

利用者の確率到着下における最適な 時間帯別通行権発行パターン

王鵬飛¹・赤松隆²・和田健太郎³

¹非会員 東北大学大学院 情報科学研究科 博士後期課程 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)

E-mail: wpf@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院 情報科学研究科 教授 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 東京大学 生産技術研究所 助教 (〒 153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

本論文では、単一ボトルネックを対象として、利用者のランダム到着挙動を考慮した上で、時間帯別ボトルネック通行権の最適発行パターンを明らかにする。この目的を達成するために、まず、拡散方程式で待ち行列長の時々刻々の変化を近似し、総利用者の経済損失（待ち行列遅れ時間とスケジュール遅れ時間による経済損失の総和）の評価モデルを構築する。さらに、4種類の通行権発行関数を外生的に設定し、各経済損失と通行権発行パターンの関係性を解析及び数値計算の手法で分析する。最後に、数値実験を通して、利用者の時間価値、不確実性やリスク回避度に応じた最適発行パターンを求める。

Key Words : TDM, tradable bottleneck permit, Fokker-Planck equation, queuing delay, schedule delay

1. はじめに

交通混雑に対する解決策として、従来の研究では、価格規制と数量規制が提案されている。前者の代表例である混雑料金制¹⁾であり、理論上は混雑を解消する優れた方策である。しかし、もし、道路管理者が誤った利用者の需要情報に基づき料金を設定すると、経済的な損失が発生する。実際に、道路管理者が利用者の交通需要条件を正確に把握することは困難であり、この制度を導入しても社会厚生レベルを改善できるとは限らない。後者の代表例である単純割当制^{2),3)}は利用者の需要情報を必要とせずに、渋滞を解消することができる。しかしながら、利用者の自由な選択を制限するため、制限に起因する社会的損失が発生する恐れがある。

そこで、利用者の自由な選択を保障する割当制として、赤松ら⁴⁾は、ボトルネック通行権取引制度を提案した。これは、道路管理者が特定のボトルネックを特定の時間帯のみを通行できる権利 (i.e., ボトルネック通行権) を設定・発行し、利用者が自由にその通行権を取引する制度である。赤松ら⁴⁾は、ある理想的な状況を仮定すると、この制度の導入により、社会的最適な状態が達成されることを示している。ここで、理想的な状況とは、すべての利用者がボトルネック通行権により指定された時間帯ちょうどにボトルネックに到着するという設定である。そして、これまで、TBP に関する

研究^{4),5),6)}は、全て上記の理想的な設定を前提とする。

しかしながら、実際には、全ての利用者が指定時間帯通りに到着できるとは限らない。実際の状況を想定すると、通行権の指定時間帯より早着・遅着する利用者が存在してしまう。このとき、通行権発行枚数をボトルネック容量と等しく設定すると、各時間帯の到着数は、ボトルネック容量を上回る可能性が高くなり、待ち行列が発生する。

そこで、本研究では、利用者の確率的なボトルネック到着挙動を考慮した上で、利用者全体の経済損失を表現するモデルを構築する。そして、経済損失を最小化する時間帯別の最適な通行権発行パターンを明らかにする。

2. 状況設定

(1) 交通条件の設定

本研究では、総利用者数が住居地から目的地 (i.e., CBD) へ通勤する単一 OD で構成された道路を想定する (図-1 を参照)。途中に交通容量 μ の単一ボトルネックが存在し、全ての利用者は移動する際に必ずこのボトルネックを通過する。ボトルネック通過する際には、原則的に、通過する時間帯のボトルネック通行権を所有していなければならない。なお、全ての利用者の CBD における勤務開始時刻は、ある時間帯に集中するようなパターンを設定する (図-2 を参照)。

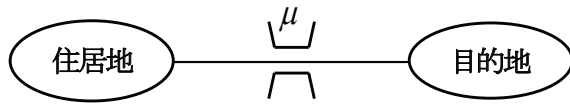


図-1 交通ネットワークの設定

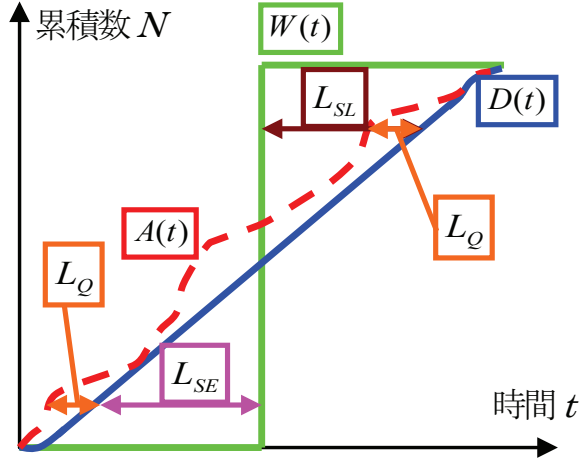


図-2 ボトルネック地点の累積図

(2) 利用者の確率的な到着挙動

各利用者は、できる限り通行権の指定時間帯通りに、ボトルネックへ到着するように、住居地から出発する。しかしながら、現実的な状況では、通行権の指定時間帯通りにボトルネックへ到着できず、早着及び遅着する利用者も存在してしまう（図-2を参照）。ここで、通行権の指定時間帯より早着及び遅着した場合でも、罰金を課されずに、ボトルネックを通過できると設定する。

上記の利用者行動の設定に基づき、利用者のボトルネック到着時間帯は、指定時間帯を中心に分布するような、時間帯に関する確率変数であると考えられる。そのため、各時間帯のボトルネックにおける到着利用者数は、確率的な推移する。ここで、確率的な到着挙動を想定しているため、待ち行列時間などの経済損失は確率変数となることに注意しなければならない。以下では、これらの状況設定の下で解析を進める。

3. モデルの定式化

本章では、利用者の確率的な到着挙動を考慮した上で、各経済損失を分析し、利用者全体の経済損失を最小化する問題を定式化する。具体的には、まず、利用者の経済損失のうち、待ち行列時間を拡散方程式を用いて解析する。その結果、待ち行列時間はある条件付き確率密度関数に従う確率変数として与えられる。次に、不効用関数を設定し、その期待値（i.e., 期待不効用）を、確率変数として得られた経済損失の指標とする。最後

に、各時間帯のボトルネック通行権の発行枚数を制御して、利用者全体の期待不効用を最小化するような最適化問題を定式化する。

(1) 各経済損失の定義

a) 総経済損失の定義

本研究では、利用者経済損失 L は待ち行列時間遅れ L_Q 、スケジュール時間遅れ L_S とそれぞれの重み付け（i.e., 時間価値） α, β の積の線形和で構成される。そして、利用者全体の経済損失 L を、時間帯 t にボトルネックへ到着した利用者 1 人当たりの経済損失 $l(t)$ と通行権発行枚数 $\lambda(t)$ の積は時間に関する総和と与えられる。

$$L = \int_0^T \lambda(t) l(t) dt \equiv \alpha L_Q + \beta L_S \quad (1)$$

その中で、時間帯 t のスケジュール時間 $l_S(t)$ は、利用者到着時刻 t と希望到着時刻 t_W の大きさにより、スケジュール到着時間 $l_{SE}(t)$ 及び遅着時間 $l_{SL}(t)$ を分けられる。

$$\beta l_S(t) = \begin{cases} \beta_E l_{SE}(t) & \text{if } t \leq t_W \\ \beta_L l_{SL}(t) & \text{if } t > t_W \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 β_E 及び β_L はそれぞれ $l_{SE}(t)$ と $l_{SL}(t)$ の重み付け（i.e., 時間価値）である。式 (2) より、同じ利用者に対し、スケジュール到着時間遅れ $l_{SE}(t)$ と遅着時間遅れ $l_{SL}(t)$ が同時に発生するのが不可能であるという意味している。

b) 待ち行列時間による損失

利用者の到着が確率的な場合、各時間帯の待ち行列長は確率的に与えられるため、待ち行列時間 L_Q を確率的に評価しなければならない。そこで、以下では、 L_Q の評価指標として、期待値 $E\{L_Q\}$ 及び標準偏差 $\sigma\{L_Q\}$ を求める。まず、待ち行列の確率的な挙動に関する仮定を説明する。時間帯 t における到着者数は、式 (3) で示すように、期待値にボトルネック通行権の発行枚数 $\lambda(t)$ を持って、正規分布に従うと仮定する。

$$\hat{\lambda}(t) \sim N(\lambda(t), \Delta^2(\lambda)) \quad (3)$$

ここで、 $\Delta^2(\lambda)$ は利用者到着数の分散である。時間間隔 $[t, t+dt]$ の発行枚数 $\lambda(t)$ は一定とすれば、待ち行列長 q の時間間隔 $[t, t+dt]$ における推移は、通行権の発行枚数 $\lambda(t)$ 、ボトルネック容量 μ を用いて、式 (4) のように表すことができる。

$$q(t+dt) - q(t) \sim N((\lambda(t) - \mu)dt, \Delta^2(\lambda)dt) \quad (4)$$

この際、各時間帯の待ち行列長 q の確率分布関数 F は、次の拡散方程式（i.e., Fokker-Planck 方程式; Newell⁷⁾ を参照）に従うことが知られている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(q, t | q_0)}{\partial t} = & -(\lambda(t) - \mu) \frac{\partial F(q, t | q_0)}{\partial q} \\ & + \Delta^2(\lambda) \frac{\partial^2 F(q, t | q_0)}{2\partial q^2} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $F(q, t | q_0)$ は時間帯 $t = 0$ での待ち行列長が q_0 である条件下での時間帯 t に待ち行列長が q となる条件付確率分布関数である。この拡散方程式の制約条件として、待ち行列長 q は非負であることを示す境界条件 (式 (6)) :

$$F(\infty, t | q_0) = 1 \quad F(\infty, t | q_0) = 0 \quad \forall t \quad (6)$$

さらに、時間帯 $t = 0$ での待ち行列長 q の初期条件 (式 (7)) :

$$F(0, t | q_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } q > q_0 \\ 0 & \text{if } q \leq q_0 \end{cases} \quad (7)$$

が定められる。そして、時間帯 t における待ち行列長 q になる確率密度は式 (8) のように与えられる。

$$f(q, t) = F(q + \Delta q, t) - F(q, t) \quad (8)$$

従って、時間帯 t における待ち行列長 q の期待値 $E\{q(t)\}$ と標準偏差 $\sigma\{q(t)\}$ は式 (9)、式 (10) のように表現される。

$$E\{q(t)\} = \int_0^\infty (f(q, t)q) dq \quad (9)$$

$$\sigma\{q(t)\} = \sqrt{\int_0^\infty f(q, t)[q - E\{q(t)\}]^2 dq} \quad (10)$$

ここまでは、待ち行列を台数の単位で評価してきた。しかしながら、損失を考える際には、時間の単位に変換しなくてはならない。そこで、待ち行列長 q をボトルネック容量 μ を除して、待ち行列時間 $l_Q(t)$ へ変換する。そして、拡散方程式の解を代入し、利用者 1 人当たりの待ち行列時間の期待値 $E\{l_Q(t)\}$ と標準偏差 $\sigma\{l_Q(t)\}$ は式 (11)、式 (12) のように与えられる。

$$E\{l_Q(t)\} = \int_0^\infty (f(q, t)q)/\mu dq \quad (11)$$

$$\sigma\{l_Q(t)\} = \sqrt{\int_0^\infty \frac{f(q, t)[q - E\{q(t)\}]^2}{\mu} dq} \quad (12)$$

さらに、総利用者の待ち行列時間の期待値 $E\{L_Q\}$ と標準偏差 $\sigma\{L_Q\}$ は、式 (13)、式 (14) のように導出される。

$$E\{L_Q\} = \int_0^T \lambda(t) \int_0^\infty f(q, t) \left(\frac{q}{\mu}\right) dq dt \quad (13)$$

$$\sigma\{L_Q\} = \int_0^T \lambda(t) \sqrt{\int_0^\infty \frac{f(q, t)[q - E\{q(t)\}]^2}{\mu} dq} dt \quad (14)$$

最後に、式 (13) に重み付け α をかけていれば、待ち行列時間による損失の期待値が得られる。

c) スケジュール遅れ時間による損失

スケジュール早着及び遅着に関しては、簡単のため、確定的な関数に近似して求める。本来、確率的な利用者の到着挙動の下では、等しいボトルネック到着時刻を持つ利用者の中では、異なる勤務開始時刻を持つ利用者が混在する。そのため、スケジュール早着及び遅着は確率変数として評価されるのは自然である。しかしながら、そのようなスケジュール早着及び遅着の評価は困難であるため、ここでは確定的な変数として L_{SE} と L_{SL} 評価する。

ここで、累積流出数 $D(t)$ は通行権発行枚数 $\lambda(t)$ を時間 $[0, t]$ に関して積分した関数であり、累積勤務開始数 $W(t)$ は $t < t_W$ において $W(t) = 0$, $t \geq t_W$ において $W(t) = N$ となる関数である。

時間帯 t における利用者 1 人当たりのスケジュール早着時間 $l_{SE}(t)$ は、式 (15) により、累積勤務開始関数の逆関数と累積流出関数の逆関数の差で定義される。同様に、時間帯 t における利用者 1 人当たりのスケジュール遅着時間 $l_{SL}(t)$ は、式 (16) により累積流出関数の逆関数と累積勤務開始関数の逆関数の差で与えられる。

$$l_{SE}(t) = W^{-1}(n(t)) - D^{-1}(n(t)) \quad (15)$$

$$l_{SL}(t) = D^{-1}(n(t)) - W^{-1}(n(t)) \quad (16)$$

このとき、全利用者のスケジュール早着時間 L_{SE} 及び遅着時間 L_{SL} は、式 (17)、式 (18) のように表現される。

$$L_{SE} = \int_0^T \lambda(t) \left(W^{-1}(n(t)) - D^{-1}(n(t)) \right) dt \quad (17)$$

$$L_{SL} = \int_0^T \lambda(t) \left(D^{-1}(n(t)) - W^{-1}(n(t)) \right) dt \quad (18)$$

式 (17)、式 (18) にそれぞれ重み付け β_E , β_L をかけると、スケジュール早着時間及び遅着時間による損失が得られる。

(2) 最適化問題の定式化

待ち行列時間 L_Q は確率変数であるため、経済損失 L を確率的に評価する必要がある。そこで、不効用関数 $U(L)$ を設定し、不効用の期待値 (i.e., 期待不効用) $E\{U\}$ を経済損失の指標に用いる。ここで、2 次の不効用関数 $U(L)$ を採用すれば、式 (19) のように与えられる。

$$U(L) \equiv L + r(L - E\{L\})^2 \quad (19)$$

ここで、 r は利用者のリスク回避傾向を表し、正のパラメータである。 r が高いほど、道路利用者は経済損失の不確実性 (i.e., 待ち行列時間による損失の不確実性) を回避する傾向があり、経済損失の標準偏差 $\sigma\{L_Q\}$ を小さくするインセンティブが働く。

このとき、利用者全体の期待不効用 $E\{U\}$ は、リスク回避傾向 r により経済損失の期待値 $E\{L\}$ 、 $\sigma\{L\}$ を重み付けした関数 (20) のように定義される。

$$E\{U\} = \alpha E\{L_Q\} + \beta_E L_{SE} + \beta_L L_{SL} + r[\alpha \sigma\{L_Q\}]^2 \quad (20)$$

式 (20) により、期待不効用は、待ち行列時間による損失の期待値 $E\{L_Q\}$ と標準偏差 $\sigma\{L_Q\}$ 、スケジュール早着時間及び遅着時間による損失 L_{SE} 、 L_{SL} の線形和となることがわかる。

これより、最適発行パターンを求める問題を、各時間帯の通行権発行枚数 $\lambda(t)$ を制御変数とする利用者全体の期待不効用 $E\{U\}$ の最小化問題 (式 (21)) として定式化できる。

$$\begin{aligned} \min_{\lambda(t)} E\{U\} &= \min_{\lambda(t)} \alpha E\{L_Q\} + \beta_E L_{SE} + \beta_L L_{SL} \\ &\quad + r[\alpha \sigma\{L_Q\}]^2 \\ \text{subject to} & \quad (21) \\ &\int_0^T \lambda(t) dt = N \\ &\lambda(t) \geq 0 \end{aligned}$$

ただし、発行時間帯長 T は、総利用者数 N である。

4. 分析手法

最適な通行権発行パターンを明らかにする前に、第3章で定式化された最適化問題を解く必要な手法を説明する。本章の構成は以下通りである：4.1 節では、外生的な通行権発行関数の設定を示す。4.2 節では、各経済損失別の分析手法を説明する。4.3 節では、計算の必要な数値設定を示す。

(1) 外生的な通行権発行パターン

最適発行パターンは、無数に存在する通行権発行枚数の時間的推移の中で、利用者全体の期待不効用を最小化するものである。そのため、無数にある発行パターンの中から、唯一の最小化するものを選び出さなくてはならない。このような問題は、無数に存在する発行パターンから最適なものを求めるという組み合わせ最適化問題に相当する問題構造を持っている。従って、厳密な最適発行パターンを求めることは難しい。

そこで、本研究では、複数の通行権発行パターンを外生的に与えて、期待不効用 $E\{U\}$ を数値計算し、そのうち、 $E\{U\}$ を最小化するような発行パターンを最適発行パターンとする。

続いて、外生的に設定する通行権発行パターンについて述べる。通行権取引制度の実用時に、現実的に設定

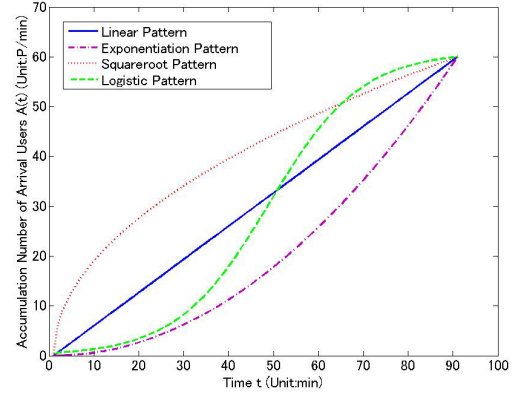


図-3 4 種類の外生的な通行権発行パターン

可能、かつ道路管理者は管理できる複数の発行パターンを、考える必要がある。そこで、本研究では、1つのパラメーター k (i.e., 発行係数) を持つ 4 種類の発行パターン (線形発行パターン、べき乗発行パターン、根号発行パターン、ロジスティック発行パターン) を設定する (図-3)。

$$A_1(t) = k_1 t \quad (22)$$

$$A_2(t) = k_2 t^2 \quad (23)$$

$$A_3(t) = k_3 \sqrt{t} \quad (24)$$

$$A_4(t) = \frac{N}{1 + \exp(Nk_4(t_W - t))} \quad (25)$$

ただし、上記の各累積到着関数に対応する各時間帯の通行権発行枚数は以下のように計算する：

$$\lambda(t) = A(t) - A(t - \Delta t) \quad (26)$$

(2) 各経済損失への分析手法

待ち行列長の確率分布関数 (式 (5)) は偏微分方程式であるため、有限差分法で解くことを考える。より具体的には、まず、メッシュ間隔を決定し、連続の待ち行列長と時間軸を離散化する。次に、待ち行列長の確率分布関数を計算する。さらに、待ち行列長の確率関数を計算する。最後に、待ち行列時間の期待値及び標準偏差を算出できる。ただし、拡散方程式の解が発散しないように、安定性条件を満足する差分メッシュの間隔を注意しなければならない。

一方、スケジュール遅れの定式化に確率変数が含まれていないので、確定的な解析手法でとくことを考えられる。より具体的には、ボトルネック累積流出関数と勤務開始関数を利用し、各時間帯のスケジュール遅れの総和が得られる。

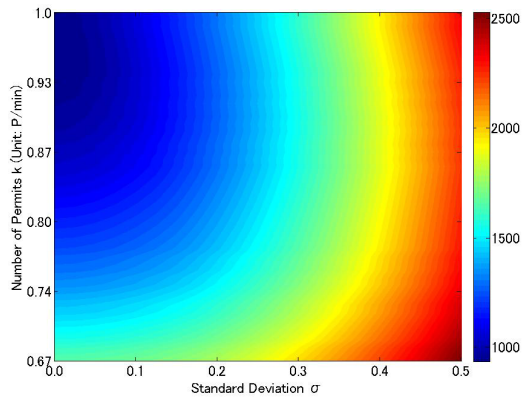


図-4 期待不効用の等高線 (線形発行パターン)

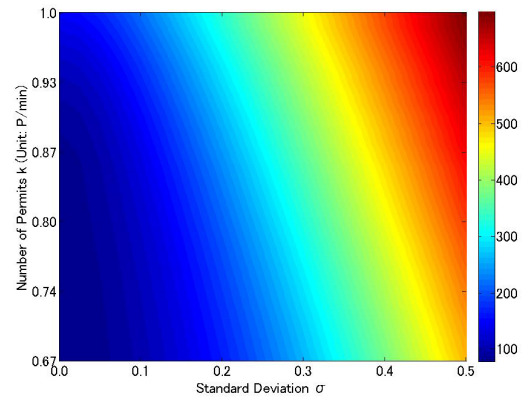


図-5 待ち行列時間の期待値の等高線 (線形発行パターン)

(3) 数値設定

本研究で、計算の必要な数値設定をする。その中で、スケジュール早着及び遅着時間の重み付け、 β_E 及び β_L の数値設定及び待ち行列の重み付け α の動く範囲は Small⁸⁾ を参照する。そして、総利用者数 N 、ボトルネック容量、待ち行列の初期値の設定は赤松ら⁴⁾ へ参照する。

設定した4種類の通行権発行パターンの中で、最適発行パターンは常に4つの中の1つではなく、パラメータ設定値によって変わると考えられる。これは、極端の例で確かめられる。例えば、もし、利用者は待ち行列時間に対する時間価値 α とリスク回避度 r はゼロであれば、スケジュール遅れが最も小さいロジスティック発行パターンは必ず最適発行パターンであることは自明である。

そのため、本研究では、利用者の特性を反映できる時間価値 α 、到着の標準偏差 σ 、リスク回避度 r をある範囲で動かして、各 (α, σ, r) 下での最適な通行権発行パターンを求める。

5. 実験結果と考察

本章では、第4章で示した分析手法で、数値実験を通して、最適な通行権発行パターンを明らかにする。より具体的には、5.1節では、線形発行パターンを用いて、 (α, σ, r) を固定する場合の期待不効用 $E\{U\}$ と発行係数 k^* の関係を示す。5.2節では、 (α, σ, r) が変動する場合の最適な通行権発行パターンを示す。

(1) 期待不効用の特性

本節では、 (α, σ, r) を固定する場合、期待不効用 $E\{U\}$ を最小化する係数 k^* を求める方法を示す。数値実験を通して、期待不効用 $E\{U\}$ の等高線を図-4で示す。この図には、横軸は利用者到着の標準偏差 σ であり、縦

軸は係数 k である。この図により、以下の結論を得られる：(1) σ が大きくなれば、期待不効用が増える。(2) 各 σ の下で、期待不効用 $E\{U\}$ を最小化する最適な係数 k^* が存在する。

具体的には、まず、結論(1)について、 σ は期待不効用 $E\{U\}$ へ与える影響は、 σ と待ち行列時間の期待値 $E\{L_Q\}$ の関係より説明できる(図-4に参照)。図-4により、係数 k を大きく設定すれば、待ち行列時間の期待値 $E\{L_Q\}$ が増加する。また、 σ が大きくなれば、 $E\{L_Q\}$ も増加する。すなわち、 σ が $E\{U\}$ へ与える影響は、実際に、 $E\{L_Q\}$ への影響である。

次に、結論(2)は、もし σ を固定すれば、 $E\{U\}(k|\sigma)$ の計算より、最適な係数 k^* を求められることと意味している。そのため、同じ手法で、そのほかの3種類の通行権発行パターンの中で、 (α, σ, r) を固定する場合の最適な係数 k^* を求められる。

(2) 最適な通行権発行パターン

本節では、 (α, σ, r) が変動する場合の最適な通行権発行パターンを求める。具体的には、まず、 (α, σ, r) の動く範囲を設定する。次に、各 (α, σ, r) の下で、4種類の通行権発行パターンの中で、達した最小化する期待不効用を計算する。最後に、計算した4つの期待不効用を比較し、最適な通行権発行パターンを探し出す。

上記の手順で、 (α, σ, r) が変動する場合の最適な通行権発行パターンを求めて、結果を図-6で示す。この図により、最適な通行権発行パターン(色別)は (α, σ, r) によって異なるとわかる。

6. おわりに

本研究では、利用者の確率的な到着を考慮した上で、総利用者の経済損失を最小化するモデルを構築した。そして、分析と実験を通して、 (α, σ, r) を固定する場合

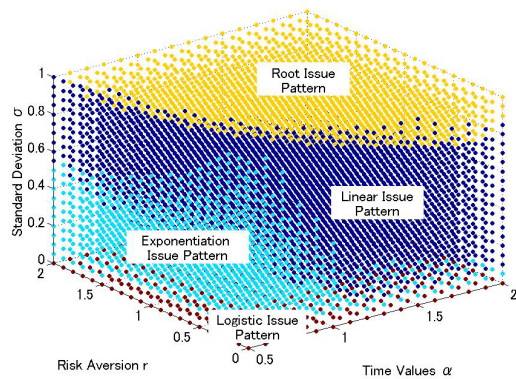


図-6 最適な通行権発行パターン

に、期待不効用 $E\{U\}$ と係数 k の関係を示した。最後に、 (α, σ, r) が変動する場合での最適な通行権の発行パターンを明らかにした。

本研究の内容を踏まえて、今後の研究課題を述べる。本研究では、スケジュール早着及び遅着による経済損失を評価する際に、異なる勤務開始時刻を持つ利用者が、混在していることを考慮していない。そのため、より正確な利用者のランダム到着挙動を考慮したモデルの構築、スケジュール早着及び遅着による確率的な分析手法は、今後の検討が必要である。

参考文献

- 1) Yang, H. and Huang, H.J.: Mathematical and Economic Theory of Road Pricing, Elsevier, Oxford, 2005.
- 2) Akahane, H. and Kuwahara, M.: A basic study on trip reservation systems for recreational trips on motorways. *Proceedings of the 3th World Congress on Intelligent Transportation System*, pp.73-84, 1996.
- 3) Wong, J.T.: Basic concepts for a system for advance booking for highway use. *Transport Policy* 4, pp.109-114, 1997.
- 4) 赤松隆, 佐藤慎太郎, Nguyen, X.L.: 時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究, 土木学会論文集 D, Vol.62, pp.605-620, 2006.
- 5) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: an auction mechanism with day-to-day capacity control. *Transportation Research Part E* 60, pp.94-112, 2013.
- 6) 和田健太郎, 王鵬飛, 赤松隆, 長江剛志: 複数時点で購入可能な通行権取引市場のメカニズム, 投稿中.
- 7) Newell, G.F.: Applications of queuing theory, Chapman and Hall, 1971.
- 8) Small, K.A.: The scheduling of consumer activities: work trips. *The American Economic Review*, pp.467-479, 1982.

(2014. 4. 25 受付)