻 t までにリンク (i,j) を流入，流出した累積交通量を表している．なお，$A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ が時間微分可能であれば交通流率は下記のように書くことができる：

$$\lambda_{ij}(t) \equiv \frac{dA_{ij}(t)}{dt},\ \mu_{ij}(t) \equiv \frac{dD_{ij}(t)}{dt}. \tag{3}$$

(2) 時刻別分解された DUE の定式化

DUEは静的な利用者均衡を動的な場合に自然に拡張した解の概念であり，DUE状態は以下のように定義される：任意の時刻において，どの利用者も自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態．言い換えれば，全ての瞬間において，全ての利用者が選択した経路が "事後的" に見ても各人の最短経路となっているような交通流パターンである．

DUE状態では，Kuwahara and Akamatsu[11)]で示されたように，同時刻に同一起点を出発した利用者の任意のノードへの到着時刻は経路によらず等しい．さらに，DUE状態では，起点における利用者の出発順序が終点に到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されていなければならない．この性質により，起点出発時刻毎に，各ノードへの一意的な均衡到着時刻を定義することができる．これらの特性とリンクモデルの性質から，時刻 s に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は時刻 s 以降に起点を出発する利用者の影響を受けないことが分かる．そして，1起点多終点を持つネットワークにおけるDUE状態は，起点出発時刻別に分解することができる．

出発時刻別のDUEでは，次の2つの変数が中心的な役割を果たす．1つは，出発時刻 s に関する流入交通流率：

$$y^s_{ij} \equiv \frac{dA_{ij}(s)}{ds} \tag{4}$$

であり，もう1つは，起点を時刻 s に出発した車両が最も早くノード i に到着する時刻 τ^s_i である．先に定義した絶対時刻 t における流入交通流率 $\lambda_{ij}(t)$ と y^s_{ij} の関係は，

$$y^s_{ij} = \lambda_{ij}(\tau^s_i)\frac{d\tau^s_i}{ds}. \tag{5}$$

上記の変数を用いて，出発時刻別のDUEは以下のように表される[11),12)]：

a) リンク旅行時間関数

$$c^s_{ij} = \int_0^s \frac{dc^s_{ij}}{ds}ds + c^{s=0}_{ij} \qquad \forall s \tag{6}$$

$$\text{where} \quad \frac{dc^s_{ij}}{ds} = \begin{cases} y^s_{ij}/\overline{\mu}_{ij} - d\tau^s_i/ds & x_{ij}(\tau^s_i + m_{ij}) > 0 \\ 0 & x_{ij}(\tau^s_i + m_{ij}) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

b) 各ノードでのフロー保存則

$$\sum_i y^s_{ik} - \sum_j y^s_{kj} - \frac{dQ_{ok}(s)}{ds} = 0. \quad \forall k, k \neq o,\ \forall s \tag{8}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^s = -\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \tag{9}$$

ここで，後者の式はベクトル表示のフロー保存則である．

c) 最短経路選択条件

$$\begin{cases} y_{ij}^s \left\{ c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s \right\} = 0 \\ c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s \geq 0,\ y_{ij}^s \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij,\ \forall s \tag{10}$$

(3) 渋滞ネットワークにおける **DUE** の均衡解

上記で定式化した時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題であり，一般的に，解析解を求めることはできない．しかし，ネットワーク上の全てのリンクで交通流の流入があり（i.e., $y_{ij}^s > 0$），かつ，渋滞パターンが分かっていれば（i.e., $x_{ij}(t) > 0$ を満たすリンクとそれ以外のリンクが区別できれば），時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着し，均衡解を解析的に求めることが可能である[13),14),15),16)]．ここでは，まず，全てのリンクで待ち行列が発生している "渋滞ネットワーク" に対して，均衡解を解析的に導出しよう[2]．

時刻 s 以前に起点を出発したフローに対応したネットワークの状態は既知として，起点出発時刻が s の利用者に対応した均衡解を求める．ネットワーク内の全てのリンクで流入および渋滞があるため，前節で相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (7) および最短経路選択条件 (10) は等式条件に帰着する：

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} = \frac{y_{ij}^s}{\overline{\mu}_{ij}} - \frac{d\tau_i^s}{ds} \quad \forall ij \tag{11}$$

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} + \frac{d\tau_i^s}{ds} - \frac{d\tau_j^s}{ds} = 0 \quad \forall ij. \tag{12}$$

式 (11) を式 (12) へ代入すれば，

$$y_{ij}^s = \overline{\mu}_{ij} \frac{d\tau_j^s}{ds} \quad \forall ij \tag{13}$$

$$\mathbf{y}^s = -(\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T)\frac{d\boldsymbol{\tau}^s}{ds} \tag{14}$$

$$\text{where} \quad \mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \overline{\mu}_{ij} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{15}$$

が成立する．そしてこの式をフロー保存則 (9) に代入すれば，

$$(\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T)\frac{d\boldsymbol{\tau}^s}{ds} = \frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \tag{16}$$

従って，$\mathbf{AMA}_-^T$ の rank が $N-1$ であれば，DUE の均衡解は一意に決まる．なお，行列 $\mathbf{AMA}_-^T$ のランクは一般的に基準点の選び方に依存する．1 起点多終点ネットワークにおいては，起点ノードを基準点に選べば，ランクは必ず $N-1$ となる[13)]．従って，均衡解は，

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^s}{ds} = (\mathbf{AMA}_-^T)^{-1}\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \tag{17}$$

$$\mathbf{y}^s = -(\mathbf{MA}_-^T)(\mathbf{AMA}_-^T)^{-1}\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \tag{18}$$

[2] 交通流の流入のないリンク（i.e., $y_{ij}^s = 0$）がある場合は，そのリンクを削除したネットワークを考えればよい．

(4) 非渋滞ネットワークにおける **DUE** の均衡解

上記の理論は，適切にネットワークを縮約することによって非渋滞ネットワークへと拡張することが可能である[17)]．具体的には，縮約ネットワークは，オリジナル・ネットワークの非渋滞リンクの起終点ノードを 1 つのノードとして集約する（i.e., 非渋滞リンクを取り除く）ことにより構築される．

この縮約ネットワークのノード集合，リンク集合，起終点集合をそれぞれ，N_R, L_R, W_R とすれば，このネットワークは全てのリンクが渋滞しているため，

$$(\mathbf{A}_R\mathbf{M}_R\mathbf{A}_{R-}^T)\frac{d\boldsymbol{\tau}_R^s}{ds} = \frac{d\mathbf{Q}_R^s}{ds} \tag{19}$$

が成立する．ここで，下付き添字 R は縮約ネットワーク上で定義された変数であることを意味する．また，この解は唯一であることが示されている[17)]．

この結果を用いて，オリジナルなネットワークの解は以下のように求められる．いま，$\{N-$(非渋滞リンク数)$\} \times N$ の行列 $\mathbf{R}$ を定義する；もしノード $i \in N_R$ がノード $j \in N$ に対応していれば i 行 j 列が 1，それ以外は 0．このとき，均衡解は，

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^s}{ds} = \mathbf{R}^T\frac{d\boldsymbol{\tau}_R^s}{ds} \tag{20}$$

$$\mathbf{y}_Q^s = -\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T\mathbf{R}^T\frac{d\boldsymbol{\tau}_R^s}{ds} \tag{21}$$

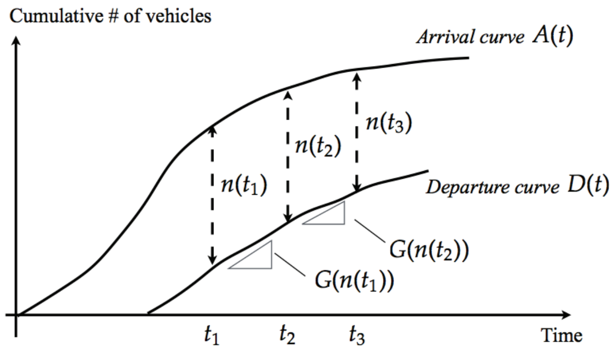
ここで，下付き添字 Q は渋滞リンクに関わる変数であることを意味する．

なお，ここで導出した均衡解については以下の点について注意が必要である：

- 非渋滞リンクの交通流率は必ずしも一意には決められない
- 上記の方程式系には，非渋滞リンクが満たすべき容量制約条件：$y_{ij}^s \leq \overline{\mu}_{ij} \cdot d\tau_i^s/ds$ が考慮されていない．そのため，上記の結果として *infeasible* な解が導出されることがある．

3. Network Exit Function の解析的評価

本章では，DUE 状態におけるネットワーク上の交通状態をマクロに分析する．まず，(1) では，本稿で評価する NEF の概念を簡潔に説明する．(2) では，DUE を記述する状態量とマクロな状態量の関係を示した上で，NEF を定義する．(3) では，DUE の逆問題を解くことにより，NEF を解析的に導出する．



図–1 MFD 理論の基本仮説

(1) Network Exit Function

Daganzo[1)]は，あるエリア内の交通ネットワーク・システムを 1 つの貯水槽として捉えることにより，MFD の理論を展開している．すなわち，MFD の理論は,「システムへの交通需要（貯水槽への水の流入）の変化が緩やかであれば，そのトリップ完了率（貯水槽からの水の流出）は，システム内の車両存在台数（水位）の関数として（近似的に）表現することができる」という仮説に基づいている．

この仮説を図示したものが**図–1** である．ここで，$A(t)$ はシステムへの累積流入台数, $D(t)$ は累積流出台数, $n(t)$ は車両存在台数を表す．システムが変化するとき，厳密には，流出率 $dD(t)/dt$ は流入率 $dA(t)/dt$ と存在台数 $n(t)$ の履歴に依存する．しかし，変化が緩やかなときその履歴依存性は弱まり，定常状態に近い状態が続くであろう．そしてこのとき，流出率は,

$$\frac{dD(t)}{dt} \approx G(n(t)) \tag{22}$$

と書くことができる．$G(n(t))$ は定常状態における流出交通流率（トリップ完了率）と存在台数の関係を表す *Network Exit Function* (NEF) である．NEF の存在および式 (22) の関係が成立することが MFD の理論の根本にある仮定である．

なお, NEF はトリップ完了率のデータを必要とするため，その把握は必ずしも容易ではない．そのため，NEF の代替としてエリア平均交通密度 k [veh/km] と平均交通量 q [veh/h] の関係である MFD, $q = Q(k)$, が実際には利用される．NEF と MFD の関係は，エリア内の平均トリップ長が変化しない場合，次のように関係づけることができる：$G(n) = (l/d)\,Q(n/l)$．ここで，l はエリア内の総リンク長，d は平均トリップ長である．つまり，MFD は単に NEF をスケール変換したものである．

(2) DUE 状態における NEF の定義

前節で示したマクロな変数は DUE を記述する状態量を用いて終点別に以下のように表すことができる：

$$A_d(t) = Q_{od}(t) \tag{23}$$

$$D_d(t) = Q_{od}(t - C_d^*(t)) \tag{24}$$

$$n_d(t) = A_d(t) - D_d(t) \tag{25}$$

ここで，$C_d^*(t)$ は時刻 t に終点 d に到着する車両の均衡（最小）旅行時間である．式 (24) が成立するのは，DUE 状態においては OD 間で FIFO 条件が成立するためである．これらのマクロな変数が微分可能であるとすると,

$$\lambda_d(\tau_o^s) \equiv \frac{dA_d(\tau_o^s)}{d\tau_o^s} = \frac{dQ_{od}(\tau_o^s)}{d\tau_o^s} = \frac{dQ_{od}(s)}{ds} \tag{26}$$

$$\mu_d(\tau_d^s) \equiv \frac{dD_d(\tau_d^s)}{d\tau_d^s} = \frac{dQ_{od}(\tau_d^s - (\tau_d^s - s))}{ds}\bigg/\frac{d\tau_d^s}{ds} = \frac{dQ_{od}(s)}{ds}\bigg/\frac{d\tau_d^s}{ds} \tag{27}$$

$$\frac{dn_d(t)}{dt} = \lambda_d(t) - \mu_d(t) = \left(\frac{dQ_{od}(t)}{dt} - \frac{dQ_{od}(s)}{ds}\bigg/\frac{dt}{ds}\right) \tag{28}$$

が成立する．式 (26)，式 (27) は集計的な流入交通流率, 流出交通流率を表している．また，式 (28) はネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスを表している．なお，式 (27)，(28) において，s は時刻 t に終点を流出するフローが流入した時刻を表している．

以上の関係性を用いて，DUE 状態における NEF, $G(n(t))$, を定義しよう．そのために，ネットワーク上の交通流の定常状態を以下のように定義する：ネットワーク内の車両存在台数が不変かつ渋滞パターンが変化しない状態．すなわち，定常状態において以下が成立する：

$$\frac{dn_d(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n(t) = n(t_0) \tag{29}$$

ここで，$n(t_0)$ は初期時点におけるネットワーク内の車両存在台数である．この条件は，式 (28) を用いて，以下のように表すことができる（周期境界条件）：

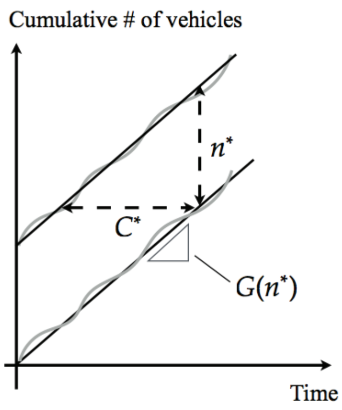
$$\frac{dQ_{od}(\tau_d^s)}{dt} = \frac{dQ_{od}(s)}{ds}\bigg/\frac{d\tau_d^s}{ds} \qquad \forall d \tag{30}$$

定常状態下では，交通流率や旅行時間の多少の変動はあるものの，**図–2** のように，各 OD ペアについて，平均的には流入/流出交通流率が一定の状態が実現するであろう．従って，ある渋滞パターン $\mathbf{x}^*$ が実現する定常状態における流出交通流率および車両存在台数は,

$$G_d(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{dQ_{od}(s)}{ds}\bigg/\frac{d\tau_d^s}{ds}\right) \tag{31}$$

$$n_d^* = C_d^* \cdot G_d(\mathbf{x}^*) \tag{32}$$

と定義することができる．



図–2 定常状態における Input/Output ダイアグラム

(3) NEF を評価するための逆問題

前節で定義した定常状態における流出交通流率 $G(n)$ を具体的に求めるために，DUE 問題の逆問題を考えよう．先に示したように DUE 問題 (6) ~ (10) は，OD 交通流率 $d\mathbf{Q}^s/ds$ を input として，$(\boldsymbol{\tau}^s, \mathbf{y}^s)$ を求めるものであった．そして，この結果として渋滞パターン $\mathbf{x}$ が決定される．この問題を順問題としたとき，本研究で考える逆問題は，渋滞パターン $\mathbf{x}$ を input とし，定常状態における OD 交通流率 $d\mathbf{Q}^s/ds$ を求めるものである[3]．

より具体的には，渋滞パターン $\mathbf{x}$ を与件とした DUE の均衡条件，および，定常状態の仮定（i.e., 周期境界条件）から得られる $d\boldsymbol{\tau}^s/ds$ に関する条件を組み合せることで，OD 交通流率 $d\mathbf{Q}^s/ds$ を求める問題を構築する．結論を先に述べれば，この逆問題を解くことで求められる OD 交通流率が定常状態において各 OD ペアで実現する流出交通流率 $G_d(\mathbf{x})$ となる．以下では，このことを具体的に見ていこう．

まず，図–2 で示したように，各 OD ペアについて，流入・流出交通流率が一致している状況を仮定する．このとき，周期境界条件から，

$$G_d(\mathbf{x}) = \frac{G_d(\mathbf{x})}{d\tau_d^s/ds} \Leftrightarrow \frac{d\tau_d^s}{ds} = 1 \qquad \forall d \tag{33}$$

となる．一方，渋滞パターン $\mathbf{x}$ を与件とした DUE 状態における $d\mathbf{Q}^s/ds$ と $d\boldsymbol{\tau}^s/ds$ の関係は，

$$\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} = (\mathbf{AMA}_-^T)\frac{d\boldsymbol{\tau}^s}{ds} \tag{34}$$

であった．いま，$d\mathbf{Q}^s/ds$ は未知変数であり，この式を解くためには終点数と等しい新たな条件が必要である．この条件が上記の周期境界条件である．具体的には，終点ノードに対応する行を周期境界条件に置き換えたベクトル $d\hat{\boldsymbol{\tau}}^s/ds$（i.e., 終点ノードに対応する行は 1，それ以外の行は $d\tau_i^s/ds$）を考え，式 (34) に代入すると，

$$\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} = (\mathbf{AMA}_-^T)\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}^s}{ds} \tag{35}$$

が得られる．

この関係式をより詳細に見るために，終点ノードとそれ以外のノードを区別して表現してみよう．そのために，それぞれの行列，ベクトルを次のように分割して考える：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_- = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-} \\ \mathbf{A}_{d-} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}^s}{ds} = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\tau}_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

ここで，$\mathbf{G} = [\cdots, G_d(\mathbf{x}), \cdots]^T$ である．このとき，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-} & \mathbf{A}_{d-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\tau}_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T & \mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{d-}^T \\ \mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T & \mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{d-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\tau}_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{36}$$

であり，要素ごとには，

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T\frac{d\boldsymbol{\tau}_i^s}{ds} + \mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{d-}^T\mathbf{1} \tag{37}$$

$$\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T\frac{d\boldsymbol{\tau}_i^s}{ds} + \mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{d-}^T\mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{38}$$

と表される．ここで，第 2 式の $\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T$ は純湧き出しノードを含まない行列であり，必ず逆行列を持つ[13)]．すなわち，

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_i^s}{ds} = -(\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T)^{-1}\mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T \tag{39}$$

が成立する．この式を先の第 1 式に代入すれば，各 OD ペアの流出交通流率は次のように解析的に表される：

$$\mathbf{G} = \mathbf{Z} + \mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{d-}^T\mathbf{1} \tag{40}$$

$$\text{where} \quad \mathbf{Z} \equiv -\mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T(\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T)^{-1}\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{d-}^T\mathbf{1} \tag{41}$$

より詳しく流出交通流率について考察しよう．その準備として，$\mathbf{AMA}_-^T$ を分解表現した行列の各部分が持つ意味を示す：

- $\mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{d-}^T$：終点ノードの接続関係および通過ノードから終点ノードへの流入関係を表す行列
- $\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{i-}^T$：通過ノードの接続関係および終点ノードから通過ノードへの流入関係を表す行列
- $\mathbf{A}_i\mathbf{MA}_{d-}^T$：通過ノードから終点ノードへの流出関係を表す行列
- $\mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T$：終点ノードから通過ノードへの流出関係を表す行列

また，ベクトル $\mathbf{1}$ を掛けることは，各行の全要素を足し合わせることに相当する．従って，第 2 項は，終点ノードへの流入リンクの容量の総和となる．一方，第 1 項は，渋滞パターンによって様々に変化する．ただし，終点ノードから通過ノードへの流出がなければ，$\mathbf{A}_d\mathbf{MA}_{i-}^T$

[3] この逆問題は，$(\boldsymbol{\tau}^s, \mathbf{y}^s)$ を input，均衡条件に整合的な OD 交通流率 $d\mathbf{Q}^s/ds$ を output とする，通常の意味での逆問題 “OD 交通流率推定問題”とは異なる．

はゼロ行列となるため，流出交通流率に影響は与えない．なお，各 OD ペア毎のネットワーク内の車両存在台数は，各 OD 間の最短経路費用 C_d より，

$$n_d = C_d \cdot G_d(\mathbf{x}) \tag{42}$$

と求まる．

以上は渋滞ネットワークかつ point queue モデルを前提とした記述であったが，提案手法は非渋滞ネットワークおよび渋滞の延伸を考慮した physical queue モデルを考慮した場合にも同様に成立する．まず，非渋滞ネットワークについては，先に述べた縮約ネットワークに対して上記の逆問題を構築すればよい．ただし，与えた渋滞パターンによっては DUE 状態が *infeasible*（i.e., 容量制約を満たさない）になり得るため，この点はチェックが必要である．Physical queue モデルでは，下流側リンクからの渋滞の延伸によりネットワーク内の容量パターンが変化しうる．そのため，physical queue を考慮した動的交通量配分は point queue の場合よりも解析がやや煩雑となる[18),19)]．ただし，渋滞パターンを与件とする提案手法においては，渋滞の延伸により変化した容量パターンを用いて逆問題を構成すればよく，解析の煩雑さは全く変わらない[4]．

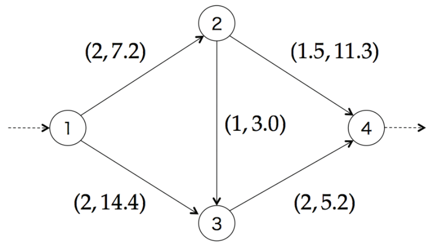
4. 提案手法の検証

本章では，ある動的な OD 需要パターンに従って実現する DUE 状態における NEF と提案手法により解析的に評価した NEF を比べることにより，提案手法の検証を行う．具体的には，ケース A では 1 起点 1 終点の Brasse ネットワークを対象とし，ケース B では 1 起点 2 終点ネットワークを対象とする．

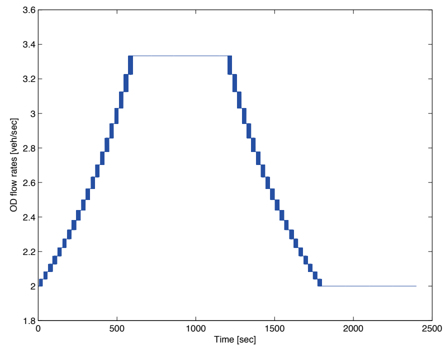
(1) DUE の数値計算法

本稿では，井料[20)]によって提案された手法によって DUE 状態を計算する．この方法は，離散化された車両のうち “最早未配分車両” (i.e., 当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が他のどの車両の最早リンク流入時刻よりも遅くない）を 1 台ずつ最短経路に配分するものである．この方法では，特定のネットワーク（e.g., 1 起点多終点，多起点 1 終点）においては，ヒューリスティックな計算をすることなく DUE の均衡解を求めることができる．本稿が対象とする 1 起点多終点ネットワークにおいては，与えられた OD 需要をネットワークへの流入時刻が早い順に 1 台ずつ最短経路に配分していけばよい．また，この手法においては渋滞の延伸を考慮した様々な交通流モデルを採用することができる．本稿では，三角形の Fundamental Diagram を仮定した Kinematic Wave 理論と整合的な交通流パターンを導出する Newell[21)]の追従モデルを採用する．

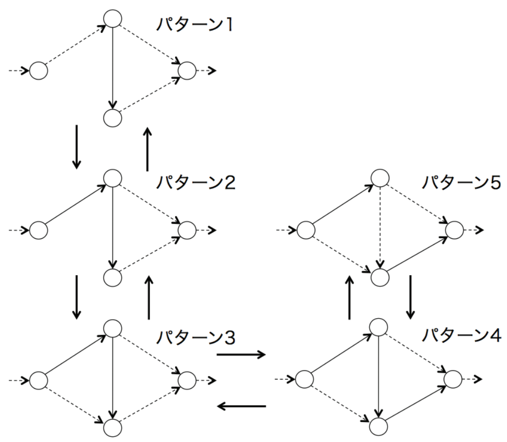
[4] ただし，渋滞パターンの組合せが増えるため，全ての渋滞パターンについて網羅的に NEF を評価する手間は増える．



図–3 Brasse ネットワーク



図–4 OD 交通流率（ケース A）



図–5 渋滞パターンの進展（実線：渋滞リンク，点線：非渋滞リンク）

(2) ケース A：Brasse ネットワーク

図–3 に Brasse ネットワークを示す．このネットワークにおいては，3 つの経路が存在する．各リンクはリンク終端にボトルネックが存在し，図中の括弧書きの数字はそれぞれ，容量 [veh/sec]，自由旅行時間 [sec] を表す．ボトルネック区間以外の容量は 6[veh/sec] とする．OD 需要は**図–4** のように与えた．

この状況下で実現する，渋滞パターンを図–**5** に示す．渋滞の延伸による容量パターンの変化は起きておらず，渋滞進展時と渋滞解消時の渋滞パターンの変化は対称である．以下では，パターン 1 ∼ パターン 5 について具体的に NEF を解析的に評価していこう．

a)　パターン 1

このとき，最短経路費用 $C = 18.5$ である．縮約ネットワークにおいては全てのノードが 1 つのノードに縮約されており，$G(\mathbf{x}_1)$ は OD 交通流率に一致する．この渋滞パターンが実現するための条件より NEF を具体的に調べよう．リンク交通流率はフロー保存則および渋滞条件より下記のように求まる：

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= y_{12} = G(\mathbf{x}_1)\\ \lambda_{23} &= y_{23} = \mu_{23}\\ \lambda_{24} &= y_{24} = G(\mathbf{x}_1) - \mu_{23}\\ \lambda_{34} &= y_{34} = \mu_{23}\end{aligned}$$

リンク 24 が渋滞する条件およびリンク 12 の容量制約条件より，NEF は以下のようになる：

$$\begin{cases}1 \leq G(\mathbf{x}_1) \leq 2\\ 18.5 \leq n = G(\mathbf{x}_1) \cdot C \leq 37\end{cases}$$

b)　パターン 2

最短経路費用 $18.5 \leq C \leq 19.6$ である．このとき縮約ネットワークにおいて，終点ノードから通過ノードへの流出がないため，提案手法の第 2 項で流出交通流率が決まる．従って NEF は以下のように求まる：

$$\begin{cases}G(\mathbf{x}_2) = (\mathbf{A}_d\mathbf{M}_d\mathbf{A}_{d-}^T)\mathbf{1} = \mu_{12} = 2\\ 37 \leq n = G(\mathbf{x}_2) \cdot C \leq 39.2\end{cases}$$

c)　パターン 3

このとき，最短経路費用 $C = 19.6$ である．縮約ネットワークにおいては全てのノードが 1 つのノードに縮約されている．従って，この渋滞パターンが実現する条件より具体的に NEF を評価しよう．フロー保存則および渋滞条件よりリンク交通流率は下記のように求まる：

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= y_{12} = \mu_{12}\\ \lambda_{13} &= y_{13} = G(\mathbf{x}_3) - \mu_{12}\\ \lambda_{23} &= y_{23} = \mu_{23}\\ \lambda_{24} &= y_{24} = \mu_{12} - \mu_{23}\\ \lambda_{34} &= y_{34} = G(\mathbf{x}_3) + \mu_{23} - \mu_{12}\end{aligned}$$

リンク 12 が渋滞する条件およびリンク 34 が渋滞しない条件より，NEF は下記のようになる：

$$\begin{cases}2 \leq G(\mathbf{x}_3) \leq 3\\ 39.2 \leq n = G(\mathbf{x}_3) \cdot C \leq 58.8\end{cases}$$

d)　パターン 4

このとき，最短経路費用 $19.6 \leq C \leq 22.8$（実現値）である．このとき縮約ネットワークにおいて，ループが生じる．また，縮約ネットワークに対して既約行列 **A** を構成する際に起点ノードを取り除くことでループの情報が失われてしまう．そのため，終点から流出するリンク 23 の条件を考慮することを考えると，NEF は

$$\begin{cases}G(\mathbf{x}_4) = -\mu_{23} + \mathbf{A}_d\mathbf{M}\mathbf{A}_{d-}^T\mathbf{1}\\ \qquad\quad = -\mu_{23} + \mu_{12} + \mu_{34} = 3\\ 58.8 \leq n = G(\mathbf{x}_4) \cdot C \leq 68.4\end{cases}$$

と求まる．

e)　パターン 5

このとき，最短経路費用 $C = 22.8$（実現値）である．縮約ネットワークにおいては全てのノードが 1 つのノードに縮約されている．従って，この渋滞パターンが実現する条件より具体的に NEF を評価しよう．リンク交通流率は下記のように求まる：

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= y_{12} = \mu_{12}\\ \lambda_{13} &= y_{13} = G(\mathbf{x}_5) - \mu_{12}\\ \lambda_{23} &= y_{23} = \mu_{12} + \mu_{34} - G(\mathbf{x}_5)\\ \lambda_{24} &= y_{24} = G(\mathbf{x}_5) - \mu_{34}\\ \lambda_{34} &= y_{34} = \mu_{34}\end{aligned}$$

リンク 23 が渋滞しない条件およびリンク 34 が渋滞しない条件より，NEF は下記のようになる：

$$\begin{cases}3 \leq G(\mathbf{x}_5) \leq 3.5\\ 68.4 \leq n = G(\mathbf{x}_5) \cdot C \leq 79.8\end{cases}$$

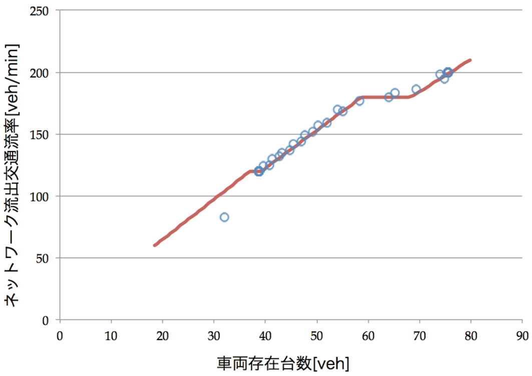
f)　実現 NEF vs. 解析的 NEF

上記で評価した NEF 関数と DUE 数値計算から描かれる NEF を比較しよう．図–**6** は NEF を表しており，青丸が DUE 計算による実現値，赤線が提案手法により評価された NEF を表している．1 点を除き，実現値と解析的評価値はほとんど一致していることが見てとれる[5]．また，実世界の MFD にしばしば現れるヒステリシス・ループ（i.e., 渋滞解消時のエリア平均交通流率が渋滞進展時より低くなる）は現れていない．この理由は，渋滞進展時と渋滞解消時の渋滞パターンの変化が対称であること，また，交通状態のわずかな変化にも瞬時に対応する DUE の経路選択特性によるものと考えられる（i.e., 定常渋滞パターン間の遷移が瞬時に行われる）．

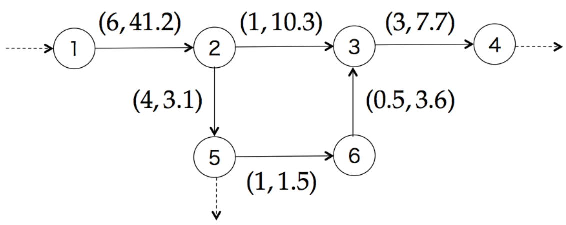
(3)　ケース B：1 起点 2 終点ネットワーク

図–**7** に 1 起点 2 終点ネットワークを示す．OD ペアは $1 \to 4$ および $1 \to 5$ であり，前者は 2 つの経路，後

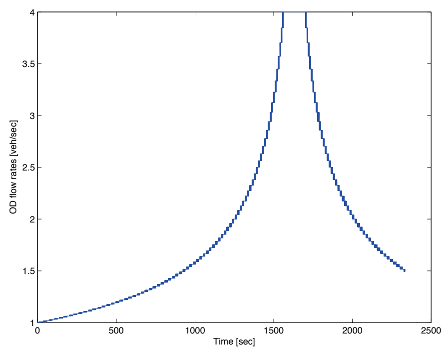
[5] この 1 点は，シミュレーション開始直後の NEF であり，流出交通流率が上がりきる前の状態を表している．



図–6 NEF（青〇：実現値，赤線：提案手法）



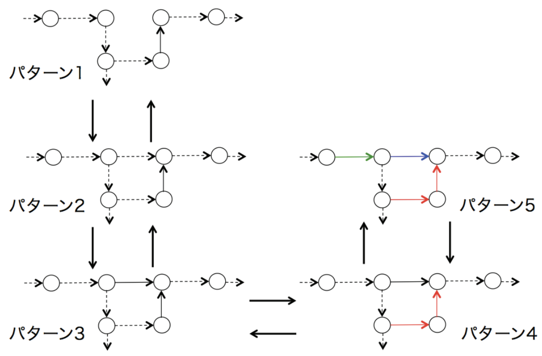
図–7 1 起点 2 終点ネットワーク



図–8 OD 交通流率（ケース B）

者は 1 つの経路を持つ．前節同様，各リンクはリンク終端にボトルネックが存在し，図中の括弧書きの数字はそれぞれ，容量 [veh/sec]，自由旅行時間 [sec] を表す．ボトルネック区間以外の容量は 6[veh/sec] とする．総 OD 需要は**図–8** のように与えられており，各 OD ペアの利用者が交互にネットワークに流入する．

この状況下で実現する，渋滞パターンを**図–9** に示す．渋滞の延伸による容量パターンの変化がいくつかのリンクで起こってはいるが，渋滞進展時と渋滞解消時の渋滞パターンの変化は対称である．以下では，パターン 1 ～ パターン 5 について具体的に NEF を解析的に評価していこう．



図–9 渋滞パターンの進展（実線：渋滞リンク，点線：非渋滞リンク，色付き線：渋滞延伸リンク）

a) パターン 1

このとき，最短経路費用は $57.7 \leq C_4 \leq 59.3$, $C_5 = 44.3$ である．縮約ネットワークに対して提案手法を適用すると，

$$\begin{cases} G_4(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{A}_d\mathbf{M}_d\mathbf{A}_{d-}^T)\mathbf{1} = \mu_{63} = 0.5 \\ 28.85 \leq n_4 \leq 29.65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq G_5(\mathbf{x}_1) \leq 3.5 \\ 0 \leq n_5 \leq 155.05 \end{cases}$$

が求まる．終点 5 の OD ペアの流出交通流率はリンク 25 が渋滞しない条件から得られる．

b) パターン 2

このとき，最短経路費用は $C_4 = 59.3$, $C_5 = 44.3$ である．縮約ネットワークにおいては全てのノードが 1 つのノードに縮約されており，OD 交通流率そのものが流出交通流率となる．従って，この渋滞パターンが実現する条件より具体的に NEF を評価しよう．

$$\begin{cases} 0.5 \leq G_4(\mathbf{x}_2) \leq 1 \\ 29.65 \leq n_4 \leq 59.3 \end{cases}$$

終点 4 の OD ペアの流出交通流率はリンク 23 が渋滞しない条件から決まり，終点 5 の OD ペアの条件はパターン 1 と変わりはない．

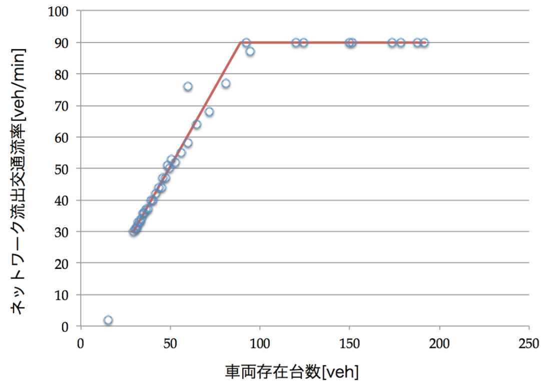
c) パターン 3

このとき，最短経路費用は $59.3 \leq C_4 \leq 100$ (実現値), $C_5 = 44.3$ である．縮約ネットワークに対して提案手法を適用すると，

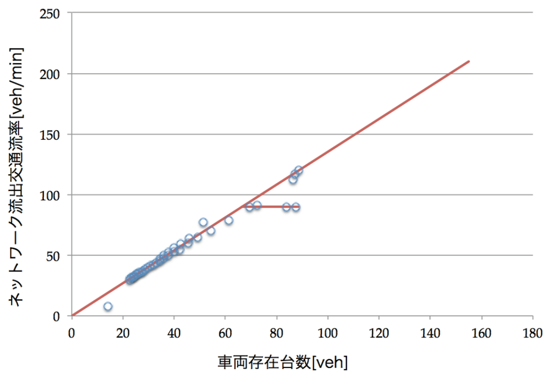
$$\begin{cases} G_4(\mathbf{x}_3) = (\mathbf{A}_d\mathbf{M}_d\mathbf{A}_{d-}^T)\mathbf{1} = 1.5 \\ 88.95 \leq n_4 \leq 150 \end{cases}$$

d) パターン 4

このとき，最短経路費用は $100 \leq C_4 \leq 113$ (実現値), $C_5 = 44.3$ である．縮約ネットワークに対して提案手法



図–10 OD ペア 1→4 の NEF（青〇：実現値，赤線：提案手法）



図–11 OD ペア 1→5 の NEF（青〇：実現値，赤線：提案手法）

を適用すると，

$$\begin{cases} G_4(\mathbf{x}_4) = (\mathbf{A}_d\mathbf{M}_d\mathbf{A}_{d-}^T)\mathbf{1} = 1.5 \\ 150 \leq n_4 \leq 169.5 \end{cases}$$

e) パターン 5

このとき，最短経路費用は $113 \leq C_4 \leq 128$（実現値），$44.3 \leq C_5 \leq 59$ である．また，リンク 23 の渋滞がリンク 12 に延伸し，容量パターンが $\tilde{\mu}_{12} = 3$[veh/sec] となっている[6]．縮約ネットワークに対して提案手法を適用すると，

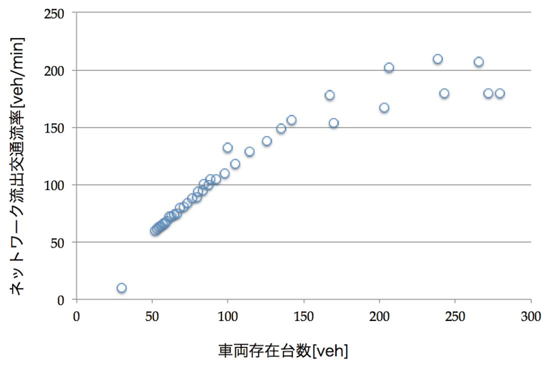
$$\begin{cases} G_4(\mathbf{x}_5) = [-\mathbf{Z}\mathbf{1} + \mathbf{A}_d\mathbf{M}\mathbf{A}_{d-}^T\mathbf{1}]_4 = \mu_{23} + \mu_{63} = 1.5 \\ 169.5 \leq n_d \leq 192 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_5(\mathbf{x}_5) = [-\mathbf{Z}\mathbf{1} + \mathbf{A}_d\mathbf{M}\mathbf{A}_{d-}^T\mathbf{1}]_5 = \tilde{\mu}_{23} - \mu_{23} - \mu_{63} = 1.5 \\ 66.5 \leq n_d \leq 88.5 \end{cases}$$

f) 実現 NEF vs. 解析的 NEF

上記で評価した NEF 関数と DUE 数値計算から描かれる NEF を比較しよう．図–10，図–11 はそれぞれ，OD ペア 1→4，OD ペア 1→5 の NEF を表しており，青丸が DUE 計算による実現値，赤線が提案手法により評価された NEF を表している．図–12 はネットワーク全体の NEF を表しいている．

[6] この容量は，「FIFO 原則の下では流入率と流出率の比が終点によらずに等しい」という条件から決まる．すなわち，流入交通流率が 1:1 であり，OD ペア 1→4 の流出率が 1.5[veh/sec] であるため，OD ペア 1→5 の流率の流出率も 1.5[veh/sec] となり，容量パターン 3[veh/sec] となる．



図–12 全体の NEF（青〇：実現値，赤線：提案手法）

各 OD ペアについて，実現値と解析的評価値はほとんど一致していることが見てとれる．また，OD ペア 1→5 においては，存在台数が 80 台付近において急激に流出交通流率が低下している．これは，リンク 23 の渋滞の延伸によってリンク 12 の容量パターンが変わったことによる．その結果，全体の NEF においてもヒステリシス・ループが生じている．

全体の NEF を解析的に評価できない理由は，全体の NEF が各 OD ペアの NEF の単なる和で与えられるのではなく，ネットワーク全体の車両の構成比率（あるいは需要）によって和の重みが変わるからである．このことは，一般に，NEF（あるいは MFD）は OD 需要とは独立に決まるのではなく，その比率にも影響を受けることを示唆している．

5. おわりに

本稿では，1 起点多終点ネットワークを対象に，渋滞延伸を考慮した DUE 状態における MFD の解析を行った．具体的には，ネットワーク内の車両存在台数とトリップ完了率の関係を表す NEF を解析的に評価する方法論を構築し，DUE の数値実験により生成した NEF が提案手法によって解析的に近似できることを示した．

本稿では，渋滞パターンを DUE 数値実験によって生成し，そのパターンについて NEF を解析的に評価した．NEF の全体を評価するためには，存在しうる全ての渋滞パターンに対して逆問題を解けばよい．ただし，渋滞の延伸も考慮した渋滞パターンの数はネットワーク・サイズに対して組合せ的に増加しうるため，全ての渋滞パターンを考慮するのは困難であると考えられる．しかし，利用者の経路選択の結果実現する渋滞パターン

は限定されているはずであり，こうしたパターンを効率的に探索する方法の構築は今後の課題である．

また，本稿では 1 起点多終点ネットワークを対象としたが，多起点 1 終点ネットワークについても同様の方法が構築可能であると考えられる．従って，多起点 1 終点ネットワークに対する NEF の評価法，OD 構造の違いが NEF に与える影響評価等については，別の機会に改めて報告したい．

謝辞： 本研究は，日本学術振興会・科学研究費補助金・若手研究 (B)（課題番号：26820207 ）を受けた研究の一部である．

参考文献

1) Daganzo, C. F.: Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.41, No.1, pp.49–62, 2007.
2) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.9, pp.759–770, 2008.
3) Mazloumian, A., Geroliminis, N., and Helbing, D.: The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity., *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, Vol.368, No.1928, pp.4627–47, 2010.
4) Knoop, V., Van Lint, J., and Hoogendoorn, S.: Routing strategies based on the macroscopic fundamental diagram, *Transportation Research Records*, No. 2315, pp. 1–10, 2012.
5) Mahmassani, H. S., Saberi, M., and Zockaie, A.: Urban network gridlock: Theory, characteristics, and dynamics, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.36, pp.480–497, 2013(In: *Proceedings of the 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by S. P. Hoogendoorn et al.), Delft, pp.79–98, 2013.).
6) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.3, pp.605–617, 2011.
7) Daganzo, C. F. and Geroliminis, N.: An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.9, pp.771–781, 2008.
8) Helbing, D.: Derivation of a fundamental diagram for urban traffic flow, *The European Physical Journal B*, Vol.70, No.2, pp.229–241, 2009.
9) Leclercq, L. and Geroliminis, N.: Estimating MFDs in simple networks with route choice, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.57, pp.468–484, 2013 (In: *Proceedings of the 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by S. P. Hoogendoorn et al.), Delft, pp.960–979, 2013.).
10) 赤松隆・桑原雅夫: ネットワーク接続行列のランクについて, 土木学会論文集 *IV*, Vol.17, No.449, pp.223–226, 1992.
11) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for one-to-many OD pattern, *Proceedings of The 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Berkeley, 1993, Elsevior.
12) 赤松隆・桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 od ペアの場合, 土木学会論文集 *IV*, Vol.23, No.488, pp.21–30, 1994.
13) 赤松隆・高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと OD 構造の関係に関する理論的考察, 土木学会論文集 *IV*, Vol.43, No.618, pp.39–51, 1999.
14) Akamatsu, T. and Kuwahara, M.: A capacity increasing paradox for a dynamic traffic assignment with departure time choice, *Proceedings of The 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by A. Ceder), pp. 301–204, Jerusalem, 1999, Pergamon.
15) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
16) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks, *Transportation Science*, Vol.37, No.2, pp.123–138, 2003.
17) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes: Analysis of non-saturated networks., Working Paper, Tohoku University., 2003.
18) 桑原雅夫・赤松隆: 多起点多終点 OD における渋滞延伸を考慮したリアクティブ動的利用者最適交通量配分, 土木学会論文集 *IV*, Vol.34, No.555, pp.91–102, 1997.
19) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many OD pattern, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.35, No.5, pp.461–479, 2001.
20) 井料隆雅: 車両を離散化した動的交通量配分問題の nash 均衡解の解法, 土木学会論文集 *D3*（土木計画学）, Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
21) Newell, G.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.

(2014. 7. 29 受付**)**

An analysis of the macroscopic fundamental diagram under dynamic user equilibrium with physical queues: One-to-many travel demands case

Kentaro WADA and Kouki SATSUKAWA