ネットワーク・モデリングに基づく動的交通信号制御問題に対する解法の構築

和田 健太郎[1]・柳沼 秀樹[2]・臼井 健人[3]

[1]正会員　東京大学助教 生産技術研究所（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp
[2]正会員　東京大学大学院特任助教 工学研究科（〒 113-8656 文京区本郷 7-3-1）
E-mail: yaginuma@civil.t.u-tokyo.ac.jp
[3]非会員　東京大学大学院 工学系研究科 修士課程（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: kusui@iis.u-tokyo.ac.jp

本研究は，和田・瀧川・桑原[1)]によって提案された動的交通信号制御問題の解法を提案する．具体的には，厳密解法として (1) Benders の分解原理に基づく解法，近似解法として (2) アニーリング法，(3) Cross-Entropy 法に基づく解法を構築する．また，提示するそれぞれの解法について，問題構造（ネットワーク構造）を活用したアルゴリズムの性能改善手法やアルゴリズムの実装を容易にする方法を示す．

Key Words: *dynamic traffic signal control, Benders decomposition, simulated annealing, cross-entropy method*

1. はじめに

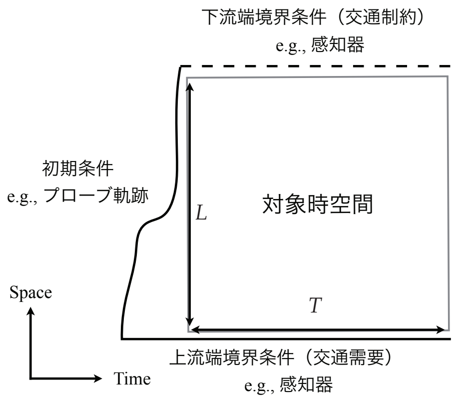
交通信号は個別交差点部の交通流を安全かつ円滑に流すだけでなく，都市中心部における信号の集積である信号群制御パターンは道路ネットワークの性能を決定づける重要な役割を担っている．このような隣接する信号群の系統制御では，従来，共通サイクル長，スプリット，オフセット（隣接交差点間の青開始時刻のずれ）の 3 種類のパラメータを用いてきた．

しかし，その多くの研究／手法は，非飽和（非渋滞）状態のみ考慮してパラメータの最適化 (e.g., 遅れ時間の最小化) をはかるものであり (e.g., Newell[2)])，様々な交通状態を統一的に扱える枠組みを与えるものではない．また，過飽和状態を考慮した研究の多くも，(1) 渋滞ダイナミクスを非常に単純化 (e.g., *store-and-forward* モデル[3)]) しており，渋滞の延伸による隣接交差点の相互作用を適切に評価することができない，(2) 各パラメータを独立かつ経験則に頼った手法や非飽和状態に対する手法で決定している，といった課題が残る．

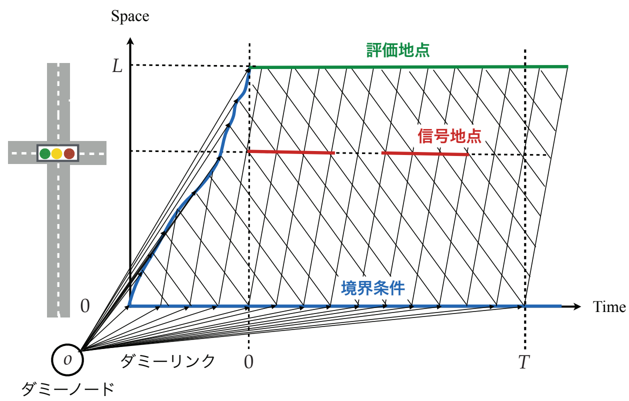
上述の課題は，本質的には，状態方程式である交通流ダイナミクスの非線形性や制約条件である制御パラメータ間の関係（i.e., *if-then* 条件）を最適化の枠組みで適切に表現する方法論が確立されていない（あるいは困難である）ことを意味する．Lo et al.[4),5),6)]による一連の研究では，交通流の時空間ダイナミクス（*Cell Transmission Model*[7)]）および *if-then* 条件を *binary* 変数を導入することにより線形化し，遅れ時間を最小化する最適系統信号制御を混合整数計画問題として定式化している．しかし，信号制約が満たすべき物理条件（i.e., 全赤時間の存在）を無視している，線形化のために必要以上の離散変数・制約条件の増加を招き問題が複雑化しているため効率的解法の構築が難しいといった問題があり，最適化の方法論が確立されたとは言い難い．

これに対して，近年，瀧川等[8)]，和田等[1)]は，交通流の時空間ダイナミクス（*Variational Theory*[9)]）を考慮した上で，最低限の物理的制約を満たす信号 “オン・オフ” パターンを最適化する新たな定式化を示した．この問題は明快なネットワーク構造を持っており，その構造を活かした効率的な解法の構築が期待される．

本研究は，和田等[1)]によって提案された動的交通信号制御問題の解法を提案する．具体的には，厳密解法として (1) Benders の分解原理 (BD) に基づく解法，近似解法として (2) アニーリング法 (SA)，(3) Cross-Entropy (CE) 法に基づく解法を構築する．また，提示するそれぞれの解法において問題構造（ネットワーク構造）を活用することで，以下のようなアルゴリズムの性能改善や実装を容易にすることができることを示す：(1) 問題が “*Shortest-path interdiction problem*[10)]” とみなせることを活用した BD の改善，(2) SA における状態近傍設計への最長経路問題（最短経路問題）の活用，(3) マルコフ連鎖を用いた CE 法の設計．なお，採用する 2 つの近似解法は，次のような意味でタイプの異なるものである：SA 法は（現在）解そのものを操作することにより新たな解候補を生成するのに対して，CE 法は解候補が生成される確率分布を改訂する．



図–1 時空間上の境界条件



図–2 VT ネットワーク

2. 最適信号制御問題

(1) 状況設定

本章では，まず，状況設定および和田等[1)]によって提案された最適化問題を概説する．複数の信号交差点を含む道路路線を対象とし，この道路路線を主道路，各交差点において主道路と交差する道路を交差道路と呼ぶ．各道路は整数の連番で区別され，主道路を $r = 0$，交差道路を $r = 1, 2, \ldots, |R| - 1$ で表す．ここで，R は対象とする道路集合である．煩雑さを避けるため，定式化においては一方向交通のみを考える．また，各道路から別の道路への流入・流出はないと仮定する．

各道路で対象とする道路区間は $x \in [0, L^r]$ であり，各交差点の主道路上流端からの位置を x^r, $r = 1, 2, \ldots, |R| - 1$ と表す．各道路の交通流の特性は三角形の Fundamental Diagram（FD）によって特徴付けられるとし，その形状は以下のパラメータのうち 3 つを定めることで決まる：前向き密度波 (FW: *Forward Wave*) 速度 v^r；後向き密度波 (BW: *Backward Wave*) 速度 w^r；渋滞密度 k^r_j，飽和交通流率 q^r_{max}．制御対象とする時間は $t \in [0, T]$ とする．

各道路の対象時空間の交通流ダイナミクスを記述するために一般的に必要な境界条件を**図–1** に示す．交通需要は，道路上端 $x = 0$ において外生的に与えられる．このような情報は，信号交差点の上流に設置された感知器により得ることができる．各道路の初期状態を表す初期条件としては，プローブ車両の軌跡情報によって実際の状況を反映することが考えられる．下流側の条件は，上流側の信号パターンの変更により変化してしまうため，本研究では感知器情報をそのまま用いることはできない．そもそも下流端条件は，対象区間のより下流側のボトルネックから渋滞が延伸する場合などに必要となる情報である．従って，そのようなボトルネックを対象区間に含めることで，一般性を失うことなく下流端の条件を除いて考えることができる．以降では，上記で述べた境界条件が**図–1** のように対象時空間を包含するように与えられているとする．

(2) 信号制御問題の概要

対象とする信号制御問題は，各道路の遅れ時間を D^r とすれば，概念的には下記のような最適化問題として与えられる：

$$\min_{\mathbf{s}} . \sum_{r \in R} D^r(\mathbf{s}) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{s} \in K. \tag{1}$$

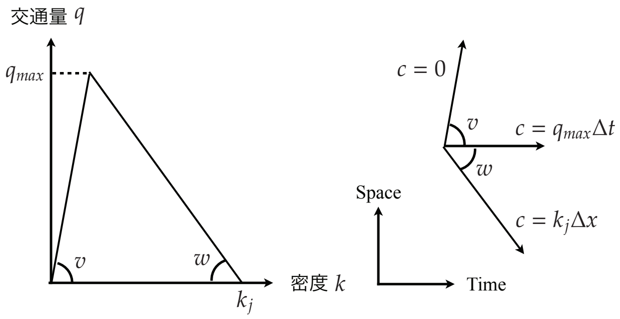
ここで，**s** は信号制御パターンを表しており，K は信号制御パターンの許容領域を表す．目的関数である遅れ時間は，信号制御パターンの関数として表される．通常の信号制御問題では遅れ時間を信号パラメータの関数として表すが，本研究では信号パラメータを明示的に考えず，信号制御パターンそのものを変数として扱っている．続く 2 節では，この目的関数・制約条件についてより詳しく説明を行う．

(3) 信号パターンを与件とした遅れ時間の評価

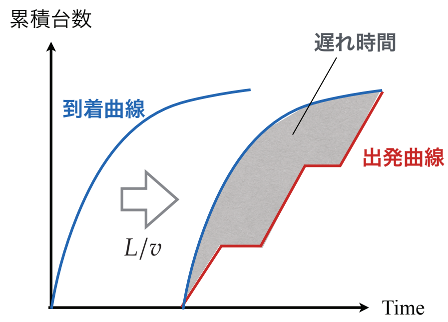
a) VT による交通流の表現

対象問題では交通流の変分理論[9)]（以降は VT と呼ぶ）により信号制御パターンを与件とした遅れ時間を評価する．VT においては，以下に述べる時空間図上の最短経路探索問題を解くことで，時空間図上の全ての交通状態を決定することができる．

まず，**図–2** のような三角形の FD を敷き詰めた時空図上のネットワーク（VT ネットワーク）を構築する．ここで，FD の底辺にあたる時間幅を Δt，FD の高さにあたる空間幅を Δx とする．このとき，両者の関係は $\Delta t = \Delta x\,(1/v + 1/w)$ である．このネットワークにおいて，FW 速度の（正の）傾きを持つ直線と BW 速度の（負の）傾きを持つ直線の交点がノードであり，その集合を $\mathcal{V}$ で表す．一方，2 点のノードを繋ぐ部分が（通常）リンクであり，リンク集合を $\mathcal{L}_o$ で表す．ノードは離散化



図–3 FD と各リンクの相対交通容量



図–4 遅れ時間の概念図

された時間・空間の組 (t, x), $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, T$, $x = 0, \Delta x, 2\Delta x, \cdots, L$ で表すことができるが，以降では表現を簡潔にするために $i = (t, x)$ として 1 つの記号で表す．また，リンクは上流側ノード i と下流側ノード j を用いて (i, j) と表現する．なお，VT の枠組みにおいて，信号現示は，信号交差点位置の隣り合うノードを結ぶリンクにより表現される（**図–2** の赤線部分）．この信号リンクの集合を $\mathcal{L}_s$ とする．

各リンクコストは，移動観測者がリンクに沿った速度で走行したときの累積台数の変化の上限として与えられる（**図–3** も参照）．すなわち，FW 速度の傾きを持つリンク（FW リンク）上では，移動観測者は誰からも追い越されることはないため，コストは $c_{ij} = 0$ である．BW 速度の傾きを持つリンク（BW リンク）上では，移動観測者は Δx 進む間に最大で密度 k_j を観測しているため，そのコストは $c_{ij} = k_j\Delta x$ で与えられる．一方，信号リンクに沿って速度 0 で留まる移動観測者が観測する相対交通容量は，現示が赤か青かによって異なる．すなわち，赤現示のときは移動観測者は誰からも追い越されることはないため $c_{ij} = 0$ となり，青現示のときは移動観測者を最大で交通容量だけ車が通過するため $c_{ij} = q_{\max}\Delta t$ となる．ここで，信号が青現示のとき 1，赤現示のとき 0 をとる離散変数 s_{ij} を導入すると，信号リンクコストは $c_{ij} = q_{\max}\Delta t \cdot s_{ij}$ と表現できる．

以上で構築した VT ネットワークにおける境界条件は，上流側の需要条件および初期条件（e.g., プローブ車両の軌跡）である（**図–2** の青線部分）．そして，この境界条件からの多起点 1 終点の最短経路探索問題を解くことにより各地点の累積台数は厳密に求まる．さらに，**図–2** に示すようなダミーノード o を用意し，ダミーノードから境界条件を繋ぐダミーリンクのコストを各境界条件が持つ累積台数値とする．このとき，全てのノードの累積台数を一括で求める問題は，ダミーノードを起点，全てのノードを終点とする 1 起点多終点の最短経路探索問題に帰着する．なお，求まった各地点の累積台数の時空間図上の等高線はその道路区間の全車両の軌跡を表している．

b) 遅れ時間の評価

上記で概説した VT の枠組みにより，各道路 r の遅れ時間 $D^r(\mathbf{s})$ を具体的に評価しよう．なお，以降では $\Delta t = 1$ として議論を進める．ある道路における各車両の遅れ時間は，車両が何の制約も受けずに自由流速度 v で道路を完走した場合の旅行時間と実際の旅行時間の差として定義される．この遅れ時間は，出入りがない道路において FIFO (First-In-First-Out) 原則が成立しているとき，**図–4** の累積曲線により表すことができる．具体的には，道路の上流端への到着曲線（青線）を自由流速度で走行したときの旅行時間分だけ下流側へシフトし，実際に道路の下流端を流出した出発曲線（赤線）との差を考えればよい．両曲線の水平方向の差が各車両の遅れ時間を表しており，両曲線に囲まれた面積（灰色部分）がこの道路において発生した総遅れ時間である．

この考え方に基づけば，VT の枠組みにおける遅れ時間は，上流端の（離散的な）累積曲線（i.e., 交通需要）と下流端における累積曲線の差として以下のように表すことができる：

$$D^r(\mathbf{s}^r) = \sum_{i \in \mathcal{V}^r_{up}} N^r_i - \sum_{i \in \mathcal{V}^r_{down}} N^r_i \tag{2}$$

ここで，$\mathcal{V}^r_{up}, \mathcal{V}^r_{down}$ はそれぞれ上流端，下流端におけるノードの集合である．上流端の累積台数は境界条件により既知であるため，下流端における累積台数のみを評価すればよい．従って，信号制御パターンを与件とした各道路における遅れ時間評価は，ダミーノードを起点，下流端ノードを終点とする 1 起点多終点の最短経路探索問題（線形計画問題）として定式化される：

[Primal/Delay]

$$D^r(\mathbf{s}^r) = -\min_{\mathbf{y} \geq \mathbf{0}} . \sum_{ij \in \mathcal{L}^r_o} c^r_{ij} y^r_{ij} + \sum_{ij \in \mathcal{L}^r_s} (q^r_{max} \cdot s^r_{ij}) y^r_{ij} \tag{3}$$

subject to

$$\sum_{i\in VI(k)} y^r_{ik} - \sum_{i\in VO(k)} y^r_{ki} = 0 \qquad \forall k \in \mathcal{V}^r \setminus \{\mathcal{V}^r_{down}, o\} \quad (4)$$

$$\sum_{VI(k)} y^r_{ik} = 1 \qquad \forall k \in \mathcal{V}^r_{down} \quad (5)$$

$$\sum_{VO(o)} y^r_{oi} = |\mathcal{V}^r_{down}| \quad (6)$$

[Dual/Delay]

$$D^r(\mathbf{s}^r) = -\max_{\mathbf{N}^r}.\sum_{i\in\mathcal{V}^r_{down}} N^r_i \quad (7)$$

subject to

$$N^r_j \leq N^r_i + c_{ij} \qquad \forall ij \in \mathcal{L}^r_o \quad (8)$$

$$N^r_j \leq N^r_i + q^r_{max}\cdot s^r_{ij} \qquad \forall ij \in \mathcal{L}^r_s \quad (9)$$

$$N_o = 0 \quad (10)$$

$VI(k)$ はノード k を終点に持つリンクの集合，$VO(k)$ はノード k を起点に持つリンクの集合である．ここで，ダミーリンクは通常リンク集合に含めている．また，通常リンクにおけるコスト c_{ij} は FW リンク，BW リンク，ダミーリンクにより値が異なる．

問題 [Primal/Delay] は起点から下流端の各ノードまでの最短経路（i.e., 最適 *valid paths*）を求める問題であり，y^r_{ij} は各リンクを通るフローを表している．制約条件は各ノードにおけるフロー保存則のみである．一方，この双対問題 [Dual/Delay] は起点から各ノードまでの最短経路費用（i.e., 累積台数）N^r_i を未知変数とする問題である．制約条件は各リンクにおいて相対交通容量以上に累積台数が変化しないことを表している．両問題とも，目的関数の最適値として遅れ時間（正確には下流端の累積台数の和）が与えられる．

この節の最後に両問題を行列・ベクトル表記しておこう．VT ネットワークのリンク・ノード接続行列を $\mathbf{A}^r$，問題 [Primal/Delay] の制約条件の右辺を並べたベクトルを $\mathbf{b}^r$，通常リンクのコストを並べたベクトルを $\mathbf{c}^r$，信号パターンを並べたベクトルを $\mathbf{s}^r$ とすれば，各問題は以下のように表現することができる：

[Primal/Delay]

$$D^r(\mathbf{s}^r) = -\min_{\mathbf{y}^r\geq\mathbf{0}}.\ (\mathbf{c}^r)^T\mathbf{y}^r_o + (q^r_{\max}\mathbf{s}^r)^T\mathbf{y}^r_s \quad (11)$$

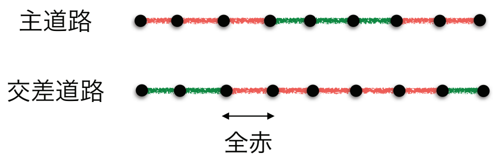
$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^r\mathbf{y}^r = \mathbf{b}^r \quad (12)$$

[Dual/Delay]

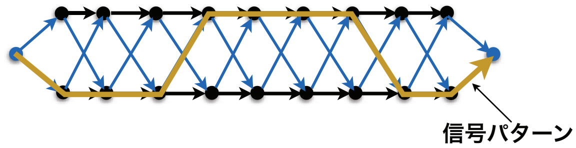
$$D^r(\mathbf{s}^r) = -\max_{N^r_o=0,\mathbf{N}^r}.\ (\mathbf{b}^r)^T\mathbf{N}^r \quad (13)$$

$$\text{subject to} \quad (\mathbf{A}^r_o)^T\mathbf{N}^r_o \leq \mathbf{c}^r \quad (14)$$

$$(\mathbf{A}^r_s)^T\mathbf{N}^r_s \leq q^r_{\max}\mathbf{s}^r \quad (15)$$



図–5 物理的制約を満たす信号制御パターンの例



図–6 信号ネットワーク

ここで，行列・ベクトルの下付き添字 o, s はそれぞれ通常リンク，信号リンクに関わる部分のみを抜き出した行列・ベクトルを表している．

(4) 信号制約の特定化

対象問題では，従来の信号制御パラメータ（サイクル長，スプリット，オフセット）を明示的な変数とするのではなく，最小限の物理的な性質を満たす信号の“オン・オフパターン”を変数とする．この物理的制約とは，(1) 主道路・交差道路が同時に青現示にならない，(2) 信号切り替わり時に全赤時間が存在する，である．この制約を満たす信号制御パターンの一例を図–**5** に示す．これは，主道路・交差道路の VT ネットワークにおける信号リンクを抽出し並べたものである．上段が主道路，下段が交差道路の信号制御パターンを表している．このパターンをよく眺めると，青現示のシークエンスはある種のネットワークのフローパターンとなっていることが見てとれる．

このことを具体的に表したのが，図–**6** の信号ネットワークである．信号ネットワークは，主道路・交差道路の信号リンク（黒色部分）を青色のダミーノード，ダミーリンクを用いて繋いだものであり，起終点ダミーノード間を 1 単位のフローが流れる（黄色線部分）．このフローが流れた信号リンクが青現示に対応する．ダミーリンクのうち，特に異なる道路の VT ノードを繋ぐリンクを信号切り替えリンクと呼ぶが，このリンクが全赤時間分だけずれてノードを繋いでいることにより，全赤時間を表現している．

信号ネットワークの概念を用いて，信号制約を特定化しよう．その制約とは，信号ネットワーク上のフローが満たすべき制約に他ならない．すなわち，信号ネットワークの各ノードにおけるフロー保存則，および，各リンクのフローに対する 0-1 整数制約である．交差点 r

における信号ネットワークのノード集合を $\overline{\mathcal{V}}_s^r \ni i$，リンク集合を $\overline{\mathcal{L}}_s^r \ni ij$ 各リンクのフローを z_{ij}^r とすれば，制約条件は以下のように表される：

$$\sum_{i \in VI(k)} z_{ik}^r - \sum_{i \in VO(k)} z_{ki}^r = 0 \qquad \forall k \in \overline{\mathcal{V}}_s^r \setminus \{o, d\} \tag{16}$$

$$\sum_{VI(d)} z_{id}^r = 1 \tag{17}$$

$$\sum_{VO(o)} z_{oi}^r = 1 \tag{18}$$

$$z_{ij}^r \in \{0, 1\} \qquad \forall ij \in \overline{\mathcal{L}}_s^r. \tag{19}$$

また，ここで，信号ネットワークのリンク・ノード接続行列を $\mathbf{C}^r$，保存則の右辺を並べたベクトルを $\mathbf{d}^r$，リンクフローベクトル $\mathbf{z}^r$ に対する 0-1 整数制約を Z^r と表すと，上記の制約条件は，

$$\mathbf{C}^r \mathbf{z}^r = \mathbf{d}^r, \quad \mathbf{z}^r \in Z^r \tag{20}$$

と表すことができる．

最後に，信号ネットワークのフローパターンと信号制御パターンの対応を考えよう．先の説明から明らかなように，（ダミーリンクを除いて）両者は一対一対応している．従って，交差点 r における信号ネットワークのフローパターン $\mathbf{z}^r$ を，主道路の交差点 r の信号制御パターン $\mathbf{s}^{0,r}$，交差道路の交差点の信号制御パターン $\mathbf{s}^r$ に変換する行列を $\mathbf{G}^r$ とすれば，両者の関係は下記のように表すことができる：

$$\bar{\mathbf{s}}^r \equiv \left[\frac{\mathbf{s}^{0,r}}{\mathbf{s}^r} \right] = \mathbf{G}^r \mathbf{z}^r. \tag{21}$$

(5) 最適信号制御問題

ここまでで特定化した目的関数および制約条件を組み合わせることにより最適信号制御問題を定式化しよう．目的関数である遅れ時間が 2 種類の方法で表現できたことに対応して，全道路の総遅れ時間を最小化する提案信号制御問題は以下のように表される：

[Primal]

$$\max_{\mathbf{z}^r \in Z^r} . \min_{\mathbf{y}^r \geq \mathbf{0}} . \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \mathbf{y}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \mathbf{y}_s^r \right] \tag{22}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^r \mathbf{y}^r = \mathbf{b}^r \qquad \forall r \in R \tag{23}$$

$$\mathbf{C}^r \mathbf{z}^r = \mathbf{d}^r \qquad \forall r \in R \tag{24}$$

$$\bar{\mathbf{s}}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{z}^r \qquad \forall r \in R \tag{25}$$

[Dual]

$$\max_{\mathbf{z}^r \in Z^r, N_o^r = 0, \mathbf{N}^r} . \sum_{r=0}^{|R|-1} (\mathbf{b}^r)^T \mathbf{N}^r \tag{26}$$

$$\text{subject to} \quad (\mathbf{A}_o^r)^T \mathbf{N}_o^r \leq \mathbf{c}^r \qquad \forall r \in R \tag{27}$$

$$(\mathbf{A}_s^r)^T \mathbf{N}_s^r \leq q_{\max}^r \mathbf{s}^r \qquad \forall r \in R \tag{28}$$

$$\mathbf{C}^r \mathbf{z}^r = \mathbf{d}^r \qquad \forall r \in R \tag{29}$$

$$\bar{\mathbf{s}}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{z}^r \qquad \forall r \in R. \tag{30}$$

これらは，総遅れ時間を最小化する最適なオン・オフパターンを導出する問題である．問題 [Dual] は 0-1 混合整数計画問題であり，VT ネットワーク上の信号リンクの追加・削除を変数とするネットワーク・デザイン問題である．また，そのデザインパターンが信号ネットワークにおけるフローパターンによって決定されるという興味深い構造を有している．なお，問題 [Dual] は 1 段階の最適化問題であるため，分枝限定法に基づく最適化ソフトウェア（e.g., CPLEX, Gurobi optimizer etc.）で対応しやすい問題である．ただし，こうした汎用解法は必ずしも効率的ではないことが知られている．

一方，問題 [Primal] は（整数制約付き）maxmin 問題である．この問題は，VT ネットワークにおける最短経路費用を最も増加させるリンクの途絶（あるいはコストの増加）パターンを決定する問題であると解釈することができる．これは，“*Shortest-path interdiction problem*[10]” と呼ばれるクラスの問題である．次節で示す Benders の分解原理に基づく解法は，このクラスの問題に対して提案されたアルゴリズムを活用するものである．

3. 提案解法 I：Benders 分解ベース

以降の章では，上記で説明した動的交通信号制御問題に対する解法を提案する．本章では，まず，対象問題の厳密解法として Benders の分解原理[11]に基づく解法を示す．Benders の分解原理は，複数の種類の変数を持つ数理計画問題（i.e., 混合整数計画問題）に対する有効なアプローチの 1 つとして知られている．このアプローチでは，変数を 2 つの部分集合に分割し，両者を交互に更新する．そのため，各変数に関する構造（i.e., ネットワーク構造）を活用したアルゴリズムの構築が可能となる．

(1) 基本的な **Benders** 分解アルゴリズム

いま，ある信号制御パターン $\mathbf{z}$ が与えられているとしよう．このとき，VT により遅れ時間を評価する問題は，下記の最短経路探索問題（以降ではサブ問題と呼ぶ）となる：

[Benders/Sub]

$$D^r(\mathbf{z}^r) = \min_{\mathbf{y}^r \geq \mathbf{0}} . \ (\mathbf{c}^r)^T \mathbf{y}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \mathbf{y}_s^r \tag{31}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^r \mathbf{y}^r = \mathbf{b}^r \tag{32}$$

ここで，信号制御パターンが与えられたとき，各道路のサブ問題は独立であり，別々に考えることができる．サブ問題は線形計画問題であるため，この最適解は制約条件の端点（i.e., 1 終点多終点の経路パターン）で実現する．従って，制約条件から構成される有限個の端点の集合を Y^r，その端点を $\hat{\mathbf{y}}^r$ とすれば，問題 [Primal] は以下のように書き換えることができる：

$$\max_{\mathbf{z}^r \in Z^r} . \min_{\hat{\mathbf{y}}^r \in Y^r} . \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right] \tag{33}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{C}^r \mathbf{z}^r = \mathbf{d}^r \qquad \forall r \in R \tag{34}$$

$$\bar{\mathbf{s}}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{z}^r \qquad \forall r \in R \tag{35}$$

さらに，γ という連続変数を導入し，min 関数の部分を制約条件へ移行すれば，この最適化問題は以下の 1 段階の最大化問題へと変換することができる：

[Benders/Master]

$$\max_{\gamma \geq 0, \mathbf{z}^r \in Z^r} . \ \gamma \tag{36}$$

$$\text{subject to} \quad \gamma \leq \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right]$$

$$\forall \hat{\mathbf{y}}^r \in Y^r, \forall r \in R \tag{37}$$

$$\mathbf{C}^r \mathbf{z}^r = \mathbf{d}^r \qquad \forall r \in R \tag{38}$$

$$\bar{\mathbf{s}}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{z}^r \qquad \forall r \in R \tag{39}$$

この問題をマスター問題と呼ぶ．マスター問題は，有限個の制約 (37)（“Benders cuts”と呼ばれる）が全て列挙されていれば，問題 [Primal] あるいは問題 [Dual] と等価な問題である．しかし，サブ問題の全ての端点を予め列挙することは事実上困難である．そのため，サブ問題を繰り返し解くことにより逐次的に端点を生成する方法が採用される．端点の部分集合のみを制約とするマスター問題は “緩和マスター問題”（問題 [Benders/R-Master] と書く）と呼ばれ，その最適値はオリジナル問題の上界を与える．

Benders の分解原理に基づくアルゴリズムは下記のようにまとめられる：

Step 0 (初期設定) 上界を $\overline{\gamma} = \infty$，下界 $\underline{\gamma} = -\infty$，許容最適ギャップを ϵ と設定する．初期信号パターン $\hat{\mathbf{z}}(0)$ を与える．端点の（部分）集合を $\hat{Y}^r(0) = \emptyset$ と設定し，$n = 1$ として開始.

Step 1 (サブ問題) 固定された信号パターン $\hat{\mathbf{z}}^r(n)$ の下で，問題 [Benders/Sub] を解き，新たな端点 $\hat{\mathbf{y}}^r(n)$ を生成する．また端点集合を更新する：$\hat{Y}^r = \hat{Y}^r \cup \hat{\mathbf{y}}^r(n)$.

$$\text{If} \quad \underline{\gamma} < \sum_{r=0}^{|R|-1} D^r(\mathbf{z}^r(n)) \quad \text{then} \quad \underline{\gamma} = \sum_{r=0}^{|R|-1} D^r(\mathbf{z}^r(n))$$

$$\text{If} \quad \overline{\gamma} - \underline{\gamma} \leq \epsilon \quad \text{then} \quad \text{stop,} \tag{40}$$

下界を実現するペア $(\hat{\mathbf{z}}^*, \hat{\mathbf{y}}^*)$ が元問題の最適解となる．それ以外の場合は, Step 2 へ進む.

Step 2 (緩和マスター問題) 問題 [Benders/R-Master] を解き，新たな信号パターン $\hat{\mathbf{z}}(n+1)$ を生成する．同時に新たな上界 $\overline{\gamma}$ が得られる．$n = n + 1$ として Step 1 へ進む.

このアルゴリズムでは上界と下界が一致する（i.e., 厳密な最適解が得られる）まで新たな端点が生成される．従って，有限回で厳密解が得られることが保証できる．

(2) Benders の分解原理の性能改善手法

本節では，対象問題が “*Shortest-path interdiction problem*”を一般化した問題となっていることを活用する Benders の分解原理の性能改善手法を示す．具体的には，Israeli and Wood[10)]で提案された性能改善手法が本研究にも適用できることを示す.

a) 強い妥当不等式の導入

緩和マスター問題の定式化をより強くするために (i.e., 許容領域を狭めるために)，強い妥当不等式（*integer cut* とも呼ばれる）を導入する．妥当不等式とは，(整数) 許容解を排除しないかたちで許容領域を切除する不等式であり，*Gomory cut* などがよく知られている．一方で，ここで導入する強い妥当不等式は，最も直近の許容解あるいはその他の許容解をも排除することがままあるものである．ただし，現在の解が最適でない限り，あらゆる最適解を排除しないことを保証するものである．従って，通常の妥当不等式より許容領域を狭めることができる．より具体的には，ある不等式が強い妥当不等式であるとは,

1. その不等式を追加することによって緩和マスター問題の任意の最適解を排除しない
2. 現在の解が最適である

のいずれかを満たすものであると定義される.

命題 1. 問題 [Benders/R-Master] における任意の *Benders cut:*

$$\gamma \leq \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right]$$

ついて，により提案された $(\hat{\mathbf{y}}^s)^T \mathbf{s}^r \geq 1$ はマスター問題 [Benders/Master] に対する強い妥当不等式である.

証明. Israeli and Wood[10)]に従って行う．Z^r は非空であるとし，ある許容解ペア $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}})$ が *Benders cut:*

$$\gamma \le \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right]$$

を生成したとする．ここで，

$$\hat{\gamma} = \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \hat{\mathbf{s}}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right] \tag{41}$$

であるとしよう．もし，現在の解が最適ならば，それは強い妥当不等式である．続いて，それ以外の場合 $\underline{\gamma} < \gamma^*$ を考えよう．$(\gamma^*, \mathbf{z}^*)$ をマスター問題 [Benders/Master] の最適解とすると，$(\hat{\mathbf{y}}^s(n))^T \mathbf{s}^{r*} = 0$ あるいは $(\hat{\mathbf{y}}^s(n))^T \mathbf{s}^{r*} \ge 1$ が成り立つ[1]．$(\hat{\mathbf{y}}^s(n))^T \mathbf{s}^{r*} = 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\gamma^* &\le \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(\mathbf{c}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_o^r + (q_{\max}^r \mathbf{s}^{r*})^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right] \quad \forall \hat{\mathbf{y}}^r \in \hat{Y}^r, \\
&= \hat{\gamma} + \sum_{r=0}^{|R|-1} \left[(q_{\max}^r \mathbf{s}^{r*})^T \hat{\mathbf{y}}_s^r - (q_{\max}^r \hat{\mathbf{s}}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \right] \\
&\le \hat{\gamma} \ \ (\because \ (q_{\max}^r \mathbf{s}^{r*})^T \hat{\mathbf{y}}_s^r = 0 \text{ and } (q_{\max}^r \hat{\mathbf{s}}^r)^T \hat{\mathbf{y}}_s^r \ge 0) \\
&\le \underline{\gamma} \\
&< \gamma^*
\end{aligned}$$

が成立する．最後から 2 番目の行は $\hat{\mathbf{s}}^r$ が必ずしも現在の最適解である必要がないため成立する．最後の行は $\underline{\gamma} < \gamma^*$ の仮定によるが，矛盾が生じる．従って，任意の最適解 $(\gamma^*, \mathbf{z}^*)$ に対して，$(\hat{\mathbf{y}}^s)^T \mathbf{s}^{r*} \ge 1$ が成立しなければならない（証明終）．

この強い妥当不等式は，各道路 r について，サブ問題を解くことにより得られた VT の最短経路に含まれる信号リンクのうち，少なくとも 1 つのリンクを青にする（i.e., $s_{ij}^r = 1$）ことを要求するものであり，集合被覆制約となっている．

b) 集合被覆ヒューリスティクス

Benders 分解において，緩和マスター問題は 1 つの連続変数を持つ混合整数計画問題であり，解くことが一般に難しい．前節では，緩和マスター問題を解く iteration 数を減らすために，強い制約条件を追加する手法（i.e., 速やかに許容領域を狭める手法）を示した．ただし，各回の緩和マスター問題は制約数の増加にともない解くことが難しくなるというトレード・オフ関係がある．

本節では，全く異なるアプローチを示す．これは，緩和マスター問題を解くのではなく，ヒューリスティクスにより新たな信号パターンを生成するものである．いま，ある信号パターン $\hat{\mathbf{z}}$ に対して，サブ問題を解くことにより最適な応答 $\hat{\mathbf{y}}$ が得られたとしよう．命題 1 で示した強い妥当不等式は，サブ問題を解くことにより得られた VT の最短経路に含まれる信号リンクのうち，少なくとも 1 つのリンクを青にすることを要求するものであったが，ここでは最短経路に含まれる信号リンクのうち，赤であったリンク（i.e., $s_{ij}^r = 0$）を考えよう．このようなリンク $\tilde{\mathbf{y}}_s^r$ は，

$$\tilde{\mathbf{y}}_s^r = \mathrm{diag}(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{s}}^r) \hat{\mathbf{y}}_s^r \tag{42}$$

と表すことができる．また，このリンクのうち 1 つのリンクを青にすることを要求する制約は $(\tilde{\mathbf{y}}_s^r)^T \mathbf{s}^r \ge 1$ と書くことができ，この不等式も集合被覆制約である．

Israeli and Wood[10)]は，この制約を用いて緩和マスター問題が以下の集合被覆ヒューリスティクスに置き換えたアルゴリズムを提案している．

[Set-Covering]

$$\text{Find} \quad \mathbf{z} \in Z \tag{43}$$

$$\text{subject to} \quad (\tilde{\mathbf{y}}_s^r)^T \mathbf{s}^r \ge 1 \qquad \forall r \in R, \ (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) \in \hat{Y}\hat{Z} \tag{44}$$

ここで，$\hat{Y}\hat{Z}$ はこれまで生成された $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}})$ の集合である．この問題は，これまでの iteration の VT 最短経路が次の iteration におけるサブ問題での最短経路にならないことを担保する信号パターンを探索するものである．すなわち，これまでの最短経路について信号が赤になっているリンクの少なくとも 1 つを青にする（i.e., コストを上げる）パターンを探索している．この問題は，問題が解なしになるまで，新たな信号パターンを生成する．また，解なしとなったとき，それまでに見つかった最善のパターンが最適であることが証明されている．さらに，Israeli and Wood[10)]は，この問題を効率的に解く線形計画問題を示している．ただし，この手法が適用できるのは，変数 $\mathbf{z}$ に対する制約 Z が予算制約型（$\mathbf{r}^T \mathbf{z} \le r_0$）の非常に簡単な場合のみに限られている．従って，このヒューリスティクスを効果的に適用するためには，制約 Z がフロー保存則である場合の問題 [Set-Covering] に対する効率的解法の構築が必要である．

4. 解法 II：アニーリング法

本論が対象とする最適信号制御問題は，信号の "オン・オフ" パターンを変数する混合整数計画問題であり，現実的な分析対象時間を設定した場合には組合せ爆発によって実時間で厳密解を得ることが困難となる．そのため，実適用を念頭に置いた際には，何らかの近似解法を検討することが必須となる．本章では，メタヒューリスティクスの 1 種であるアニーリング法 (simulated annealing, 以下 SA 法)[12),13),14)]を適用する．SA 法は，物性物理学における焼き鈍し (熱浴)[2]のアナロジーを援用した確率的解法であり，工学分野で広く適用されている．近年で

[1] 両変数とも非負かつ 0-1 であるため．

[2] 焼き鈍しとは，高エネルギー状態 (高温状態) から熱平衡状態に達するまで徐々に冷却することで，以前よりも優れた基底状態 (低温状態) に遷移させる方法である．(e.g., 金属加工)

は，量子統計力学と融合させた量子アニーリング法[15]が注目を浴びており，未だに有用な解法として発展を続けている．SA 法を用いる利点は，他のメタヒューリスティクスと比較して，単純明快なアイディアに基づいているため理解・実装が容易であり，ほぼ全ての数理計画問題に対応可能な高い汎用性を有している点にある．さらに重要な利点として，他の多くの手法では解候補の探索が確定的メカニズムで実行されるのに対して，SA 法では確率的な遷移を導入することで，局所最適解から脱出して大域最適解に収束することが証明されており，ある程度の計算時間をかければ高精度な解が求まる可能性が高い点にある．

(1) SA 法の概要

SA 法をはじめとするメタヒューリスティクス解法は，基本的には近傍探索と解の評価を繰り返す操作ににより構成されている．近傍とは，実行可能解 $x \in \mathcal{F}$ に対して変形操作を加えることによって得られる解集合 $N(x) \subset \mathcal{F}$ を意味する．分析者が問題に応じて近傍を適切に設計する事により多様な組合せ最適化問題に対応可能となる．解の評価では，解 x と近傍を探索することで得られた新たな解 x' を評価関数 f を用いて比較を行い，改善時には解 x' を採択し，改悪時には棄却する．SA 法では先述したとおり "焼き鈍し" のアナロジーを援用した確率的な評価を実行しており，具体的には，現在の解 x の近傍 $N(x)$ から得られた解候補 x' に対して，評価値の善し悪しに応じた遷移確率に従って次の解を選択する．そのため，たとえ改悪解であっても遷移確率に従って採択する事で局所最適解から脱出可能である点が SA 法の大きな特徴である．温度 t における解の遷移確率は x と x' の評価値の差分 $\Delta := f(x') - f(x)$ を用いて以下のように表される．

$$\Delta = \begin{cases} 1 & \Delta \leq 0 \\ e^{-\frac{\Delta}{t}} & \Delta > 0 \end{cases} \tag{45}$$

解候補 x' が改善解 $(\Delta \leq 0)$ ならば確率 1 で新たな解として受理し，一方，改悪解 $(\Delta > 0)$ であってもボルツマン分布に従う遷移確率式に基づいて受理される．また，温度 t が高い初期状態では改善・改悪，さらには Δ の大小を問わず全ての解候補が等確率 (i.e., ランダム) で採択されるが，温度が低い状態では基底状態に近い状況にあると想定されるため改悪解が受理されにくい構造となっている事が確認できる．

(2) SA 法の適用法

2 章にて示した最適信号制御問題 (1) を対象として具体的な SA 法の適用法を考える．これまでに示した内容を踏まえると手順は以下のようにまとめられる:

Step 0（初期設定） 初期実行可能解として信号制御パターン $\mathbf{z}^{(0)}$ を生成する．また，初期温度 $t^{(0)}$ に設定し，繰り返し計算回数 $m := 0$ とする．

Step 1（近傍探索） $\mathbf{z}^{(\mathbf{m})}$ の近傍内から解候補 $\mathbf{z}'$ を探索する．なお，近傍内に複数の解候補が存在する場合には，ランダムに 1 つの解候補を選択する．

Step 2（確率的選択） 解候補 $\mathbf{z}'$ に対して式 45 に基づいて遷移確率を算出する．解候補 $\mathbf{z}'$ が受理される場合には，$\mathbf{z}^{(m)} := \mathbf{z}'$ として解を更新する．

Step 3（終了判定） 任意の終了条件件が満たされた時は，収束したと見なして計算を打ち切る．

Step 4（温度更新） 繰り返し計算回数を $m = m + 1$ とし，温度を冷却関数に基づいて $t^{(m+1)}$ に更新する．その上で Step 1 に戻る．

この手順により，最適な信号制御パターン $\mathbf{z}^*$ を得ることが可能となるが，幾つかの条件設定やパラメータチューニングが必要となる．これらは分析者が問題に応じて独自に設計し，事前実験を踏まえて決定する必要がある．以下に具体的な設定方針を整理する．

a) 近傍設計

メタヒューリスティクスにおける近傍は，分析者によって自由に設計することが出来るため，汎用性が高い反面，性能に大きな影響を及ぼす．本論では，信号パターンのみを未知変数とした問題 (1) が最長経路問題の構造を持つことを活用する．つまり，現在の信号パターンに応じて VT で決まるリンクコストを用いた最長経路問題に基づく近傍設計法を提案する．具体的には，信号ネットワークはサイクルを含まない有向グラフであるので，コストを負とした最短経路問題を解いて初期実行可能解を生成し，得られた解に対してランダムに一部のリンクを交換もしくは反転することで新たな解候補を生成する．この近傍設計案の有効性については，数値実験を踏まえて確認をする必要がある．

b) 初期温度

基本的には，十分に大きな値を初期温度として設定すれば良い．しかしながら，あまりにも大きな値を設定すると全ての解が受理されるため収束が緩慢となる．そのため，対象とする最適化問題に応じた適切な値を設定する必要がある．簡便な方法として，先に示した近傍から複数の信号制御パターンを生成し，それらが受理される確率が一定以上となる温度を初期温度として設定する．

c) 温度更新

温度は，解の遷移確率を算出するに当たって重要な要素であり，解の精度と計算時間のトレードオフ関係を加味した上で適切な温度現象関数を設定する必要がある．一般的な SA 法では，以下に示す幾何冷却関数が

単純かつ実用的な方法として広く用いられている．

$$t^{m+1} := \beta_{temp} t^m \tag{46}$$

ここで，β_{temp} は冷却速度パラメータであり，経験的には 0.8 から 1.0 の間で設定されることが多い．詳細な値については，初期温度と合わせて事前実験により設定することが望ましい．また，他の冷却関数として，対数冷却関数も広く使われているが，温度減少が緩慢であるため実用性に劣るとの指摘がされており，本論では幾何冷却関数を採用する．

5. 解法 III：Cross-Entropy 法

本章では，対象問題を Cross-Entropy（CE）法[16),17)]を活用して解くことを考える．組み合わせ最適化問題の解法としての CE 法とは，ある確率分布に従って解候補を生成し，優れた解ほど高い確率で生成されるように（Cross-Entropy を最小化するように）確率分布を更新するというものである．

CE 法の利点は，前章で示した SA 法と異なり，そのアルゴリズム設計において任意性がほとんどない点である．すなわち，多くの近似解法において一般的に労力がかかる，問題に応じた解の改訂ルールの設計，状態近傍の設定，あるいは，パラメータ・チューニング等はほとんど必要がない．そのため，実装することが非常に容易である．また，今回対象としている問題においては，信号パターンがネットワーク上の経路になっているという特徴がある．ネットワーク上の最適な経路を決定する問題では，CE 法のサンプル生成過程において許容解を効率よく生成することができるため，CE 法は有効なアプローチであると考えられる．

(1) CE 法の概要

対象とする最適信号制御問題は概念的には以下数理最適化問題として定式化された：

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} .\, D(\mathbf{z}) \tag{47}$$

ここでは，最適交通信号制御問題を信号パターン $\mathbf{z}$ のみを変数とする問題として扱っている．CE 法では，この問題 (47) を以下の確率 (49) を推定する問題に帰着させる．

$$l(\gamma, \mathbf{P}) = \mathbb{P}_{\mathbf{P}}(D(\mathbf{Z}) \leq \gamma) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[I_{[D(\mathbf{Z})\leq\gamma]}] \tag{48}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} I_{[D(\mathbf{z})\leq\gamma]} f(\mathbf{z};\mathbf{P}) \tag{49}$$

ここで，$l(\gamma,\mathbf{P})$ は，ある確率密度パラメータ $\mathbf{P}\in\mathcal{P}$ のもとで，確率密度関数 $f(\cdot;\mathbf{P})$ に従う確率変数（信号制御パターン）$\mathbf{Z}$ が許容水準 γ と同じかそれより小さい目的関数を実現する確率である．$\mathcal{P}$ は確率パラメータの許容集合である．最適化問題 (47) を解くことは，この許容水準を最適化問題 (47) の最適値 γ^* としたときの推定問題 (49) を解くことと等価である．

しかし，許容領域を満たす信号制御パターンは膨大であるため，この推定問題 (49) は $D(\mathbf{z})$ が最小になるという非常に希少な事象の確率を推定する問題になる．そこで，CE 法では $I_{[D(\mathbf{z})\leq\gamma^*]}$ が希少事象とならないように，人工的な密度 $g(\cdot)$ を用いた重点サンプリングに基づく推定法を採用する．そして，理想的な重点サンプリング密度 g^*（i.e., ほとんど 1 の確率で最適解を生成する確率密度）と確率密度 $f(\cdot;\mathbf{P})$ の *Kullback-Leibler*（KL）距離（あるいは Cross-Entropy）を最小化するようにパラメータ $\mathbf{P}$ を決定する．

KL 距離を最小化するようなパラメータ $\mathbf{P}^*$ は，

$$\mathbf{P}^* = \arg\max_{\mathbf{P}} \sum_{\mathbf{z}} I_{[D(\mathbf{z})\leq\gamma]} f(\mathbf{z};\mathbf{P}) \ln f(\mathbf{z};\mathbf{P}) \tag{50}$$

と与えられるが，全ての $\mathbf{z}$ を数え上げるのは不可能であるので，ある確率分布 $f(\cdot;\mathbf{P})$ に従って生成されたサンプル $\mathbf{Z}_1,\cdots,\mathbf{Z}_k,\cdots,\mathbf{Z}_N$ を用いて，$\mathbf{P}^*$ を推定する：

$$\hat{\mathbf{P}}^* = \arg\max_{\mathbf{P}} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I_{[D(\mathbf{Z}_k)\leq\gamma]} \ln f(\mathbf{Z}_k;\mathbf{P}) \tag{51}$$

この $\hat{\mathbf{P}}^*$ で確率パラメータ $\mathbf{P}$ を更新し，その確率密度関数に従って新たな信号制御パターンのサンプルを生成していくことで，より最適解に近い解が得られる．

(2) CE 法の適用法

本節では，対象とする信号制御問題へと CE 法を適用する具体的な方法を示す．CE 法を適用する際に特定化する必要があるのは，

- パラメータ $\mathbf{P}$ をどのように更新するか？
- 確率分布 f に従ってどのように許容解を生成するか[3]？

の 2 点である．以下ではこれらの点について見ていこう．

本研究で対象とする問題の解である信号パターンは各交差点 r 毎の信号ネットワーク上の経路で与えられる．従って，確率密度 $f(\mathbf{z};\mathbf{P})$ は各道路 r 毎の経路 $\mathbf{z}^r$ が生成される確率 P^r を用いて

$$f(\mathbf{z};\mathbf{P}) = \prod_r P^r \tag{52}$$

さらに，信号ネットワーク上のマルコフ連鎖を考えれば，推移確率行列 $\mathbf{P}^r$ を用いて，

$$f(\mathbf{z};\mathbf{P}) = \prod_r \sum_{ij} p^r_{ij} \delta_{ij,\mathbf{z}^r} \tag{53}$$

と表すことができる．ここで，p^r_{ij} は交差点 r の推移確率行列の要素，$\delta_{ij,\mathbf{z}^r}$ は交差点 r の経路 $\mathbf{z}^r$ にリンク (i,j)

[3] 制約を考慮せずに解候補を生成し，許容解を満たさないものについては目的関数を ∞ にする方法も採用可能であるが，無駄となるサンプルが大量に発生しうるため効率的ではない．

が含まれていれば1，それ以外は0をとるリンク・経路接続行列である．

推移確率行列は，各列の合計が1になる必要があるため，確率パラメータ $\mathbf{P}$ の推定問題は，

$$\max_{\mathbf{P}} . \ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I_{[D(\mathbf{Z}_k)\le\gamma]} \ln \prod_r \sum_{ij} p_{ij}^r \delta_{ij,\mathbf{Z}_k^r} \tag{54}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_j p_{ij}^r = 1 \qquad \forall r \in R \tag{55}$$

となる．この問題をラグランジュの未定乗数法で解くことにより，p_{ij}^r の推定値は以下のように与えられる：

$$\hat{p}_{ij}^r = \frac{\sum_{k=1}^{N} I_{[D(\mathbf{Z}_k\le\gamma)]}\delta_{ij,\mathbf{Z}_k^r}}{\sum_{k=1}^{N} I_{[D(\mathbf{Z}_k\le\gamma)]}\Delta_{i,\mathbf{Z}_k^r}} \tag{56}$$

ここで，$\Delta_{ij,\mathbf{z}^r}$ は交差点 r の経路 $\mathbf{z}^r$ にノード i が含まれていれば1，それ以外は0をとるノード・経路接続行列である．この式の分母は，N 個のパターンのうちノード i を通り目的関数が許容水準以下となった個数を表しており，分子はその中でノード i からノード j への移動を含んでいるものの個数を表している．

続いて，確率分布 f に従ってどのように許容解を生成するかという点について検討しよう．上記の議論で述べたように，対象とする信号制御問題では，確率分布 f は信号ネットワーク上のマルコフ連鎖の推移確率行列により表すことができた．従って，確率分布に従ったサンプルの生成においても，信号ネットワークのマルコフ連鎖を用いればよい．すなわち，起点から推移確率行列に従って終点に到着するパターンをサンプルとする．明らかにこのサンプルは制約条件（i.e., フロー保存則）を満たしており，これによって，効率的にサンプルを生成することができる．

以上の議論より，本研究におけるCE法の手順は以下のようにまとめられる：

Step 0（初期設定） 信号ネットワーク上の適当な初期確率推移行列 $\mathbf{P}^{(1)}$，生成サンプル数 N，分位点 ρ，収束条件 κ を与え，繰り返し回数 $m = 1$ として開始．

Step 1（サンプル生成） 各道路について確率推移行列 $\mathbf{P}^{(m)}$ を持つマルコフ連鎖によって N 個ずつ信号制御パターンを生成し，それぞれの目的関数値を計算する．サンプルの目的関数値について，ρN 番目に小さい値を許容水準 $\gamma^{(m)}$ とする．

Step 2（確率分布の更新） 許容水準 $\gamma^{(m)} = \cdots = \gamma^{(m-\kappa)}$ となれば，$\mathbf{P}^{(m)}$ を最適確率パラメータとして終了．そうでなければ，許容水準 $\gamma^{(m)}$ を用いた式(56)によって確率パラメータ $\mathbf{P}$ を更新し，$m = m + 1$ として Step 1 に戻る．

この手順により，確率パラメータ $\mathbf{P}^{(m)}$ が最適解のみを極めて高い確率で生起させるようなパラメータ $\mathbf{P}^*$ に収束する．なお，実際にCE法を実施する場合は，式(56)によって求めた確率パラメータを直接新たな確率パラメータ $\mathbf{P}^{(m+1)}$ するのではなく，適当な定数 $\alpha \in (0, 1]$ を用いた重み付き線形和：

$$\mathbf{P}^{(m+1)} = (1-\alpha)\mathbf{P}^{(m)} + \alpha\mathbf{P}^* \tag{57}$$

とする方が，解過程 $\{\mathbf{P}^{(k)}\}$ が局所解にはまり込むことを避けられることが経験的に知られている．

6. おわりに

本研究は，和田等[1)]によって提案された動的交通信号制御問題の解法を提案した．具体的には，厳密解法として(1) Benders の分解原理(BD)に基づく解法，近似解法として(2)アニーリング法(SA)，(3) Cross-Entropy (CE)法に基づく解法を示した．また，提示するそれぞれの解法において問題構造（ネットワーク構造）を活用することで，アルゴリズムの性能改善や実装を容易にすることができることを示した．

なお，本稿では，数値実験による各解法の特性把握や解法間の比較は示していないが，発表会においてはその結果を報告する予定である．

参考文献

1) 和田健太郎・瀧川翼・桑原雅夫: ネットワーク・モデリングによる動的交通信号制御の最適化, 投稿中, 2014.
2) Newell, G. F.: *Theory of Highway Traffic Signals*, Research Report UCB-ITS-RR-89-7, University of California, Berkeley, Institute of Transportation Studies, 1989.
3) Gazis, D. C.: Optimum control of a system of oversaturated intersections, *Operations Research*, Vol.12, No.6, pp.815–831, 1964.
4) Lo, H. K.: A novel traffic signal control formulation, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol.33, No.6, pp.433–448, 1999.
5) Lo, H. K.: A cell-based traffic control formulation: Strategies and benefits of dynamic timing plans, *Transportation Science*, Vol.35, No.2, pp.148–164, 2001.
6) Lo, H. K., Chang, E., and Chan, Y. C.: Dynamic network traffic control, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol.35, No.8, pp.721–744, 2001.
7) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.28, No.4, pp.269–287, 1994.
8) 瀧川翼・和田健太郎・桑原雅夫: 動的信号制御のネットワーク設計問題としての定式化, 土木計画学研究・講演集, Vol. 48, pp. 271(CD–ROM), 2013.
9) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.39, No.2, pp.187–196, 2005.
10) Israeli, E. and Wood, R. K.: Shortest-path network interdiction, *Networks*, Vol.40, pp.97–111, 2002.
11) Benders, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik*, Vol.4, pp.238–252, 1962.
12) Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P., et al.: Op-

timization by simmulated annealing, *science*, Vol.220, No.4598, pp.671–680, 1983.
13) Hromkovic, J.: *Algorithmics for hard problems: introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics*, Springer-Verlag, 2010.
14) 柳浦睦憲・茨木俊秀: 組合せ最適化-メタ戦略を中心として-, 朝倉書店, 2001.
15) Kadowaki, T. and Nishimori, H.: Quantum annealing in the transverse ising model, *Physical Review E*, Vol.58, No.5, pp.5355, 1998.
16) Rubinstein, R.: The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization, *Methodology and computing in applied probability*, Vol.1, No.2, pp.127—-190, 1999.
17) de Boer, P.-T., Kroese, D. P., Mannor, S., and Rubinstein, R. Y.: A tutorial on the cross-entropy method, *Annals of Operations Research*, Vol.134, No.1, pp.19–67, 2005.

(2014. 8. 1 受付**)**

Solution methods for a dynamic traffic signal control problem

Kentaro WADA, Hideki YAGINUMA and Kento USUI