

判定基準変更を考慮した 隠れマルコフ劣化モデル

山田洋太¹・水谷大二郎²・貝戸清之³・小林潔司⁴

¹学生員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: y.yamada@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²学生員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

⁴フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

近年、社会基盤施設に対する統計的劣化予測手法が急速な発展を遂げている。これらの劣化予測手法では、劣化の進展を離散的な健全度で評価した点検データを用いることが多い。しかし、劣化に対し健全度を判定する際の基準（以下、判定基準）が、当該施設の使用期間中に変更される場合がある。その場合、従来の統計的劣化予測手法を適用することはできない。本研究では、判定基準変更前後の健全度（以下、新基準健全度、旧基準健全度）の対応関係をモデル化し、新基準健全度で定義されるマルコフ劣化モデルとの混合モデルとして、隠れマルコフ劣化モデルを提案する。また、同モデルをMCMC法によりベイズ推計する方法論を提案し、トンネル内灯具を対象とした適用事例を通じて、実務への適用可能性と有効性について考察する。

Key Words : *hidden Markov deterioration model, visual inspection criterion, mixed model*

1. はじめに

近年、社会基盤施設の劣化予測手法として統計的予測モデルを用いる手法が急速に発展を遂げている。統計的劣化予測においては、劣化の進展を離散的な健全度で評価した点検データが多く用いられる。このような統計的劣化予測手法の中でも、複数の指数ハザードモデルの多重化によりマルコフ推移確率を表現したマルコフ劣化ハザードモデル¹⁾の開発により、健全度評価に基づいた劣化予測の精度が大幅に向上した。統計的手法による劣化予測を用いて、ライフサイクル費用評価や点検・補修・更新戦略の策定の合理化が可能になった。

マルコフ劣化ハザードモデルを推計するためには、複数時点にわたる点検結果に基づいた対象構造物の健全度評価結果に関する（少なくとも2時点以上の）時系列データが必要となる。また、構造物の老朽化に対する問題意識が増加することにより、劣化状態のより詳細な把握のための健全度の細分化、健全度区分の簡略化による維持管理体制の効率化など、アセットマネジメントの体制が改善される場合も少なくない。マルコフ劣化ハザードモデルの推計精度を向上するためには、同一構造物に対して可能な限り数多くの健全度に関する点検結果が蓄積していることが望ましい。しかしながら、観測期間内に対象構造物の健全度判定基準が改

正された場合、新・旧基準という異なる基準で観測された観測データをマルコフ劣化ハザードモデル推計に活用できないという問題が発生する。時間とともに構造物の劣化が進行するために、新基準で観測された観測データには、ともすれば劣化が進行した段階（旧基準では逆に劣化初期の段階）に関するサンプルデータが相対的に偏在するというサンプル欠損²⁾が発生する。

本研究では、構造物の劣化過程の観測期間中に、健全度の判定基準の見直しが実施されたような点検データベースに基づいてマルコフ劣化ハザードモデルを推計する方法論を開発する。判定基準が見直された時点（見直し時点と呼ぶ）より以前の段階では旧基準を、以降の時点において新基準を用いた健全度データが獲得できる。したがって、見直し時点より以前の時点では、旧基準で観測された健全度を新基準を用いた健全度に確定的に変換できないという問題が生じうる。しかしながら、旧基準による観測結果は、誤差要因を含んではいるが、新基準を用いた健全度に関する部分的な情報を提供することは可能である。本研究では、このような旧基準と新基準の間の非確定的な関係を確率的対応モデルで表現する。その上で、旧基準健全度の点検データの背後に新基準健全度の点検データが隠れている状態を表現する隠れマルコフ過程を内包したマルコフ劣化ハザードモデルを定式化する。さらに、マルコ

フ連鎖モンテカルロ法（以下、MCMC法）を用いて、隠れマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推計する方法論を開発する。

以上の問題意識に基づいて、本研究では観測期間中に健全度判定基準の見直しを実施された場合を対象として、構造物の劣化過程を統一的に新基準を用いたマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現する方法論を開発する。本研究で提案する方法論の開発によって、1) 旧基準健全度と新基準健全度の対応関係を計量化することが可能となり、2) 新・旧健全度を用いた点検データに含まれるサンプル欠損の問題を回避し、マルコフ劣化ハザードモデルの推計バイアスを補正することが可能となる。以下、2. で本研究の基本的な考え方を説明する。3. では旧、新基準健全度の対応関係をモデル化する。4. では判定基準の見直しが起こる場合の劣化過程を隠れマルコフ劣化ハザードモデルを用いて定式化する。5. では隠れマルコフ劣化ハザードを推計する方法論を提案する。6. では高速道路トンネル内灯具を対象とした実証分析について考察する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 既往研究の概要

社会基盤施設の劣化予測に関しては、数多くの研究事例がある。多段階の離散的な健全度情報が入手可能な場合には、マルコフ推移確率を用いて劣化過程をモデル化することが可能である。米国の標準的な橋梁マネジメントシステムの1つであるPONTIS³⁾などの劣化予測においても数多くのマルコフ推移確率の採用実績がある。その理由としては、算出されたマルコフ推移確率とマルコフ決定モデルを用いることにより、将来時点での構造物の健全度推移を容易に表現できる点があげられる。マルコフ推移確率の算出方法として、1) 集計的推計方法と、2) 非集計的推計方法が存在する。集計的方法は、数え上げ法などにより、マルコフ推移確率を算出する方法である⁴⁾。一方、指数ハザードモデルを用いてマルコフ推移確率を表現するマルコフ劣化ハザードモデルの開発により、多段階の健全度データを用いた劣化予測技術は大幅に高度化された。

マルコフ劣化ハザードモデルの開発以降、マルコフ劣化ハザードモデルを応用したモデルが数多く開発されている。まず、小林等²⁾は、マルコフ劣化ハザードモデルの推計の際に、予防補修により測定データが欠損することにより生じるサンプル欠損バイアスを補正する方法論を提案した。また、貝戸等⁷⁾は、複数の劣化事象と多段階の離散的な健全度を用いて表現される劣化過程に対して、水平的・垂直的な劣化の進行過程を表現する階層型指数劣化ハザードモデルを提案している。さ

らに、林等⁵⁾は、複数の劣化事象の内、最も劣化の進展した健全度の推移を表現するために競合的劣化ハザードモデルを開発している。さらに、小濱等⁶⁾により、対象構造物群を複数の施設グループに分割し、グループ毎の劣化過程の差異を不可観測要因による異質性として捉え、施設グループ単位での劣化ハザード率を推計するための混合マルコフ劣化ハザードモデルが開発されている。さらに、これらの劣化予測モデルの推計手法としても、マルコフ劣化ハザードモデル開発当時の最尤推計法に加え、ベイズ推計法⁷⁾を用いた方法論⁸⁾も開発され、経験的知見の推計への反映や、劣化予測結果の信頼性評価などが可能となっている。しかし、以上の方法はいずれも、判定基準が全ての点検時点において共通している点検データベースに対する適用を前提としている。しかし、本研究の適用事例をはじめとして、判定基準が見直される事例も少なくない。本研究では判定基準の変化を考慮した劣化予測モデルを、隠れマルコフ劣化モデルによってモデル化することを目的とする。このように、健全度の判定基準の変化に着目し、判定基準変更前後での点検データを統合的に用いることを可能とする方法論は、著者の知る限り過去には提案されていない。統計的劣化予測ではサンプル数の多寡が推定精度に大きな影響を及ぼす。本研究の成果は、1) すでに判定基準の見直しを実施した管理者においては新旧基準の点検データを有効活用すること、2) 点検データを統計的劣化予測に活用していく過程で判定基準の見直しが必要となる可能性がある管理者においては、積極的な見直しを支援すること、が可能となり、実務への貢献が大きいものと考えられる。

(2) 判定基準変更と対応関係

社会基盤施設を管理するにあたって、点検のための判定基準が設定されている場合が多い。しかし、判定基準は、管理目標の見直しや重大事故の発生などにより、長期に亘る施設管理期間内に変更される場合もある。本研究の適用事例で用いるNEXCO所管の高速道路照明灯具（以下、灯具）の判定基準を表-1、表-2に示している。当該灯具データに関しては、従来、4段階の健全度評価がなされていたが、2009年度に判定基準が変更され、現在では5段階の健全度評価がなされている⁹⁾。また、灯具以外に、NEXCOの場合、舗装、橋梁、トンネル等では、平成13年まで4段階で健全度評価がなされていたが、2001年に5段階、2005年に9段階、2012年に8段階にそれぞれ健全度の判定基準が見直されている¹⁰⁾。

本研究で対象とする灯具の場合、旧基準健全度のB判定が新基準健全度ではB判定とC判定に2分化されている。このような健全度の判定区分の細分化により、

表-1 健全度判定基準（旧基準：2008年度以前）

判定	健全度	判定内容
OK	1	損傷等がない場合
B	2	腐食、損傷等はあるが、機能低下が見られず、損傷の進行状態を継続的に観察する必要がある場合
A	3	腐食、損傷等があり、機能低下がみられ補修が必要であるが、緊急補修を要しない場合
AA		腐食損傷等が著しく、機能面からみて緊急補修が必要である場合

よりきめ細かな灯具の維持補修マネジメントを実施することが可能となる。しかし、新基準健全度による判定に移行して日も浅く、灯具の耐用年数を考慮すれば、新基準健全度を用いて劣化予測過程全体をマルコフ劣化ハザードモデルを推計できるほど健全度データが蓄積されているとは言い難い。一方で、旧基準健全度による判定結果を用いてモデルを推計することも可能であるが、このようなモデルを用いるだけでは、判定基準を細分化したマネジメント上の課題に 대응することは不可能である。このような状況に対応するには、旧基準健全度と新基準健全度を用いて観測された点検結果の双方をプールして、新基準健全度を用いてマルコフ劣化ハザードモデルを推計する方法論を開発することが望ましい。さらに、見直し時点以前と以後において、対象とする構造物の劣化状態の分布に明らかな偏りが存在する場合、**2.(3)** で言及するようなサンプル欠損が存在する。このような場合、見直し時点以前、もしくは以後の点検データを用いてマルコフ劣化ハザードモデルを推計した場合、サンプル欠損による推計バイアスが発生することになる。このような問題を回避するためには、判定基準変更前後の健全度の対応関係を明示的に表現したのちに、獲得された点検データを統合的に用いるための方法論の開発が必要となる。

(3) マクロ対応モデル

表-1、表-2 に示す事例の場合、旧基準の OK, A, AA は、新基準における OK, A, AA と対応する。一方、旧基準健全度 B は、理論的には新基準健全度の B, あるいは C と対応する。旧基準 B という観測結果を獲得できた場合、それが新基準 B, C のいずれかに該当するという部分的情報を用いることにより、モデルの推計精度を向上することが可能となる。表-1、表-2 の場合、旧基準健全度 B が新基準 B, C に細分化されるという情報は既知であり、新・旧基準の対応関係は確定的である。さらに、点検の実務的観点に基づけば、判定基準

表-2 健全度判定基準（新基準 2009年度以降）

判定	健全度	判定内容
OK	1	損傷等がない場合
C	2	腐食、損傷等が初期状態である場合
B	3	腐食、損傷等はあるが、機能低下が見られず、損傷の進行状態を継続的に観察する必要がある場合
A	4	腐食、損傷等があり、機能低下がみられ補修が必要であるが、緊急補修を要しない場合
AA		腐食損傷等が著しく、機能面からみて緊急補修が必要である場合

が表-1、表-2 に示すように定性的表現で記述されているために、判定基準の見直しの前後において、健全度の解釈に差異が発生する可能性もある。例えば、旧基準において健全度が OK と判断されていた事象が、新基準を用いた場合に健全度 C と判断されることもある。このような解釈の変化により、旧基準において OK（あるいは A）と判断されていた事象が新基準を用いて健全度 B と判断されることもある。このような健全度解釈の誤差を考慮した場合、新基準と旧基準の対応関係を多様に想定することができる。隠れマルコフ劣化ハザードモデルを推計する場合、このような健全度の解釈に関してありうべき誤差を考慮し、新・旧基準の間に存在する対応構造を図-1 に示すようにモデル化する。このような新・旧基準の間に成立する対応構造をマクロ対応モデルと呼ぶ。一般に、マクロ対応モデルとして図-1 の例のように複数個想定することができるが、マクロ対応モデルが異なれば、隠れマルコフ劣化ハザードモデルの推計結果も異なる。さらに、マクロ対応モデルを与件と考えても、例えば旧基準で健全度 B であると判定されたサンプルが、新基準の B, C のいずれに該当するかについては確定的に決定できない。本研究では、マクロ対応モデルを所与として、旧基準健全度と新基準健全度の関係を確率的に表現することとするが、このような新・旧基準の健全度間の対応関係をミクロ対応モデルと呼ぶ。なお、本研究では、新・旧基準間のマクロ対応モデルを与件として複数個想定し、隠れマルコフ劣化ハザードモデルを推計する。その中で、最終的に推計精度等を考慮して、最終的にマクロ対応モデルを選択するというアプローチを採用する。

(4) サンプル欠損バイアス

ある時点において判定基準が変更された場合、新・旧基準健全度で観測されるサンプルの劣化水準に偏りが

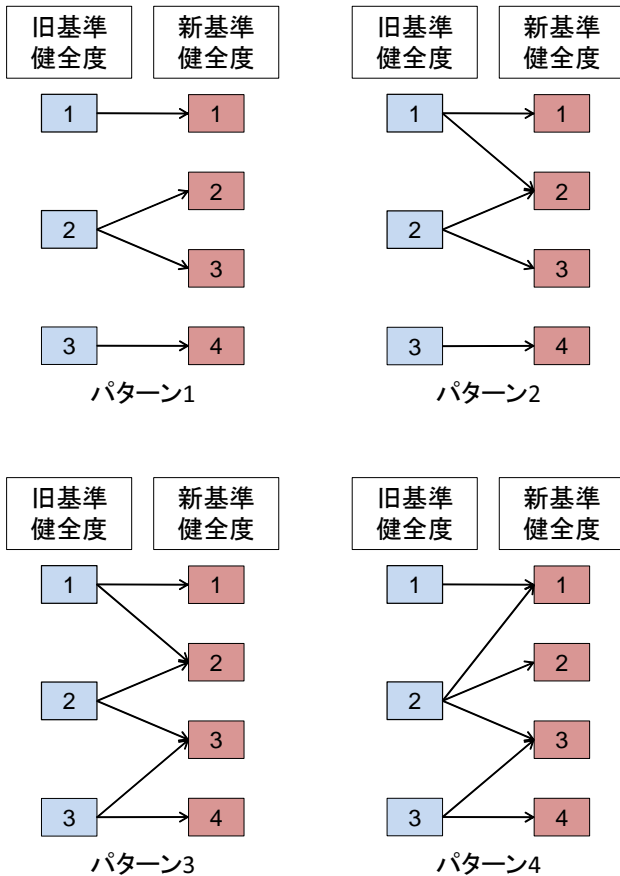


図-1 マクロ対応モデル

発生する可能性がある。各構造物の劣化パスが図-2のように多様に異なる場合を考える。同図において縦軸は健全度、横軸は経過時間を表している。縦軸は下に進むほど劣化が進行している状態を表す。劣化パスは、その傾きが急なほど劣化が早く進展することを表す。図中の時点（見直し時点） t' において健全度の判定基準が旧基準から新基準に切り替わったと考える。議論を簡単にするために、構造物の更新を考えない。対象物の劣化過程を表すマルコフ劣化ハザードモデルを、見直し時点以降に新基準を用いて観測された点検サンプルのみを用いて推定する場合を考える。見直し時点以降に観察されるデータ集合には、相対的に劣化速度の小さい構造物に対する劣化過程サンプルが含まれる。一方、見直し以前の旧基準を用いて観察されたデータ集合には、相対的に劣化速度の大きい構造物の劣化過程サンプルが多く含まれるようになる。このように、判定基準の変更が実施された場合、旧基準（あるいは新基準）のみのサンプルデータを用いて劣化過程を推計する場合、劣化速度の小さい（あるいは大きい）サンプルが系統的に欠損するというサンプル欠損の問題が発生する。サンプル欠損により生じる推計バイア

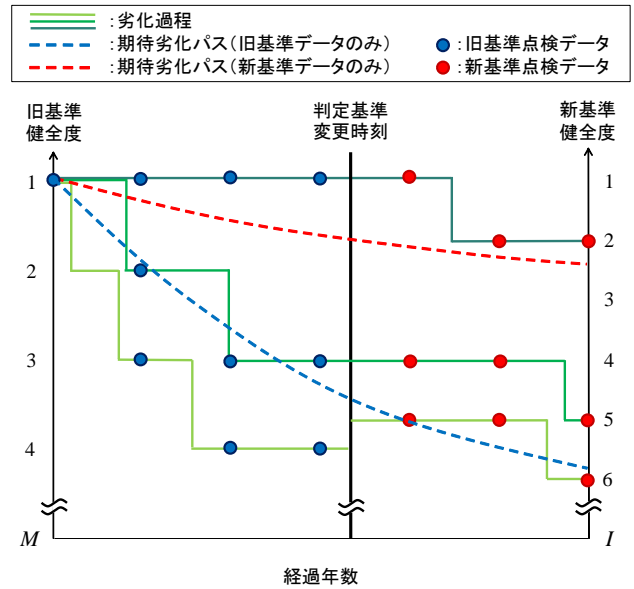


図-2 サンプル欠損バイアス

スを克服するためには、旧・新基準健全度を用いたデータ双方を用いて劣化過程を推計するような方法論が必要となる。

(5) 隠れマルコフ劣化ハザードモデル

本研究では、隠れマルコフ劣化ハザードモデルを用いて、旧基準健全度と新基準健全度間の対応関係を考慮した劣化予測モデルを提案する。すでに、測定される状態変数に誤差が介在するような隠れマルコフ劣化ハザードモデルがいくつか提案されている。小林等¹¹⁾は、マルコフ劣化ハザードモデルの推計に用いる目視点検データ内の健全度の測定誤差に着目し、「見かけの健全度」と「真の健全度」間の関係を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデルを提案している。また、舗装構造の劣化予測を行うために、Nam等¹²⁾は、MCIの劣化過程を表現するマルコフ連鎖の背後にポットホールが発生過程が隠れている状態を表現するポアソン隠れマルコフ劣化モデルを提案している。また、小林等¹³⁾は、舗装の耐荷力の劣化過程を表すマルコフ連鎖が路面の劣化過程を表現するマルコフ連鎖に隠れた状態を表現する階層的隠れマルコフ劣化ハザードモデルを提案している。また、隠れマルコフ劣化ハザードモデルの推計手法としては、ベイズ推計法の1種であるMCMC法を用いて、モデルの未知パラメータと潜在的な状態変数を同時にサンプリングする方法論が提案されている。

見直し時点以前においては、旧基準健全度を用いた点検サンプルのみが利用可能である。旧基準健全度と新基準健全度の間には、確定的な対応関係が存在しない。本研究では、旧基準健全度と新基準健全度の間の

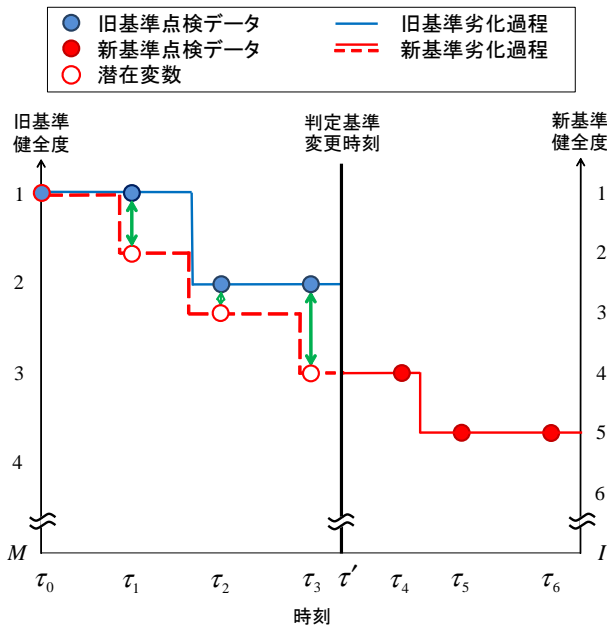


図-3 判定基準の変更と劣化過程

確率的な対応関係を新旧健全度変換モデルを用いて表現する。一方、見直し時点以降では、新基準健全度を用いた点検サンプルを獲得することができる。本研究では、対象構造物の劣化過程を新基準健全度を用いたマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現する。さらに、見直し時点以前の点検サンプルに対して、新旧健全度変換モデルを用いて、旧基準健全度が観測される尤度を定式化するとともに、マルコフ劣化ハザードモデルと新旧健全度変換モデルを同時推計するような方法論を提案することとする。

3. 新旧健全度変換モデル

(1) 多段階健全度評価と判定基準の変更

いま、ある社会基盤施設の劣化状態に関する時系列データが図-3のように獲得されていると考える。同図は、施設が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。現実には、劣化状態は時間軸上の限られた時点で実施される測定を通じてのみ知ることができる。図中、時刻 t はカレンダー上の実時刻を表す。時刻 τ_0 で社会基盤施設の使用が開始された直後から劣化が始まる。この施設の供用開始時刻 τ_0 を起点とする離散時間軸 $\tau = 0, 1, 2, \dots$ を導入し、時間軸上の時点 τ で表す。離散時間軸上の時点 τ' において、 M 段階評価の旧基準が I 段階評価の新基準に変更されたとする。この場合、施設の劣化状態は変更前は M 個、変更後は I 個の健全度で記述される。施設の健全度を表す状態変数を $\tau \leq \tau'$ のとき

i ($i = 1, \dots, I$) で、 $\tau' \leq \tau$ のとき m ($m = 1, \dots, M$) で表現する。施設がもっとも健全な (劣化が進展していない) 状態を $m = 1, i = 1$ で表し、状態変数 m, i の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。 $m = M, i = I$ の場合、当該の施設が使用限界に到達していることを表す。測定は同図における5つの時点 τ_n ($n = 1, \dots, 7$) において実施され、測定者が獲得できる情報は、測定時点における健全度のみであり、健全度が推移した実際の時点に関する情報は得られない。図中ではこの施設の真の劣化過程を、 $\tau \leq \tau'$ では旧基準、 $\tau' \leq \tau$ では新基準の健全度を用いて表示し、それぞれ青実線、赤実線によって示している。

ここで、 $\tau \leq \tau'$ における劣化過程を新基準健全度によって表記し、同図の赤点線のような劣化過程が得られたとする。赤点線の劣化過程は青実線の劣化過程より、劣化の過程をより詳細に記録していることが理解できる。この場合、新基準表示の劣化過程、旧基準表示の劣化過程の間には、同図緑矢印で示すような乖離が存在する。本研究においては、このような乖離を補正し、全点検データに対し新基準を用いた劣化過程を潜在的に定義する。具体的には、獲得された全旧基準点検データに対し、潜在変数 (同図、白点) を仮想的な新基準健全度として条件付き確率に基づいて発生させ、新旧基準間の乖離をモデル化する。このモデル化によって、全点検データを新基準健全度によって表記し、判定基準変更前後の点検データを統合的に用いた劣化予測を行うことが可能となる。

(2) 健全度変換確率

判定基準変更前のある時点 τ における健全度を、かりに新基準健全度 $h(\tau)$ を用いて評価した場合、 $h(\tau) = i$ ($i = 1, \dots, I$) が成立すると考える。しかし、判定基準変更前であるため、新基準健全度 i を直接観測することは不可能であり、時点 τ では旧基準健全度 $g(\tau) = m$ ($m = 1, \dots, M$) が観測されている。旧基準健全度 $g(\tau) = m$ と新基準健全度 $h(\tau) = i$ が1対1に対応していない場合、両者の対応関係を確定的に規定することは不可能であり、両者の対応関係をモデル化することが必要である。

いま、新基準健全度 i ($i = 1, \dots, I$) のそれぞれに対して、それに対応する旧基準健全度の集合を $\omega(i)$ と表す。集合 $\omega(i)$ は旧基準健全度と新基準健全度との対応構造を表現しており、以下ではこのような対応構造をマクロ対応モデルと呼ぶこととする。2.(2) で議論したように、対応構造は旧基準と新基準の間の技術的対応関係を表している。しかしながら、判定基準の変化により健全度判定に関する解釈の変化も生じうる可能性がある。このような健全度解釈の誤差を考慮した場合、

新基準と旧基準の対応関係を多様に想定することができる。本研究では、新・旧基準間のマクロ対応モデルを与件として複数個想定し、その中で隠れマルコフ劣化ハザードモデルの推計精度等を考慮して、最終的にマクロ対応モデルを選択するというアプローチを採用する。以下の議論では、新・旧基準健全度の対応構造を表すマクロ対応モデルを与件として議論を進める。ここで、任意の新基準健全度 $h(\tau) = i$ に着目し、旧基準健全度が m ($m \in \omega(i)$) となる確率 (健全度変換確率と呼ぶ) を、

$$\text{Prob}[g(\tau) = m | h(\tau) = i] = f_i(m | \alpha_i) \quad (1)$$

と表現する。ここに、 $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_b^i)$ は確率分布 $f_i(m | \alpha_i)$ の形を特徴づけるパラメータベクトルである。 α_i の詳細は 3.(3) で説明する。式 (1) は新・旧基準健全度間の確率的対応関係を表したマイクロ対応モデルである。また、確率 $f_i(m | \alpha_i)$ は、

$$\sum_{m \in \omega(i)} f_i(m | \alpha_i) = 1 \quad (2)$$

を満たす。

4. 隠れマルコフ劣化ハザードモデル

(1) マルコフ劣化ハザードモデル

対象とする構造物の新基準健全度を用いた劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現する。いま、2つの時点間における新基準健全度間の推移状態をマルコフ推移確率で表現する。時点 τ_A における新基準健全度を状態変数 $m^*(\tau_A)$ を用いて表す。時点 τ_A における新基準健全度が i ($i = 1, \dots, I$) であれば $h(\tau_A) = i$ と表せる。マルコフ推移確率は、時点 τ_A で測定された新基準健全度 $h^*(\tau_A) = i$ を与件とし、将来時点 (例えば τ_B) において新基準健全度 $h(\tau_B) = j$ が生起する条件付推移確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] = \pi_{ij} \quad (3)$$

と表せる。このような推移確率を新基準健全度ペア (i, j) に対して求めれば、マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を定義できる。マルコフ推移確率 (3) は所与の2つの時点 τ_A, τ_B の間において生じる新基準健全度間の推移確率を示したものであり、当然のことながら、対象とする測定間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$ ($i > j$) が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が

成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} &\geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} &= 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が成立しなければならない。状態 I は、補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立すると考える。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される。マルコフ推移確率モデルでは、新基準健全度が $i-1$ から i に推移した時点に関わらず、測定時点 τ_A から測定時点 τ_B の間に推移する確率は時点 τ_A における新基準健全度のみ依存するという性質 (マルコフ性) を満足する。マルコフ推移確率は、多段階指数ハザードモデル¹⁾を用いて推計できる。多段階指数ハザードモデルの詳細は津田等¹⁾に譲るが、ここでは読者の便宜を図るためモデルの概要を説明しておく。いま、新基準健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の寿命を確率変数 ζ_i で表す。新基準健全度 i の寿命が、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。時点 τ_A における新基準健全度 i であり、そこから時間 y_i が経過した時点で新基準健全度 $i+1$ に到達する確率密度をハザード関数^{16), 17)}を用いて表現する。ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は、供用時間 y_i まで新基準健全度が i のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて、

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (6)$$

と表せる。すなわち、ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は、初期時点から時間 y_i が経過するまで新基準健全度 i の状態が継続したという条件の下で、期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に真の健全度 $i+1$ に進展する条件付確率である。ハザード関数がサンプル時間軸上の時点 y_i に依存せず、常に一定値 $\theta_i > 0$ ($i = 1, \dots, I-1$) をとる場合、指数ハザード関数を次式で表せる。

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \quad (7)$$

指数ハザード関数を用いることにより、劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる。さらに、指数ハザード関数を用いれば、真の健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は、

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i) \quad (8)$$

と表現できる。

サンプル時間軸上の τ_A で、新基準健全度が i であり、かつ時点 τ_A から追加的に z ($z \geq 0$) 以上にわたって新基準健全度 i が継続する確率 $\tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A)$ は、

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A) \\ &= \text{Prob}\{\zeta_i \geq \tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A\} \\ &= \frac{\exp\{-\theta_i(\tau_A + z)\}}{\exp(-\theta_i \tau_A)} \\ &= \exp(-\theta_i z) \end{aligned} \quad (9)$$

と表される。すなわち、測定時点 τ_A において新基準健全度が i と判定され、次の測定時点 $\tau_B = \tau_A + z$ においても新基準健全度が i と判定される確率は、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i] = \exp(-\theta_i z) \quad (10)$$

となる。ただし、 z は2つの測定時点の間隔を表す。確率 $\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{ii}(z)$ に他ならない。指数ハザードを用いた場合、推移確率 $\pi_{ii}(z)$ はハザード関数 θ_i と測定間隔 z のみに依存し、時点 τ_A, τ_B に関する情報を用いなくとも推移確率を推計することが可能となる。以上の議論を拡張し、指数ハザード関数を用いて、測定時点 τ_A と $\tau_B = \tau_A + z$ の間で新基準健全度が i から j ($j > i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ ($i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I$) は、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z) &= \text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{k=i}^j \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I) \end{aligned} \quad (11)$$

と表すことができる¹⁾。ただし、表記上の規則として、

$$\begin{cases} \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} = 1 & (k = i \text{ の時}) \\ \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} = 1 & (k = j \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える。さらに、表記の便宜上、

$$\begin{aligned} &\prod_{m=i, \neq k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &= \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \end{aligned}$$

と簡略化する。また、 π_{iI} に関しては、マルコフ推移確率の条件より次式で表せる。

$$\pi_{iI}(z) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z) \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (12)$$

(2) 隠れマルコフモデル

判定基準変化前においては、構造物の健全度が旧基準で判定されており、新基準健全度を用いて劣化過程を記述することはできない。隠れマルコフ劣化ハザードモデルでは、見直し時点以前では新基準健全度で記述される劣化過程が、旧基準健全度に基づく観測データとして部分的に観測されると考える。いま、時間軸上の時点 τ_A ($\tau_A < \tau'$) において点検が実施され、対象施設の旧基準健全度 $g(\tau_A) = m$ ($m = 1, \dots, M$) が測定されたとする。ただし、 τ' は判定基準の見直し時点を表す。時点 τ_A における新基準健全度の真値が $h(\tau_A) = i$ であると仮定したときに、旧基準健全度 $g(\tau_A) = m$ が観測される確率は $f(m|\alpha_i)$ で表される。

いま、新・旧基準健全度間のマクロ対応モデルを与件と考える。この時、「旧基準健全度 $g(\tau_A) = m$ が観測

される事象」が生起可能となるような旧基準健全度の集合 $\Omega(m)$ を

$$\Omega(m) = \{i | m \in \omega(i), (i = 1, \dots, I)\} \quad (13)$$

と定義する。新基準健全度 $h(\tau_A) = i$ は観測できないが、旧基準健全度 m が観測されることにより、真の新基準健全度 i は集合 $\Omega(m)$ に属しているという情報を獲得することができる。集合 $\Omega(m)$ の濃度(要素数)を $|\omega(m)|$ で表す。旧基準健全度 $g(\tau_A) = m$ が測定される尤度 $\ell(g(\tau_A) = m)$ は

$$\ell(g(\tau_A) = m) = \sum_{i \in \Omega(m)} \rho_i(\tau_A) f(m|\alpha_i) \quad (14)$$

と定義される。ただし、 $\rho_i(\tau_A)$ は時点 τ_A における新基準健全度が i である確率である。したがって、 $\rho_i(\tau_A) f(m|\alpha_i)$ は、互いに排反な $|\Omega(m)|$ 個の原因のうち、原因 i によって事象 $g(\tau_A) = m$ が発生する確率を表している。このように、式(14)は、複数の変換確率 $f(m|\alpha_i)$ を加重平均した確率分布を表しており、混合分布モデル(mixture distribution model)¹⁸⁾と呼ぶ。

つぎに、2つの隣接する測定時点 τ_A, τ_B ($\tau_A < \tau_B$) に着目する。測定時点 τ_A, τ_B と見直し時点 τ' との順序関係により、以下の3つのケースが生起しうる。

$$\begin{cases} \text{ケース 1} & \tau_A < \tau_B \leq \tau' \\ \text{ケース 2} & \tau_A \leq \tau' < \tau_B \\ \text{ケース 3} & \tau' < \tau_A < \tau_B \end{cases} \quad (15)$$

ここで、表記の簡便化を図るために新・旧基準健全度を統一的に表記する状態変数 $r(\tau)$ を

$$r(\tau) = \begin{cases} g(\tau) & \tau \leq \tau' \\ h(\tau) & \tau' < \tau \end{cases} \quad (16)$$

と定義する。当然のことながら、 $r(\tau) = m$ は $\tau \leq \tau'$ のときに状態変数値 $m = 1, \dots, M$, $\tau' < \tau$ のときに値 $m = 1, \dots, I$ を取りうる。この時、隣接する2つの時点 τ_A, τ_B で健全度 $r(\tau_A) = m, r(\tau_B) = n$ が観測される条件付き尤度は

$$\begin{aligned} &\ell(r(\tau_A) = m, r(\tau_B) = n) \\ &= \begin{cases} \sum_{i \in \omega(n)} \rho_i(\tau_A) f_i(m|\alpha_i) \sum_{k \in \omega(n)} \pi_{ik}(z) f_k(n|\alpha_k) \\ \quad (\tau_A < \tau_B \leq \tau') \\ \sum_{i \in \omega(n)} \rho_i(\tau_A) f_i(m|\alpha_i) \pi_{in}(z) \\ \quad (\tau_A \leq \tau' < \tau_B) \\ \rho_m(\tau_A) \pi_{mn}(z) \\ \quad (\tau' < \tau_A \leq \tau_B) \end{cases} \end{aligned}$$

と表される。式(17)に示すように、 $\iota_{\tau_A} = \iota_{\tau_B} = 1$ の場合、旧基準健全度 $g(\tau_A) = m$ と $g(\tau_B) = n$ が抽出される確率 $f_i(m|\alpha_i), f_k(n|\alpha_k)$ は、マルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ を通じて互いに相関を持つ。すなわち、時点 τ_B における旧基準健全度の生起確率は、「時点 τ_A における旧基準健全度がどの確率密度から生成されたか」に依

存しているため、時間を通じて測定される旧基準健全度の時系列データは互いに独立にはならない。

尤度 (17) には、新基準健全度に関する分布 $\rho_i(\tau_A)$ 、マルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ 、健全度変換確率 $f_i(m|\alpha_i)$ という 3 種類の未知確率が存在する。このうち、新基準健全度分布 $\rho_i(\tau_A)$ に関する先験的情報が存在しないという問題（以下、初期値問題）がある。初期値問題を克服する 1 つの方法として、施設の新設、あるいは更新が実施された初期時点 t_0 を τ_0 として、初期時点 τ_0 に定義される新基準健全度を $h(\tau_0) = 1$ と設定し、初期値分布 $\rho(\tau_0) = \{1, 0, \dots, 0\}$ と想定することが考えられる。このように、供用開始・更新・補修直後の時点における初期値分布を設定することにより、初期値問題を克服することが可能になる。初期時点以降に関しては、以下で述べるように、尤度を再帰的に定義することにより、新基準健全度分布 $\rho_i(\tau_A)$ を逐次求めることができる。

いま、時点 τ_0 以降、健全度が測定された時点 τ_1, \dots, τ_T と表す。 T は時点 τ_0 以降の健全度測定回数を表す。期間 τ に測定された旧基準健全度を $\bar{r}(\tau_t) = \bar{g}(\tau_t) = \bar{m}_t$ ($t = 1, \dots, t'$)、時点 τ_t ($t = t' + 1, \dots, T$) に測定された新基準健全度を $\bar{r}(\tau_t) = \bar{h}(\tau_t) = \bar{i}_t$ ($t = t' + 1, \dots, T$) と表す。ただし、記号「 $\bar{\cdot}$ 」は観測値であることを表す。点検間隔 z は観測期間を通じて一定と仮定する。このとき、健全度の観測値ベクトル $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{t'}, \bar{i}_{t'+1}, \dots, \bar{i}_T)$ が測定される尤度関数 $\mathcal{L}(\alpha, \bar{\mathbf{r}})$ は、再帰的に

$$\mathcal{L}(\alpha, \bar{\mathbf{r}}) = \left\{ \sum_{k \in \omega(\bar{r}_1)} \pi_{1k}(z) f_k(\bar{r}_1 | \alpha_k) \ell_k(1) \right\}^{\iota(1)} \left\{ \pi_{1\bar{r}_1}(z) \ell_{\bar{r}_1}(1) \right\}^{1-\iota(1)} \quad (17a)$$

$$\ell_h(t) = \left\{ \sum_{k \in \omega(\bar{r}_{t+1})} \pi_{hk}(z) f_k(\bar{r}_{t+1} | \alpha_k) \ell_k(t+1) \right\}^{\iota(t+1)} \left\{ \pi_{h\bar{r}_{t+1}}(z) \ell_{\bar{r}_{t+1}}(t+1) \right\}^{1-\iota(t+1)} \quad (17b)$$

$$(1 \leq t \leq t' - 2)$$

$$\ell_h(T-1) = \pi_{h\bar{r}_T}(z) \quad (17c)$$

と定式化できる。ただし、 $\iota(t)$ はダミー変数であり

$$\iota(t) = \begin{cases} 1 & t \leq t' \\ 0 & t > t' \end{cases} \quad (t = 0, \dots, T) \quad (18)$$

と定義される。

津田ら¹⁾は、多段階指数ハザードモデル (11) を最尤法を用いて推計する方法を提案している。しかし、隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数 (17a)-(17c) は最尤法に適さない性質を持っていることが知られている¹⁹⁾。特に、尤度関数が $\pi_{ij}(z)$ に関して高次の非線形多項式となっており、1 階の最適化条件が（複素数解を含めて）非常に多くの解を有している点にある。当然のことな

がら、推移確率 $\pi_{ij}(z)$ の推計値は実数解でなければならない。さらに、推移確率であるために、数ある実数解の中から、0 と 1 の間にある解を選択しなければならない。最尤法の代わりにベイズ推計法を用いれば、高次の非線形多項式を解く問題を回避できる。しかし、尤度関数 (17a)-(17c) が極めて多くの項を含んでおり、計算量が膨大になってしまう欠点がある²⁰⁾⁻²³⁾。このような最尤法の難点を克服するために、尤度関数の完備化操作が必要となる。

(3) 完備化操作

ある構造物に対して、点検時点 τ_t ($t = 1, \dots, T$) において健全度観測値ベクトル $\bar{\mathbf{r}}$ が測定できたと考える。隠れマルコフ劣化モデルを推計するために新基準健全度 i_t を用いた潜在変数ベクトル $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_T) = (s_1, \dots, s_{t'}, \bar{i}_{t'+1}, \dots, \bar{i}_T)$ を導入する。ただし、劣化過程の性質より、施設が補修されない限り、

$$s_0 = 1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{t'} \leq \bar{r}_{t'+1} \quad (19)$$

を満足する。潜在変数 $(s_1, \dots, s_{t'})$ は測定不可能な変数であるが、議論の便宜上、ひとまず仮に測定できたと考える。一方、 $(\bar{i}_{t'+1}, \dots, \bar{i}_T)$ は新基準健全度の観測値である。健全度観測値ベクトル $\{\bar{\mathbf{r}}, \text{潜在変数 } \mathbf{s} \text{ を与件とした尤度関数は、}$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = \pi_{1s_1}(z) \prod_{t=1}^{t'} \pi_{s_t s_{t+1}}(z) f_{s_t}(\bar{m}_t | \alpha_{s_t}) \cdot \prod_{t=t'+2}^T \pi_{s_{t-1} s_t}(z) \quad (20)$$

と表現できる²²⁾。以上の操作を完備化という。完備化された尤度関数（以下、完備化尤度関数）(20) は通常の尤度関数 (17a)-(17c) より大幅に簡略化されていることが理解できる。ただし、尤度関数の中に含まれる潜在変数 \mathbf{s} は、測定できない変数である。そこで完備化尤度関数を用いて、潜在変数の確率分布を推計することを考える。完備化尤度関数を展開すれば、潜在変数 \mathbf{s} に関する全条件付き事後確率分布を導出できる。劣化過程の特性により、補修が実施されない限り、条件 (19) が成立する。ここで、 $\mathbf{s}_{-t} = (s_1, \dots, s_{t-1}, s_{t+1}, \dots, s_{t'})$ 、 $\mathbf{s}_{-t}^j = (s_1, \dots, s_{t-1}, i, s_{t+1}, \dots, s_{t'})$ とすれば、 $s_t = i$ ($i \in \{s_{t-1}, \dots, s_{t+1}\}$) の全条件付き事後確率は、ベイズの法則より

$$\text{Prob}\{s_t = i | \alpha, \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{s}_{-t}\} = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{s}_{-t}^i)}{\sum_{i=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{s}_{-t}^i)} = \frac{\omega_{it} f_i(m_t | \alpha_i)}{\sum_{j=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \omega_{jt} f_j(m_t | \alpha_j)} \quad (21)$$

と表される。ただし、

$$\omega_{jt} = \begin{cases} \pi_{s_{t-1}j}(z) \pi_{j s_{t+1}}(z) & 1 \leq t \leq t' \\ \pi_{s_{t'-1}j}(z) \pi_{j \bar{r}_{t'+1}}(z) & t = t' \end{cases} \quad (22)$$

と表される. すなわち, 新基準健全度間の推移確率 $\pi_{ij}(z)$ ($i = 1, \dots, I; j = i, \dots, I$) と健全度変換分布 $f_i(m|\alpha_i)$ ($i = 1, \dots, I$) が求まれば, \mathbf{s}_{-t} を与件とした時点 t の新基準健全度 $s_t \in \{s_{t-1}, \dots, s_{t+1}\}$ の全条件付事後確率を求めることができる. 完備化尤度関数 (20) では, 潜在変数 \mathbf{s} は確定的である. ただし, 健全度変換確率, 新基準健全度間の推移確率には未知パラメータ α, β が含まれており, 潜在変数に関する全条件付事後確率を先験的に求めることができない. 全条件付事後確率 (21) を用いた MCMC 法を用いて, 反復的に潜在変数 \mathbf{s} をランダム発生させ, パラメータ α, β をベイズ推計することになる. これらの未知パラメータと全条件付き事後確率を求める方法についても, (4) で改めてとりあげる. このような手続きにより, 完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推計値が, 新基準の尤度関数を用いて求めたパラメータの最尤推計値に収束することが証明されている¹⁸⁾.

5. 推計方法

(1) MCMC 法

伝統的なベイズ統計学では, 共役な事前, 事後分布を用いて, パラメータを推計する方法が採用されている¹⁵⁾. しかし, ハザードモデルの場合, 簡単な指数ハザードモデルを用いても, 共役事前確率分布が存在しないことが知られている²⁴⁾. 共役事前確率分布が存在しない場合, 数値解析により多重積分を求めることが必要となる. このことが, ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に, 大きな障害となっていた. しかし近年, MCMC 法¹⁵⁾がベイズ統計学の分野に導入され, 多重数値積分により基準化定数を求めなくても, 効率的に事後分布を求めることが可能となった. その結果, ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる. すでに, MCMC 法として, ギブスサンプリング法, メトロポリス・ヘイスティング法 (以下, MH 法) 等が提案されている¹⁵⁾. このうちギブスサンプリングはもともと画像復元のアルゴリズム²⁵⁾として知られていたが, ベイズ推計における事後分布の推計に応用された²⁶⁾. ギブスサンプリング法と MH 法は, いずれも事後確率密度関数を直接求めることが難しい場合に, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて, 反復的にパラメータ α, β のサンプルを乱数発生させることにより, 事後分布からパラメータサンプルを得る方法である. 小林等¹¹⁾は MCMC 法を用いて, マルコフ推移確率を効果的にベイズ推計する方法を明らかにしている. 本研究では小林等が提案したワイブル劣化モデルのベイズ推計法を拡張し, 判定基準変化を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法を提

案する.

隠れマルコフ劣化モデルを含む混合分布モデルの推計では, 前述したように尤度関数が特殊な形をしているため, 通常の最尤法やベイズ推計を用いることが困難である^{19), 20)}. このようなことから, 混合分布モデルの推計方法として, 通常の尤度関数ではなく, 完備化尤度関数を定義することとともに, MCMC 法を用いて混合分布モデルを推計する方法が提案されている¹⁸⁾⁻²¹⁾.

(2) 健全度変換確率の特定化

健全度変換確率 $f_i(m|\alpha_i)$ は, 新基準健全度が i の時に, 旧基準健全度 $m \in \omega(i)$ が観測される確率を表している. ただし, 変換確率は, 測定時点 τ_t ($t = 1, \dots, t'$) に依存せず, 時間を通じて一定であると仮定する. 本研究では変換確率をノンパラメトリックな離散的確率分布で表現する. すなわち, 変換確率 $f_i(m|\alpha_i)$ は

$$f_i(m|\alpha_i) = \begin{cases} 0 & m \notin \omega(i) \text{ の時} \\ \alpha_m^i & m \in \omega(i) \text{ の時} \end{cases} \quad (23)$$

と表される. ただし, α_m^i は定数であり,

$$0 \leq \alpha_m^i \leq 1 \quad (24a)$$

$$\sum_{m \in \omega(i)} \alpha_m^i = 1 \quad (24b)$$

を満足する.

(3) 完備化事後確率密度関数の定式化

社会基盤施設 k ($k = 1, \dots, K$) に対して, 直近の更新時点以降, それぞれ合計 T^k 回にわたる測定結果が得られたとする. 測定時点 τ_t^k ($t = 1, \dots, T^k$) において測定された健全度の測定値を $\bar{r}(\tau_t^k)$ と表す. ここに記号 \bar{r} は, 測定値であることを表す. また, $\sum_{k=1}^K T^k$ 個の測定情報に関するデータを $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^K)$ と表す. ただし, $\bar{\xi}^k = (\bar{\xi}_1^k, \dots, \bar{\xi}_{T^k}^k)$, $\bar{\xi}_t^k = (\bar{r}_t^k, \mathbf{x}_t^k)$ であり, \bar{r}_t^k は時点 τ_t^k における構造物 k の健全度, \mathbf{x}_t^k は構造物 k の特性ベクトルである. この時, 隠れマルコフ劣化モデルの完備化尤度関数は K 個の土木構造物から得られたデータの完備化同時生起確率

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \beta, \bar{\xi}, \mathbf{s}) \\ &= \prod_{k=1}^K \left\{ \pi_{1s_1^k}(z) \prod_{t=1}^{t'} \pi_{s_t^k s_{t+1}^k}(z) f_{s_t^k}(\bar{r}_t^k | \alpha_{s_t^k}) \right. \\ & \quad \cdot \left. \prod_{t=t'+2}^T \pi_{s_{t-1}^k s_t^k}(z) \right\} \end{aligned} \quad (25a)$$

$$f_{s_t^k}(\bar{r}_t^k | \alpha_{s_t^k}) = \alpha_{\bar{r}_t^k}^{s_t^k} \quad (25b)$$

$$\pi_{s_t^k s_{t+1}^k}(z) = \sum_{l=s_t^k}^{s_{t+1}^k} \prod_{u=s_t^k, u \neq l}^{s_{t+1}^k-1} \frac{\theta_u^k}{\theta_u^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z) \quad (25c)$$

で表される. ただし, $\theta_u^k = \exp(\mathbf{x}_u^k \beta_u^k)$ と表される.

(4) ベイズ推計法

一般に、ベイズ推計法は、1) 事前の経験情報などに基づいて、パラメータ α, β の事前確率密度関数を設定する、2) 新しく獲得したデータ \bar{r} に基づいて尤度関数 $\mathcal{L}(\alpha, \beta, \bar{r})$ を定義する、さらに、3) ベイズの定理に基づいて事前確率密度関数を修正し、パラメータ α, β に関する事後確率密度 $\rho(\alpha, \beta | \bar{r})$ を得る、という手順を採用することになる。以上の手順を、本研究ではベイズ推計のルールと呼ぶ。最尤法と異なり、未知パラメータ α, β の確率分布が、事後分布として求まる点にベイズ推計法の特徴がある。前述したように、ハザードモデルでは、共役事前確率密度関数を見出すことは不可能²⁴⁾であり、事前確率密度関数は非共役事前確率密度関数を採用せざるを得ない。事前確率密度関数設定には、任意性が介在せざるを得ないが、サンプル数が増加するにつれて事前確率密度の特定化の影響は次第に低下する。

まず、条件付健全度変換確率 (1) に含まれるパラメータ $\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^l)$ は、式を満足する定数である。これらの定数の事前確率密度関数として、ディリクレ分布を仮定する。すなわち、判定基準変換確率 α_i の事前確率密度関数を

$$\eta_i(\alpha_i | \nu_i) = \Psi_i(\nu_i) \prod_{m \in \omega(i)} (\alpha_i^m)^{\nu_i^m - 1} \quad (26a)$$

$$\Psi_i(\nu_i) = \frac{\Gamma(\sum_{m \in \omega(i)} \nu_i^m)}{\prod_{m \in \omega(i)} \Gamma(\nu_i^m)} \quad (26b)$$

$$\sum_{m \in \omega(i)} \alpha_i^m = 1 \quad (26c)$$

と表現する。ただし、 ν_i は定数パラメータベクトルである。次に、 β_i の事前確率密度関数が、標準的な事前確率密度関数として用いられる多次元正規分布に従うと仮定する。すなわち、 $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\zeta_i, \Sigma_i)$ である。ただし、 M 次元正規分布 $\mathcal{N}_M(\zeta_i, \Sigma_i)$ の確率密度関数は、

$$H(\beta_i | \zeta_i, \Sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \sqrt{|\Sigma_i|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)'\right\} \quad (27)$$

となる。ただし、 ζ_i は $\mathcal{N}_M(\zeta_i, \Sigma_i)$ の事前期待値ベクトル、 Σ_i は事前分散共分散行列である。この時、完備化事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \mathbf{s}, \xi)$ は

$$\begin{aligned} & \rho(\alpha, \beta | \mathbf{s}, \xi) \\ & \propto \tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \beta, \mathbf{s}, \xi) \prod_{i=1}^{I-1} \left\{ H(\beta_i | \zeta_i, \Sigma_i) \eta_i(\alpha_i | \nu_i) \right\} \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left[\prod_{t=1}^{T-1} \alpha_{s_t^k}^{\bar{r}_t^k} \sum_{l=s_t^k}^{s_{t+1}^k-1} \left\{ \prod_{u=s_t^k+1}^{s_{t+1}^k-1} \frac{\theta_u^k}{\theta_u^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z) \right\} \right] \\ & \prod_{i=1}^{I-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)'\right\} \end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i=1}^I \prod_{m \in \omega(i)} (\alpha_i^m)^{\nu_i^m - 1} \right) \quad (28)$$

(5) 最適モデル決定手法

(3) で言及したように、本研究では新・旧基準間のマクロ対応モデルを与件として複数個想定し、隠れマルコフ劣化モデルを推計する。その中から、統計的最適モデルを決定する指標として赤池情報量基準 (以下、AIC と呼ぶ) を用いる。AIC は次式で算出される。

$$AIC = -2 \ln L + 2k \quad (29)$$

ただし、 L は尤度、 k は推定するパラメータの数である。尤度 L は式 (20) で算出される。ここで、式 (20) 中の潜在変数 (s_1, \dots, s_T) は本来、測定不可能な変数であるが議論の便宜上、仮に確定値として観測されたとしている。式 (20) を用いるためには、潜在変数 s_t を確定値として定義する必要がある。この点については、次節において説明する。

(6) 推計フロー

隠れマルコフ劣化モデルでは、事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \xi)$ を直接解析的に求めることができない。そこで、代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法²⁵⁾を用いて、パラメータ α, β の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する。式 (28) において、 α, β は互いに独立であり、これらのパラメータの完備化条件付事後密度関数 $\rho(\alpha | \mathbf{s}, \xi)$ 、 $\rho(\beta | \mathbf{s}, \xi)$ は

$$\begin{aligned} & \rho(\alpha | \mathbf{s}, \xi) \\ & \propto \left(\prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{s_t^k}^{\bar{m}_t^k} \right) \left\{ \prod_{i=1}^I \prod_{m=1}^i (\alpha_i^m)^{\nu_i^m - 1} \right\} \quad (30) \\ & \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho(\beta | \mathbf{s}, \xi) \\ & \propto \left\{ \prod_{k=1}^K \left[\prod_{t=1}^{T^k} \sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k} \left[\prod_{i=s_{t-1}^k, \neq l}^{l-1} \frac{\theta_i^k}{\theta_i^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z_{t,k}^l) \right] \right] \right\} \\ & \prod_{i=1}^{I-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)'\right\} \quad (32) \end{aligned}$$

と表せる。また、潜在変数 \mathbf{s} の全条件付事後分布は式 (21) で表される。以上のギブスサンプラーを用いた MCMC 法により、隠れマルコフ劣化モデルを推計することが可能となる。図-4 に、隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計するための具体的手順を整理している。読者の便宜を図るために、同図中には、推計法の詳細を説明する節番号や式番号を明記している。以下では、以上の各ステップの内容を、より詳細に説明する。

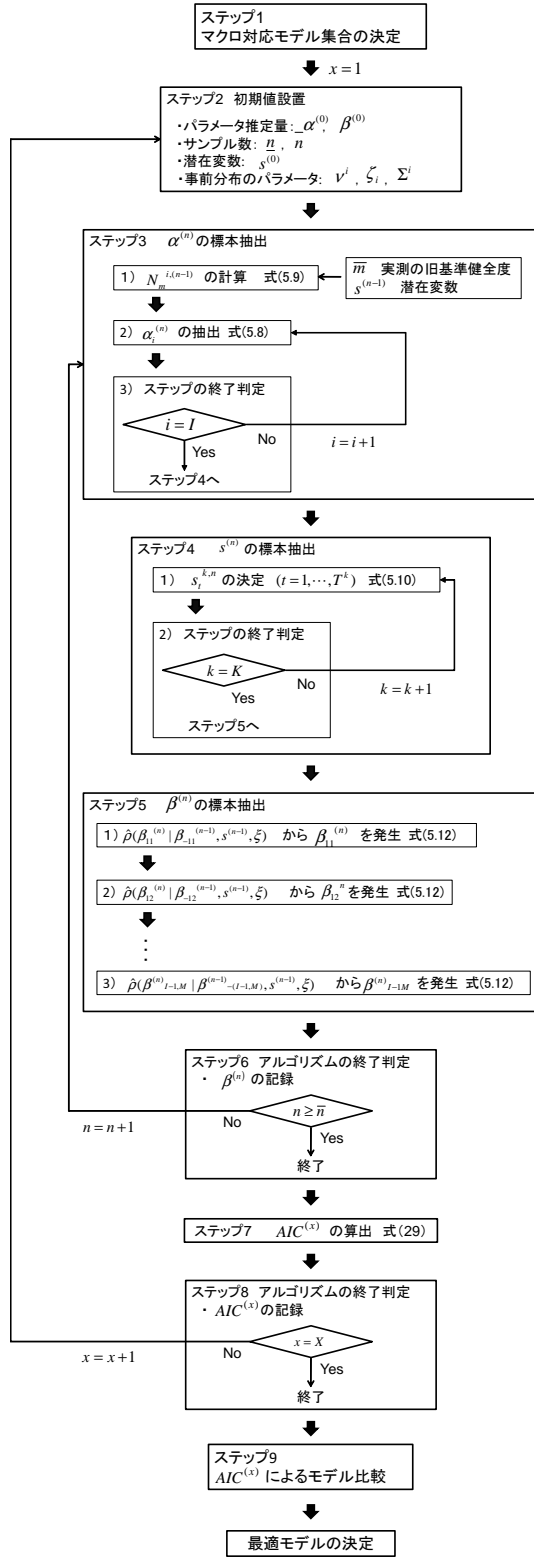


図-4 推計フロー

a) ステップ1 マクロ対応モデル集合の選定

本研究では、想定されるマクロ対応モデルの集合を M とし、要素の数を X として表す。マクロ対応モデルそれぞれに対し、モデルパターン $x (= 1, \dots, X)$ を任意に定める。ただし $x \in M$ である。

b) ステップ2 初期値設定

事前分布 (26a),(27) のパラメータベクトル (行列) $\nu_i (i = 1, \dots, I)$, $\zeta_i, \Sigma_i (i = 1, \dots, I-1)$ の値を任意に設定する。潜在変数の初期値 $\mathbf{s}^{(0)} = (s^{(1,0)}, \dots, s^{(K,0)})$, を設定する。ただし, $\mathbf{s}^{(k,0)} = (s_1^{k,0}, \dots, s_T^{k,0})$ であり, $1 \leq s_1^{k,0} \leq \dots \leq s_T^{k,0} \leq I$ を満足する。さらに, パラメータ推計量の初期値 $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$ を任意に設定する。これらの初期値の影響は, MCMC 法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ, 次第に薄れていく。MCMC のサンプル標本回数 n を $n = 1$ とする。

c) ステップ3 パラメータ α^n の標本抽出

ステップ3では, 潜在変数 $s^{(n-1)}$ を与件とし, 健全度変換確率のパラメータ $\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{I-1}^{(n)})$ に関するパラメータの標本を獲得する。ただし, $\alpha_i^n = (\alpha_i^{m,n} : m = 1, \dots, i)$ と表記する。ステップ2で用いるギブスサンプラーは式(30)で表される完備化条件付事後確率密度関数 $\rho(\alpha^{(n)} | s^{(n-1)}, \xi)$ で与えられる。仮想の新基準健全度 $s^{(n-1)}$ と測定データ ξ を与件としたとき, 完備化された $\alpha_i^{(n)}$ に関するギブスサンプラーを

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}(\alpha_i^{(n)} | s^{(n-1)}, \xi) \\ & \propto \left\{ \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{m_t^k}^{s_{m_t^k, t}^{(n-1)}} \right\} \left\{ \prod_{m=1}^i (\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i - 1} \right\} \\ & = \prod_{m=1}^i (\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i + N_i^{m, (n-1)} - 1} \end{aligned} \quad (33)$$

と表すことができる。ただし, $N_i^{m, (n-1)}$ は旧基準健全度の測定値 \bar{m} と潜在変数 $s^{(n-1)}$ を与件とした時,

$$N_i^{m, (n-1)} = \#\{ \bar{m}_t^k = m \cap s_t^{k, (n-1)} = i \} \quad (34)$$

と定義される。ただし, $\#\{\}$ は, 括弧 $\{\}$ 内に含まれる定義式が成立するような測定サンプル数を表す。式(33)は, パラメータ $\nu_m^i + N_i^{m, (n-1)} - 1$ を有するディリクレ分布に他ならない。更新されたディリクレ分布(33)を用いて, ギブスサンプリングにより, 条件付き健全度変換確率のパラメータ標本 $\alpha_i^{(n)} = (\alpha_i^{1, (n)}, \dots, \alpha_i^{i, (n)})$ を標本抽出する。全ての $i (i = 1, \dots, I)$ に対してパラメータ標本 $\alpha_i^{(n)}$ を求める。

d) ステップ4 潜在変数の更新

全条件付事後確率(21)に基づいて, 新しい潜在変数 $\mathbf{s}^{(n)}$ をランダムサンプリングする。いま, 潜在変数ベクトル $\mathbf{s}_{-t}^{k, (n-1)} = (s_1^{k, n}, \dots, s_{t-1}^{k, n}, s_{t+1}^{k, (n-1)}, \dots, s_{T^k}^{k, (n-1)})$ を定義する。この時, $s_t^{k, n} (s_t^{k, n} \in \{s_{t-1}^{k, n}, \dots, s_{t+1}^{k, (n-1)}\})$ の全条件付事後確率は,

$$\text{Prob}\{s_t^k = i | \alpha, \mathbf{s}_{-t}^{k, (n-1)}, \xi\}$$

$$= \begin{cases} \frac{\omega_{i,t}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \alpha_i^{(n)})}{\sum_{j=1}^{s_{t-1}^{k,(n-1)}} \omega_{j,t}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \alpha_j^{(n)})} & (t=1) \\ \frac{\omega_{i,t}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \alpha_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^{s_{t+1}^{k,(n-1)}} \omega_{j,t}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \alpha_j^{(n)})} & (2 \leq t \leq T^k) \\ \frac{\omega_{i,t}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k | \alpha_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^{s_{t-1}^{k,n}} \omega_{j,t}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k | \alpha_j^{(n)})} & (t=T^k) \end{cases} \quad (35)$$

と表される。ただし、

$$\omega_{j,t}^{k,(n-1)} = \begin{cases} \pi_{1j} \pi_{j s_2^{k,(n-1)}} & t=1 \\ \pi_{s_{t-1}^{k,n} j} \pi_{j s_{t+1}^{k,(n-1)}} & 2 \leq t < T^k \\ \pi_{s_{T^k-1}^{k,n} j} & t=T^k \end{cases} \quad (36)$$

である。全ての $k(k=1, \dots, K)$ に対して、 $t=1$ より逐次、潜在変数 $s_t^{k,n}(t=1, \dots, T^k)$ を求める。

e) ステップ5 パラメータ $\beta^{(n)}$ の標本抽出

ステップ5 では新基準健全度で定義される多段階指数ハザードモデルのパラメータ標本を抽出する。**ステップ5** のアルゴリズムを説明するために、 β から β_{em} を除いた未知パラメータベクトルを β_{-em} と表す。このとき式より、 β_{-em} を既知とした時の β_{em} の条件付き事後確率密度関数 $\rho(\beta_{em}, \beta_{-em}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi})$ は、

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}(\beta_{em}, \beta_{-em}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}) \\ & \propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^I \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \prod_{l=i}^{j-1} \left\{ \prod_{l=i}^{j-1} (\theta_l^k)^{\delta_{ij}^{tk} - \delta_{ie}^{tk}} \right. \\ & \quad \left. \sum_{h=i}^j \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \exp(-\theta_h^k z_t^k) \right\}^{\delta_{ij}^{tk}} \\ & \quad \prod_{i=1}^{I-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_i - \zeta_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \zeta_i)'\right\} \\ & \propto \prod_{i=1}^e \prod_{j=e}^I \prod_{k=1}^K \prod_{t=1}^{T^k} \left[\prod_{l=i}^{j-1} \left\{ \exp(\beta_{em} x_m^k) \right\}^{\delta_{ij}^{tk} - \delta_{ie}^{tk}} \right. \\ & \quad \left. \sum_{h=i}^j \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\theta_l^k - \theta_h^k} \right. \\ & \quad \left. \exp(-\theta_h^k z_t^k) \right] \exp\left\{-\frac{\sigma_e^{mm}}{2} (\beta_{em} - \hat{\zeta}_e^m)^2\right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\hat{\zeta}_e^m = \zeta_e^m + \sum_{h=1, \neq m}^M (\beta_{eh} - \zeta_e^h) \sigma_{hm}^e \quad (38)$$

と表すことができる。ただし、 δ_{ie}^{tk} , δ_{ij}^{tk} は

$$\delta_{ie}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i = e \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (39)$$

$$\delta_{ij}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i, s_t^k = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となるダミー変数である。 ζ_e^m は事前期待値ベクトル ζ_e の第 m 要素であり、 σ_e^{hm} は事前分散共分散行列 $\{\Sigma_e^{-1}$

の第 (h, m) 要素である。また、 $\sum_{h=1, \neq m}^M$ は1から M までの要素のうち m を除いた要素の総和を意味する。

このとき、 $\beta^{(n)} = (\beta_{11}^{(n)}, \dots, \beta_{I-1M}^{(n)})$ を以下の手順でランダムサンプリングする。

・**ステップ5-1** $\hat{\rho}(\beta_{11}^{(n)} | \beta_{-11}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{11}^{(n)}$ を乱数発生する。

・**ステップ5-2** $\hat{\rho}(\beta_{12}^{(n)} | \beta_{-12}^{(n-1)}, \tilde{\mathbf{s}}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{12}^{(n)}$ を乱数発生する。

・**ステップ5-3** 以下、同様の手順を繰り返す。

・**ステップ5-4** $\hat{\rho}(\beta_{I-1,M}^{(n)} | \beta_{-(I-1M)}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ から $\beta_{(I-1M)}^{(n)}$ を乱数発生する。

なお、ギブスサンプリングを行うためには $(I-1) \times M$ 個の条件付き事後確率密度関数 $\hat{\rho}(\beta_{em}^{(n)} | \beta_{-em}^{(n-1)}, \mathbf{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$ を求めることが必要となる。

f) ステップ6 アルゴリズムの終了判定

以上で求めたパラメータ推計量の更新値 $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ 、潜在変数の更新値 $\mathbf{s}^{(n)}$ を記録する。 $n \leq \bar{n}$ の場合、 $n = n+1$ として、**ステップ3** へ戻る。そうでない場合、アルゴリズムを終了する。なお、以上のアルゴリズムの初期段階においては、パラメータの初期値設定の影響が残存している。このため、シミュレーション回数 n が十分大きな値になるまでは、パラメータ標本の発生過程が定常過程に到達していないと考え、発生したパラメータ標本を除去することが望ましい。ここで、パラメータ標本として採用するシミュレーション回数 n の最小値を \underline{n} と表す。すなわち、ギブスサンプリングで求めたサンプル $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} (n = \underline{n}+1, \underline{n}+2, \dots, \bar{n})$ を、事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \boldsymbol{\xi})$ からの標本と見なすこととする。したがって、これらの標本を用いて、パラメータベクトル α, β の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる。なお、ギブスサンプリングの定常性に関しては、次節で述べる Geweke の検定統計量を用いて判断する。

g) ステップ7 AICの算出

式(29)によりAICを算出する。なお(6)で述べたように、式(29)中の尤度 L 算出の際には、潜在変数 s_t を確定値として定義する必要がある。そこで本研究では、**ステップ6** で記録した潜在変数の更新値 $\mathbf{s}^{(n)}$ の平均を各サンプルの該当点検時点における潜在変数の確定値として以下のように定義する。

$$s_t = \frac{\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} s_t^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (40)$$

なお、 $n < \underline{n}$ の潜在変数の更新値は、パラメータ推計量の更新値 $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ と同様、初期値設定の影響が残存している可能性があるため、除去することが望ましい。

h) ステップ8 アルゴリズムの終了判定

ステップ7 で求めたパラメータ推計量の更新値 $AIC^{(x)}$ を記録する。 $x \neq X$ の場合、 $x = x+1$ と

して、ステップ2へ戻る。そうでない場合、アルゴリズムを終了する。

i) ステップ9 AICによるモデル比較

$AIC^{(x)}(x \in M)$ を最小にするときの x を最適マクロ対応モデルとして採用する。また、モデルパターン x におけるミクロ対応モデルを、本研究における最適ミクロ対応モデルとして、新旧基準間の確率的対応関係を定量化する。

(7) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて、パラメータベクトル α, β に関する統計的性質を分析することができる。MCMC 法を用いた場合、パラメータの事後確率密度関 $\rho(\alpha, \beta | \xi)$ を解析的な関数として表現することはできない。得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる。いま、ギブスサンプリングから得られた標本を $(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})(n = 1, \dots, \bar{n})$ と表す。このうち、最初の \underline{n} 個の標本は収束過程からの標本と考え、標本集合から除去する。その上で、パラメータ標本添え字集合を $M = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する。このとき、パラメータ α 及び β の同時確率分布関数 $G(\alpha), G(\beta)$ は

$$G(\alpha) = \frac{\#\{\alpha(n) \leq \alpha, n \in M\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (41)$$

$$G(\beta) = \frac{\#\{\beta(n) \leq \beta, n \in M\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (42)$$

と表すことができる。ただし、 $\#\{\beta(n) \leq \beta, n \in M\}$ は論理式 $\beta(n) \leq \beta, n \in M$ が成立するサンプルの総数である。また、パラメータ β_i の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}_i(\beta_i)$ 、分散・共分散行列 $\tilde{\Sigma}_i(\beta_i)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i(\beta_i) &= (\tilde{\zeta}(\beta_{i,1}), \dots, \tilde{\zeta}(\beta_{i,M}))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,1}(n)}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta_{i,M}(n)}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (43)$$

$$\tilde{\Sigma}_i(\beta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}(\beta_{i,1}\beta_{i,M}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_{i,M}\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,M}) \end{bmatrix} \quad (44)$$

と表される。ただし

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_{i,m}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (45a)$$

$$\tilde{\sigma}(\beta_{i,q}^s \beta_{i,r}^s) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\} \{\beta_{i,l}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,l})\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (45b)$$

である。また、ギブスサンプリングによる標本を用いて、パラメータ β の信用区間を定義できる。例えば、パラメータ β の $100(1 - 2\varepsilon)\%$ 信用区間は、標本順序統計

量 $(\underline{\beta}_{i,m}^\varepsilon, \overline{\beta}_{i,m}^\varepsilon)$ ($i = 1, \dots, I - 1; m = 1, \dots, M$)

$$\underline{\beta}_{i,m}^\varepsilon = \arg \max_{\beta_{i,m}(n^*)} \left\{ \frac{\#\{\beta_{i,m}(n) \leq \beta_{i,m}(n^*), n \in M\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \varepsilon \right\} \quad (46a)$$

$$\overline{\beta}_{i,m}^\varepsilon = \arg \min_{\beta_{i,m}(n^{**})} \left\{ \frac{\#\{\beta_{i,m}(n) \geq \beta_{i,m}(n^{**}), n \in M\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \varepsilon \right\} \quad (46b)$$

を用いて $\underline{\beta}_{i,m}^\varepsilon < \beta_{i,m} < \overline{\beta}_{i,m}^\varepsilon$ と定義できる。

6. 適用事例

(1) データベースの概要

本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルを、NEXCO 西日本所管のトンネル照明灯具（以下、灯具）に対する点検データベースに適用した。照明灯具の材質として鋼製とステンレス鋼製（以下、SUS 製）の2種類が存在する。鋼製灯具と SUS 製灯具の劣化進展機構や劣化速度は、物理的にも大きく異なることが経験的に知られている。また、1997年から現在に至るまで、鋼製灯具から SUS 製灯具への設備更新が各トンネルにおいて進められている。したがって、本研究では SUS 製灯具の点検データのみを用いることとする。分析対象としたトンネル照明の構造検査データ（データ提供者である NEXCO 西日本内では「検査」という言葉が用いられているが、本研究では参考文献等との整合を図る為、「点検」としている）は、過去に実施された点検の結果のうち、電子データとして獲得できた、2005年から2012年までに実施された一斉点検に基づくものである。ただし、この点検データベースでは2009年4月に判定基準が変更されており、変更時点を境に異なる判定基準を用いた点検データが混在している。灯具の劣化は図-1、図-2に示すように、旧基準ではOK、B、A、AAの4段階、新基準ではOK、C、B、A、AAの5段階のレーティングで評価される。本研究では獲得された点検データのうち、旧基準、新基準ともに判定AAのデータ数が極端に少なかった。この点に加え、判定Aと判定AAの灯具いずれに対しても補修が必要となり、実務的には両者に差異がないことから本研究では判定Aを管理限界とし、判定Aと判定AAを1つの健全度に統合した。また、推計に使用するために、同図に示す通り各健全度を数字に置き換えて表示することとする。また、このデータベースには合計30,489の点検データが含まれており、そこから計18,753のサンプルが作成される。これらのサンプルを用いて推計を行った。本適用事例においては旧基準健全度2(B)が新基準健全度2(C)、3(B)に細分化されるという新旧基準の対応関係が既知であるため、マクロ対応モデルはこ

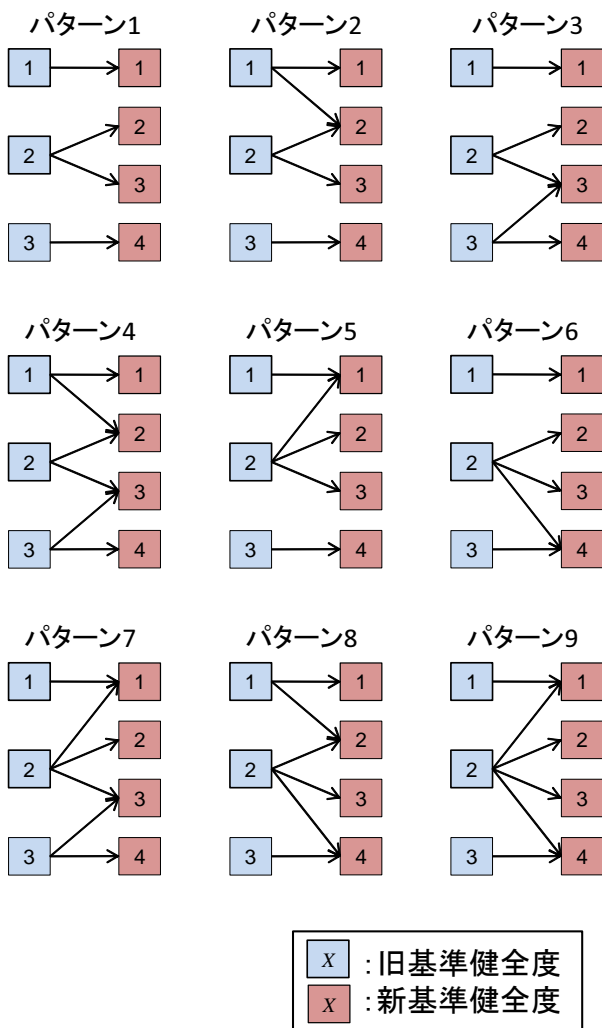


図-5 マクロ対応モデル候補

の部分的情報を満たす9パターンが想定される。よって前述のマクロ対応モデル集合 M の要素数は $X = 9$ となる。図-5にマクロ対応モデルの候補を示す。同図内、青が旧基準健全度、赤が新基準健全度を表し、矢印がミクロ対応モデルを表している。これらのマクロ対応モデルからモデル比較により、最適マクロ対応モデルを決定する。

(2) 最適マクロ対応モデルの決定

モデルパターン $x = 1 \dots 9$ について、マクロ対応モデルを所与とし、それぞれパラメータの推計を行った。全モデルパターンについてAICを算出、比較を行った結果、パターン8をAIC最小の最適マクロ対応モデルとして採用した。また、同モデルを最適マクロ対応モデルとした場合の、ミクロ対応モデルの推計結果を表-3に示す。

同表から、旧基準の点検においてOKと判定された灯具のうち41%が新基準OKに、59%が新基準Cに変

換された。この結果から、新基準を導入することにより旧基準においてOK(損傷なし)と判定されていた灯具のうち、半数以上には初期段階の損傷が認められ、すなわち、旧基準OKには初期段階の損傷(新基準Cに相当する劣化状態)が混在していたことが理解できる。判定基準を見直し、新基準健全度Cを新たに加えた結果、旧基準においては損傷なしと判定されていたような初期段階の劣化状態を確認、記録することが可能となったと言える。また、旧基準Bは55%が新基準Cに、45%が新基準Bに、0.016%が新基準A,AAに変換される。ここで、旧基準Bが新基準A,AAに変換される確率が極端に小さいことから、本研究における最適マクロ対応モデルは、近似的にパターン2と同値であると考えられる。パターン2は、事前情報である旧基準Bの細分化に加え、旧基準OKが新基準Cに判定される健全度解釈の誤差を考慮したモデルである。旧基準Bが新基準A,AAに判定される健全度解釈の誤差はごく小さい確率でしか起こりえないが、前述した通り、旧基準OKには健全度解釈による誤差が多分に潜んでいることがわかる。また、旧基準Bすなわち、損傷が広範囲に認められるとされていた灯具の半数以上が初期の劣化段階であると判定された。よって、新基準Cを導入したことにより、初期段階の劣化状態を確認することができ、広範囲に劣化が及ぶ灯具との区別を明確化した。同社の管理基準においては、Aを灯具の補修、取替計画の作成時期の目安と定めており、旧基準において同じBと判定された灯具でも、OKに近いAどちらの判定に近い劣化状態であるかによって今後の意思決定は大きく異なると考えられる。よって本適用事例においては、新基準を導入し評価段階数を細分化することで、より効率的な維持管理が可能となると言える。

(3) 隠れマルコフ劣化モデルの推計結果

(1) で述べたデータベースを用いて、判定基準の変更を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを推計した。説明変数に関しては、1)凍結防止剤散布回数、2)大型車交通量、3)交通量等級、4)入口からの距離、5)勾配の絶対値を候補として取り上げた。1)凍結防止剤散布回数、2)大型車交通量のような定量パラメータに関しては、サンプル中の最大値が1となるように基準化した。すなわち、これらの説明変数は[0,1]の値を取り得る。最適マクロ対応モデルにおいては、説明変数の組み合わせの中で、符号条件およびGeweke検定を満足しないような変数の組を除外した結果、最終的に4)入口からの距離と5)勾配の絶対値が有意な説明能力を有する説明変数として採用された。

以上のように推計した隠れマルコフ劣化モデルのパラ

表-3 推計結果【マイクロ対応モデル】

		新基準健全度			
		1(OK)	2(C)	3(B)	4(A,AA)
旧基準健全度	1(OK)	0.41 (0.39,0.43) -0.01	0.59 (0.57,0.61) 0.01	0	0
	2(B)	0	0.55 (0.53,0.57) -0.03	0.45 (0.43,0.47) 0.03	1.56×10^{-4} ($4.58 \times 10^{-8}, 6.96 \times 10^{-4}$) 0.08
	3(A,AA)	0	0	0	1

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータの期待値、第2行はパラメータ推計値の90%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。

表-4 パラメータの推計結果【隠れマルコフ劣化モデル】

健全度	定数項 β_1^i	入口からの距離 β_2^i	勾配の絶対値 β_3^i	期待寿命 ET^i [年]
1	-1.93 (-1.97,-1.89) 0.01	-1.16 (-1.29,-1.04) -0.03	-	8.7
2	-2.23 (-2.29,-2.17) 0.02	-	0.21 (0.11,0.30) -0.05	17.4
3	-2.85 (-2.90,-2.81) 0.08	-	-	34.6

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータの期待値、第2行はパラメータ推計値の90%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。 ET^i (年)は健全度*i*の期待寿命を表す。

メータ推計値を、一括して表-4に示す。なお、MCMC法のギブスサンプリングを実施する際に、マルコフ連鎖が定常状態に到達するためのサンプル数として $r = 10,000$ を設定した。表-4に示す通り、Geweke検定統計量はいずれも1.96を下回っており、有意水準5%でパラメータのランダムサンプリングが定常状態に収束したことを意味する収束仮説を棄却できないことがわかる。したがって、本研究では $\bar{r} = 20,000$ と設定し、 $r = 10,000$ 個の標本を事後分布に収束する過程からの標本として除き、残りの10,000個のパラメータ標本を用いて分析を行うこととした。

表-4のパラメータ推計結果を用いて、期待劣化パスを算出した。その結果を図-6に示す。同図には、入口からの距離、勾配の絶対値をサンプル平均に設定し、算出した平均ハザード率を用いた期待劣化パスを赤実線で示している。同図から管理限界である健全度4に達するまでの期待寿命は約35年と読み取れる。

また、表-5には、旧基準データのみを用いた従来のマルコフ劣化ハザードモデルによるパラメータの推計結果を示している。この結果から得られた従来モデル

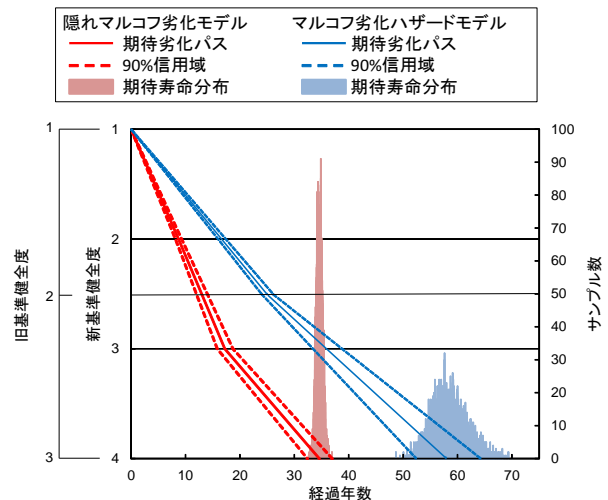


図-6 期待劣化パスと信用域

による期待劣化パスを図-6に併記し、青実線により示している。一方、新基準データに関しては、観測期間およびサンプルの蓄積が不十分であったために、それを用いた推計を行うことができなかった。そのため、旧基

表-5 パラメータの推計結果【マルコフ劣化ハザードモデル】

健全度	定数項 β_1^i	期待寿命 ET^i [年]
1	-3.25	25.71
	(-3.28,-3.21)	
	-0.06	
2	-3.48	58.24
	(-3.63,-3.34)	
	0.041	

注) 各健全度ごとに、第1行はパラメータの期待値、第2行はパラメータ推計値の90%信用域の下限値と上限値、第3行はGeweke検定統計量を表している。 ET^i (年)は健全度*i*の期待寿命を表す。

表-6 データ種別とサンプル数

サンプルタイプ	該当サンプル数
旧基準データ→旧基準データ	6,163
旧基準データ→新基準データ	5,696
新基準データ→新基準データ	6,894
総計	18,753

表-7 サンプル分布【旧基準データ】

		事後健全度		
		1(OK)	2(C)	3(B)
事前健全度	1(OK)	3,748	2,260	130
	2(B)		22	1
	3(A,AA)			2

準データのみを用いた劣化予測結果を従来モデルの劣化予測結果と考えることとする。同図から従来モデルによる期待寿命は約58年となり、提案モデルと比較して期待寿命を過大評価していることが読み取れる。さらに、本研究で用いたベイズ推計の特徴として、パラメータの推計結果が分布として得られる。よって、期待寿命も分布として得られることから、この分布を比較することにより、期待寿命の信頼性を評価することができる。同図には、従来モデル、提案モデルについて、期待劣化パスの90%信用域を点線、期待寿命分布を影部により併記している。期待劣化パスの90%信用域上下限の差が、従来モデルでは12.7年であったのに対し、提案モデルでは4.5年となり信用域の縮小が確認できる。さらに、期待寿命分布においても、従来モデルと比較すると、提案モデルの期待寿命分布は分散が小さく、期待寿命の信頼性が向上していることが読み取れる。

(1)で述べたデータベースには、判定基準変更時点以前の旧基準点検データ、変更時点以後の新基準点検データの2種類の点検データが存在する。よって、2点検時点の劣化の推移を表すサンプルには(旧基準デー

表-8 サンプル分布【新旧基準データ】

		事後健全度			
		1(OK)	2(C)	3(B)	4(A,AA)
事前健全度	1(OK)	512	947	1952	652
	2(B)		0	1102	397
	3(A,AA)			0	134

表-9 サンプル分布【新基準データ】

		事後健全度			
		1(OK)	2(C)	3(B)	4(A,AA)
事前健全度	1(OK)	3,699	0	0	0
	2(C)		947	0	0
	3(B)			1,659	16
	4(A,AA)				573

ター旧基準データ)、(旧基準データ→新基準データ)、(新基準データ→新基準データ)の3タイプのデータの組み合わせが存在する。表-6に獲得されたサンプルのタイプと該当サンプル数の内訳を整理している。上述した期待寿命の信頼性向上の理由として、判定基準変更前後の全ての点検データを用いることにより、推計に使用するサンプル数が、同表に示す通り旧基準データのみ6,163サンプルから18,753サンプルへと、著しく増加したことが考えられる。また、表-7から表-9に各サンプルタイプにおける、健全度の推移パターンと該当サンプル数を整理し表記している。同表から読み取れる通り、表-7、表-9にはサンプルの分布に大きな偏りが見られる。しかし、本研究で提案する手法を用いることで、表-7、表-9に示したサンプルを統合的に扱い、サンプルの偏りを緩和することが可能となる。さらに表-8に示す(旧基準データ→新基準データ)のサンプルも使用可能となり、その結果として、期待寿命の信頼性が向上したと考えられる。以上から、隠れマルコフ劣化モデルの提案により、従来は推計が困難、あるいは信頼性を担保できなかったデータに対しても、獲得された全てのデータを用いて、より信頼性を高めた劣化予測結果を得ることができた。

さらに、本モデルにおいては、説明変数による期待寿命の変動を評価することが可能である。そこで本適用事例において採用した説明変数である、入口からの距離、勾配絶対値が灯具の期待寿命に及ぼす影響を分析するために、図-7に観測された入口からの距離の最大値と最小値、図-8に勾配絶対値の最大値、最小値によるハザード率を算出し、それぞれのハザード率に対応する期待劣化パスを算出し結果を示している。同図から、トンネル入口からの距離が小さい程、劣化の進展が速くなり、トンネル入口付近に設置されている灯具と、入口からの距離が1000m前後の灯具では期待寿命

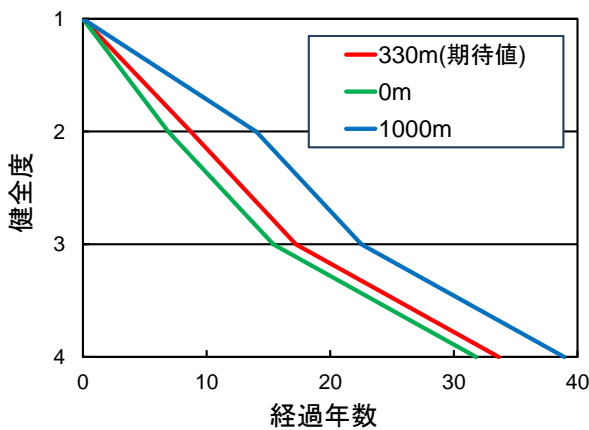


図-7 期待劣化パス【入口からの距離の影響】

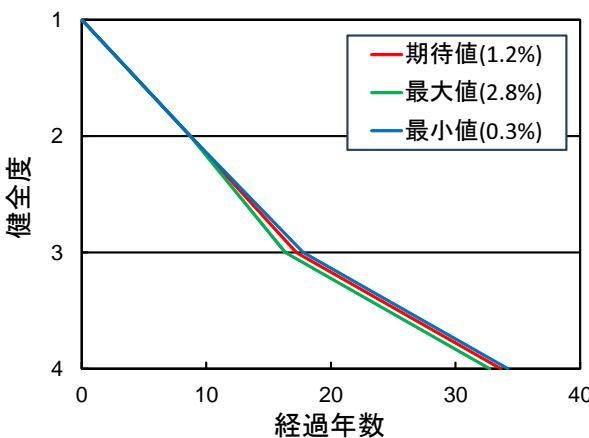


図-8 期待劣化パス【勾配の影響】

に約7年の差が存在することが理解できる。また、図-8から、勾配が大きいトンネルに設置されている灯具ほど、劣化の進展が速く、サンプル中の勾配絶対値最大、最小のトンネルに設置されている灯具間では、期待寿命に約2年の差異が存在することが理解できる。また、図-7、図-8から、灯具の劣化速度に対しては、勾配の絶対値より入口からの距離が大きな影響力を持つことがわかる。

上記の影響因子に関する考察として、入口からの距離に関しては、通常トンネルの外部のみで散布される凍結防止剤が車両の走行によりトンネル内に持ち込まれ舞い上げられることが原因であると考えられる。また、勾配に関しては、下り勾配の場合、速度増加による凍結防止剤の舞い上がりが助長される、登り勾配の場合、アクセルの踏み込みによる排気ガスの増加が硫酸化物、窒素酸化物を含む煤煙を増加させ、灯具の劣化を速めていることが考えられる。なお、本適用事例においては大型交通量、凍結防止剤散布回数は有意

な説明能力を持たなかった。現場管理者の感覚としては両因子ともに、劣化の進展に影響を与えていると考えられているが、対象となったトンネルは単一の路線内に隣接して位置しているため、両者の値に大きな変動がなかったことから有意な説明能力を持たない結果となった。一般的には重要な劣化要因であっても、対象エリアにおいてその変動が微小な場合には、その影響が有意でないと判断される場合も存在する。

7. おわりに

本研究では、点検データの観測期間内に判定基準の変更がなされた事例を対象として、判定基準変更を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを開発した。その際、判定基準変換確率行列を定義し、旧基準健全度と新基準健全度の対応関係を定量化した。さらに、旧基準点検データと新基準点検データを同時に用いて、新基準健全度で定義されるマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推計する方法論を提案した。さらに、旧基準あるいは新基準の点検データのみを用いると期待寿命を過大に評価してしまうような事例として、高速道路トンネル内灯具の点検データを対象とした実証分析を行い、本研究で提案した隠れマルコフ劣化ハザードモデルの有用性を実証した。しかし、本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルに関して、今後に残された研究課題がいくつか存在する。第一に、適用事例の拡大があげられる。本稿の実証分析で獲得された知見は、適用対象とした灯具でのみ適用可能である。また、灯具以外に、RC床版や舗装などでも判定基準が変更された事例が存在する。開発した隠れマルコフ劣化ハザードモデルを、今後、様々な対象に適用する必要がある。第二に、複数回判定基準が変更された事例に対応する必要がある。本研究では、過去に一度、判定基準が変更された事例を対象としたが、RC床版などでは、過去に複数回判定基準が変更された事例が存在する。このような事例における点検データを統合的に用いるためにモデルの拡張が必要となる。第三に、本適用事例においては新旧基準の対応関係に関する事前情報が得られたことから、候補とするマクロ対応モデルの数を絞り込むことが可能であった。しかし、事前情報が得られない場合、想定されるマクロ対応モデル全てに関してモデル比較を行う必要があるが、評価段階数が多くなれば想定されるマクロ対応モデルは膨大な数になることが懸念される。事前情報を用いる以外にもマクロ対応モデルを絞り込む手法が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集,

- No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 2) 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也: サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
 - 3) 小林潔司, 上田孝行: インフラストラクチャのマネジメント: 研究展望, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.15-27, 2003.
 - 4) 杉崎光一, 貝戸清之, 小林潔司: 目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築, 構造工学論文集, Vol.52A, pp.781-790, 2006.
 - 5) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用: 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
 - 6) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング: 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008
 - 7) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2006.
 - 8) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推計, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
 - 9) 西日本高速道路株式会社: 道路付属物点検 (施設) の手引き, 2009
 - 10) 西日本高速道路株式会社: 道路構造物点検要領, 2006
 - 11) 小林潔司, 貝戸清之, 林秀和: 測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル: 土木学会論文集 D, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008.
 - 12) Nam, L. T., 貝戸清之, 小林潔司, 起塚亮輔: ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化: 土木学会論文集 F4, Vol.68, No.2, pp.62-79, 2012.
 - 13) 小林潔司, 貝戸清之, 江口利幸, 大井明, 起塚亮輔: 舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル: 土木学会論文集 D3, Vol.67, No.4, pp.422-440, 2011.
 - 14) Hamilton, J.: A new approach to the economic analysis of nonstationary series and the business cycle, *Econometrica*, Vol. 57(2), pp.357-384, 1989.
 - 15) 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
 - 16) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
 - 17) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
 - 18) Diebolt, J. and Robert, C.P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.
 - 19) Titterton, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
 - 20) Robert, C.P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
 - 21) Robert, C.P., Rydén, T. and Titterton, D.M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.62, pp.57-75, 2000.
 - 22) Dempster, A.P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.39, pp.1-38, 1977.
 - 23) Celeux, G., Hurn, M. and Robert, C.P.: Computational and inferential difficulties with mixture posterior distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.95, pp.957-970, 2000.
 - 24) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statistics, 2001.
 - 25) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.
 - 26) Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.: Sampling-based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85, pp.398-409, 1990.

A HIDDEN MARKOV DETRERIORATION MODEL WITH CHANGE OF INSPECTION CRITERION

Yota YAMADA, Daijiro MIZUTANI, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI