マルコフ連鎖による
動的ネットワーク交通流配分

石原　雅晃[1]・井料　隆雅[2]

[1]学生会員　神戸大学　大学院工学研究科市民工学専攻（〒657-8501神戸市灘区六甲台町1-1）
E-mail: 143t105t@stu.kobe-u.ac.jp

[2]正会員　神戸大学　大学院工学研究科市民工学専攻（〒657-8501神戸市灘区六甲台町1-1）
E-mail: iryo@kobe-u.ac.jp

動的な交通流をネットワークに配分する方法としては動的利用者均衡配分があるが，均衡解を必ず解く解法が知られていない事や，唯一性など望ましいとされる解の性質が保証されていない事など，重大な問題がある事が指摘されている．均衡解はDay-to-dayダイナミクスの収束点の候補であるという観点から言えば，均衡解そのものを直接求める代わりに，そのDay-to-dayダイナミクスを計算し，その結果得られる解の軌跡を均衡解の代わりに用いる事によってこれらの問題が緩和されることが期待できよう．本研究では車両を離散化した動的ネットワーク交通流配分問題を定式化し，車両1台1台の日々の経路変更を離散マルコフ連鎖でモデル化した．このマルコフ連鎖が吸収点を持てば，それはNash均衡に相当する．そうでない場合は定常性を確認する必要がある．テストネットワークでの計算により，小規模なネットワークにおいて定常性を統計学的に確認できたが，別のネットワークでは計算した範囲では定常性が不十分であった．

Key Words : *dynamic traffic assignment, Nash equilibrium, Markov chain, Day-to-day dynamics*

1.　はじめに

動的な交通流をネットワークに配分する方法としては動的利用者均衡配分があり，その解法には様々なアプローチのものが提案されている． Kuwahara and Akamatsuは均衡状態であれば同時刻にリンクに入る車両は必ず同時刻に目的地に到達するため，出発時刻によって分割する方法による解法を確認している[1)]．井料は車両を離散化し，均衡状態をNash均衡により定義し，解を求めている[2)]．しかし，どのような解法においてもネットワークによらず解を求めることができていない事や，唯一性など望ましいとされる解の性質が保証されていない事など，重要な問題があることが知られている[3)]．

Wei et al.はベイズの定理により均衡状態において車両配分結果が表れる確率を導出し，均衡解を確率分布とすることで形式的な解の唯一性を担保している[4), 5)]．この方法は確率的利用者均衡配分問題の一種であり，利用者が最短経路以外の経路を確率的に選択することが前提となっている．

本研究では，経路配分については最短経路への配分を原則とする．ただし既述のとおり均衡状態を何らかの解法で確実に発見することは難しい．この問題を回避するために，本研究ではDay-to-dayダイナミクスの収束点が本来実現する均衡解である，という観点から，均衡解そのものを直接求めるのではなく，Day-to-day ダイナミクスを決めてそれを直接計算することを考える．そして，その結果得られる解の軌跡を，軌跡がひとつの点に収束しようとしまいと，均衡解の代わりとして用いる方法を提案する．井料[2)]と同様に車両を離散化した動的ネットワーク交通流配分問題を定式化し，Day-to-dayダイナミクスを離散マルコフ連鎖でモデル化した．このマルコフ連鎖が吸収点を持てば，それはNash均衡に相当する．そうでない場合に解の軌跡が定常性を持つようになるのであれば，到達することのない均衡状態の代わりにその定常な状態を実現し得る解として計算を終了することができるのではないかと考える．マルコフ連鎖の結果の定常性の有無はマルコフ連鎖の性質と統計学的な方法によりそれぞれ判断する．テストネットワークによる計算結果を示し，その結果の解析を行う．

2. 配分計算と結果の集計方法

(1) 車両と交通流モデルの定式化

リンクの集合をE，ノードの集合をV，リンク$l \in E$の上流端ノードを$v_u(l)$，下流端ノードを$v_d(l)$と記す．離散的に記述する全車両の集合をNとする．車両$i \in N$の起終点ノードo_i，d_i，出発時刻τ_i，車両間隔h_iは外生的に与える．車両iがo_iからd_iまで連続するリンク$l_1, l_2, \ldots, l_L$をこの順番で通過するとき，その経路を$r_i = (l_1, l_2, \ldots, l_L)$と示す．車両の経路選択肢集合は$R_i$で示す．経路$r_i$はリンクの集合ともみなす．全車両の経路選択はベクトル$\mathbf{r}$と記述する．経路ベクトルが$\mathbf{r}$のときにリンク$l \in E$に配分されている車両を$N^*(l;\mathbf{r}) = \{i \mid i \in N, l \in r_i\}$と記述する．

車両$i \in N$のリンク$l \in r_i$への流入時刻，流出時刻，目的地到着時刻を$t_i(l;\mathbf{r})$，$u_i(l;\mathbf{r})$，$g_i(\mathbf{r})$と示す．$g_i(\mathbf{r})$は経路最下流のリンクl_Lからの流出時刻$u_i(l_L;\mathbf{r})$と等しい．$t_i(l;\mathbf{r})$，$u_i(l;\mathbf{r})$は$l \notin r_i$については定義されない．

本研究では混雑を表すために，ボトルネックモデルを用いる．リンク$l \in r_i$に車両がそれ以上短い間隔ではリンクを通過することはできない値として最小ヘッドウェイを設定し，それより小さいヘッドウェイの交通流が流入しようとした場合には，その交通流のリンク流入時刻を最小ヘッドウェイとの差分だけ遅らせる．

(2) Day-to-dayモデルのアルゴリズム

本研究において用いたDay-to-dayモデルは，各車両がそのときの交通状況に応じて最短経路を選ぶことが日々繰り返されることを表現するように定式化してある．具体的なアルゴリズムを以下に示す．

Step1:自由旅行時間における最短経路に全車両Nを配分した初期状態を作り，$n=0$とする．この時の車両iの選択経路をr_i^0とする．

Step2:無作為に選んだ車両$j \in N$を一度ネットワークから取り除き，他の車両が配分された状態の中で可能な全ての経路を選択する場合について計算し，その中で旅行時間が最小となる経路r_j^{n+1}に再配分する．複数の最短経路がある場合は任意の1本に配分する．ただし，現在使っていない経路以外を最短経路として抽出したが，その旅行時間が現在使っている経路の旅行時間と同じになった場合は，現在使っている経路に戻す．

Step3:すべての車両が最短経路を選択している状態が達成したことが確認できたら，そこで均衡状態に達したとして計算を終了する．そうでない場合はStep1と2を反復する．

(3) 結果の分析方法

(a) 日数の単位

Day-to-dayダイナミクスを表すにあたり，車両1台の経路変更を1日として定義する．これは明らかに非現実的な設定ではあるが，1日に多量な車両が同時に経路を変更すると相互に作用し交通流を効率よく観測することができない．そこで1台の経路変更を1 日とすることで順次交通流の変化を観測する．全車両2000台を選択し配分することを1サイクル，200サイクルを1ターン，480ターンを1チェーンとする．1チェーンは1本の独立したマルコフ連鎖の系列である． 各チェーン内で観測される量（旅行時間など）の分布が一定の期間の中で等しいことを時間的に分布が等しいと呼ぶ．一方で．異なるチェーン間で観測される量の分布が等しいことを空間的に分布が等しいとする．

(b) 収束判定指標

マルコフ連鎖はエルゴード性を有する場合に定常性が存在するとされている[6]．エルゴード性とは時間的分布と空間的分布が等しいという性質であるが，この性質を理論的に証明することは困難であるため，図で分布が等しいかどうかを判断する．それに加えて，Heidelberger and Welchによるマルコフ連鎖の定常性を統計学的に確かめる手法[7]を用いる．この方法では，あるマルコフ連鎖のj番目の出力を$Y(j)$としたときに，

$$S_0 = 0, S_n = \sum_{j=1}^{n} Y(j), n \geq 1, \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y(j) \quad (1)$$

として，統計量は，

$$B_n(t) = \frac{S_{[nt]} - [nt]\overline{Y}}{\sqrt{np(0)}} \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

とする． $p(0)$は系列の周波数 0 の Power spectral densityを計算している．マルコフ連鎖が定常状態でなおかつ$n \to \infty$のときに，$B_n(t)$はBrownian Bridge と呼ばれる分布に収束するとされている．

本研究では以上の検定を既存のRによるプログラムを用いて検定を行う[8]．このプログラムでは，Brownian Bridgeから

$$\int_0^1 B_n(t)^2\, dt = CVM(B_n) \quad (3)$$

と定義されるCramer-von Mises statisticという統計量を用いて検定を行っている．

3.　テストネットワークでの計算結果

交通量配分をいくつかのテストネットワークについて適用し，その結果がどのような挙動を示すかを考察する．対象とするネットワークを以下に示す．

(1)　5-Links Network

もっとも簡単なネットワーク例として，**図-1**の4個のノードと5本のリンクからなるネットワークを考える．リンクの自由旅行時間，最小ヘッドウェイ，各車両のOD，ヘッドウェイ，出発時刻は外生的に与える（**表-1**，**表-2**）．

乱数を変更した計算を5回実行した（すなわち，5本のチェーンを生成し）．その結果を**図-2**に示す．いずれの計算においてもリンク平均変化旅行時間（最短経路より長い経路から最短経路へ動かした際の旅行時間の変動を全車両にわたって一定の日数にわたって平均したもの）は変動しながらではあるが最終的には均衡解(Nash均衡)に到達した．

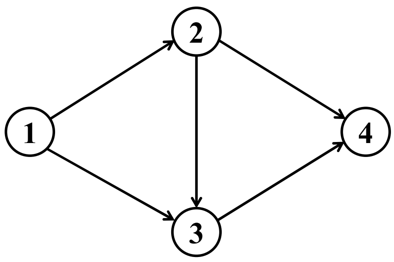

図-1 5-Links Networkの構造

表-1　5-Links Networkのパラメータ設定

リンク	自由旅行時間(0.1秒)	最小ヘッドウェイ(0.1秒)
1→2	6000	20
1→3	12000	40
2→3	4000	20
2→4	9000	40
3→4	5000	20

表-2　5-Links NetworkのOD交通量のパラメータ設定

起点	終点	OD交通量(台)	ヘッドウェイ(0.1秒)
1	4	300	10
2	4	300	10
3	4	300	10

表-3　Multiple NetworkのOD交通量のパラメータ設定

起点	終点	OD交通量(台)	Headway(0.1秒)
1	4	1000	20
3	2	1000	20

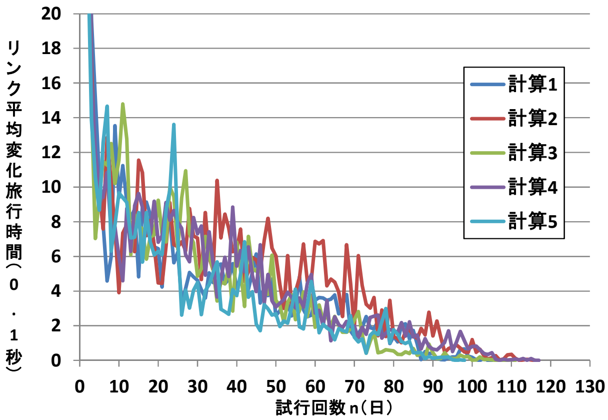

図-2 5-Links Networkでのリンク旅行時間の変化量

(2)　Multiple Network

Iryoによって動的均衡配分問題の均衡解が複数存在する例としてあげられた**図-3**のネットワーク[9]をMultiple Network と名付け，このネットワークに対して**表-3**の交通需要を与えて計算を行う．このネットワークでは2つのボトルネックを通過する経路が存在する．OD をノード1 からノード4 と，ノード3からノード2 の2 つとすると，どちらのODでも2 つのボトルネックを通過する経路とボトルネックのない経路が存在する．ボトルネックのある経路は2 つのOD で重なる部分があるため，OD 交通量が相互に影響を与えることが，均衡状態が一意に求まらない理由とされている．本ネットワークについては，それぞれ480ターンからなる80本のチェーンを並列して計算した．

図-4にDay-to-dayモデルの計算を実行時のリンク旅行時間の変化量を示す．このように，5-Links Networkの場合と異なり，5回の計算いずれも1000回の試行中に均衡状態に達することはなかった．しかし，グラフからリンク平均変化旅行時間がある値の付近で変化を続けている事がわかる．

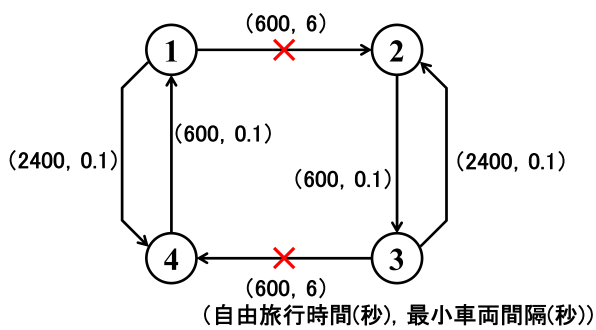

図-3 Multiple Networkの構造

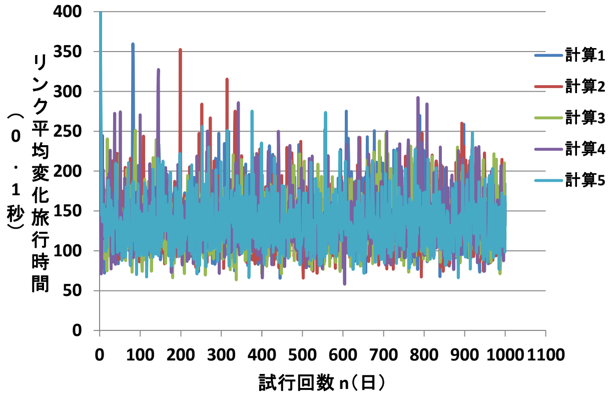

図-4 Multiple Networkのリンク旅行時間の変化量

(3)　Sioux Falls Network

複雑なネットワークの例としてLeblanc et al.によって用いられている24 個のノードと76 本のリンクからなる**図-5**に示すネットワークを用いる[10]．Sioux Fallsのネットワークを基に作られているため，本研究ではSioux Falls Networkと呼ぶ．需要OD交通量についてはLeblanc et al.の用いているままでは多すぎるため，1000分の1の台数を外生的に与える．

表-4　リンク毎の最大遅れ時間

リンク	最大遅れ時間（分）	標準偏差	リンク	最大遅れ時間（分）	標準偏差
16→10	16.62	0	22→21	4.82	0
20→21	15.17	0.52	6→5	4.79	0.11
20→22	14.65	0.28	11→12	4.76	0.03
8→9	14.43	0.47	6→2	4.4	0.17
20→19	14.41	0.31	11→4	4.16	0.22
5→6	12.95	0.15	12→11	4.09	0.23
2→6	12.82	0.17	14→23	4.05	0.17
10→17	12.47	0.28	21→22	4.02	0
9→8	12.45	0.03	4→11	3.5	0.25
17→10	12.03	0.44	21→24	2.85	0.08
10→16	11.77	0.18	6→8	2.45	0
17→19	10.92	0.07	5→9	2.28	0.02
19→20	10.85	0.02	16→8	2.25	0.15
19→17	10.72	0.13	23→14	2.25	0.06
22→20	10.66	0.14	11→10	1.92	0.01
14→11	10.59	0.16	8→16	1.5	0
14→15	10.49	0.2	7→8	1.48	0.05
8→6	9.99	0.03	9→5	1.29	0.02
23→22	9.92	0.19	22→15	1.04	0.01
21→20	8.08	0	8→7	0.93	0
13→24	8.07	0.01	10→15	0.84	0.01
22→23	7.16	0.11	24→23	0.68	0
11→14	6.97	0.13	10→11	0.47	0.01
15→14	6.85	0.12	15→10	0.35	0
16→17	6.74	0.06	15→22	0.32	0.01
24→13	5.53	0	10→9	0.15	0
23→24	5.44	0.09	9→10	0.12	0
17→16	5.4	0	3→4	0.08	0.01
24→21	5.09	0.05	19→15	0.05	0
			15→19	0.03	0

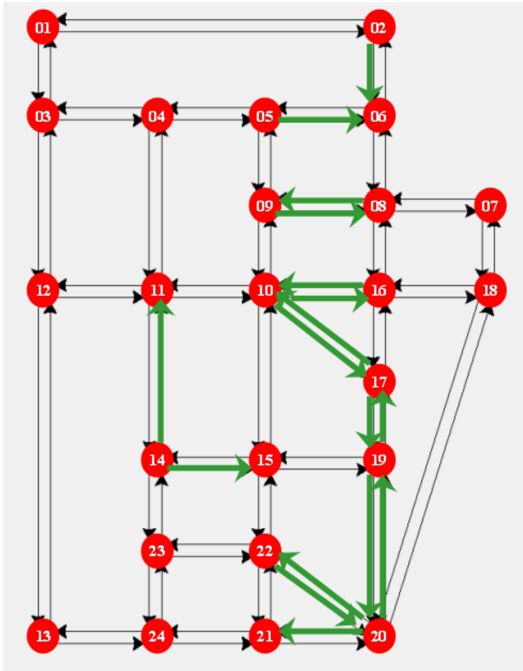

図-5 Sioux Falls Networkのネットワークと，遅れ時間が10分以上となったリンク（緑太矢印で示される）

11ターンから15ターンまでDay-to-dayダイナミクスの計算結果を集計したものを**表-4**に示す（最大遅れ時間が0だったリンクは表示していない）．また，遅れ時間が10分以上のリンクを**図-5**に太い緑色の矢印で示した．**表–4**では遅れの存在するリンクについてその最大遅れ時間とその標準偏差を示している．一般に標準偏差にばらつきがあり，収束には至っていないようである．

4.　解の軌跡が持つ特徴の検証

均衡状態が求まらなかったMultiple Networkの計算結果の軌跡が持つ特徴を検証する．

(1)　エルゴード性の検証

エルゴード性の有無を理論的に述べることは困難であるため，集計した分布が等しいかどうかにより判断する．分布が等しいことを言うために，時間軸によって区切った分布を時間的分布，異なる時間軸間の分布を空間的分布と呼び，どちらもが等しいことを検証する．

横軸にリンク1 の各日の中での最大旅行時間，縦軸にリンク2 の各日の中での最大旅行時間をとり，車両台数を色の濃さで表した2次元のヒストグラムを作成する．ヒストグラムは80 ターンごとに集計する．**図-6**は第1 チェーンの①81～160 ターン，②161～240 ターン，③241～320 ターン，④321～400 ターン，⑤401～480 ターンを示している．また，

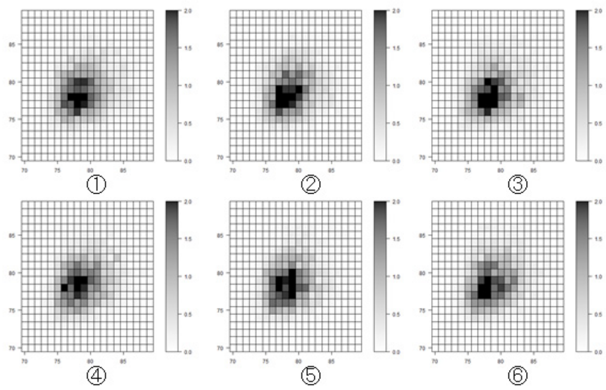

図-6 Multiple Networkの比較分布

⑥は各チェーンにおける第81 ターンを80 チェーン分とっている．各分布を比較すると，およそ等しいことが見て取れるため，このマルコフ連鎖はエルゴード性を有していると考えることができよう．

(2) 統計学的手法による検証

リンク旅行時間（厳密には，各リンクで観測された各日の中での最大の遅れ時間）の系列に対してすでに説明したHeidelberger and Welchによる方法を適用し，マルコフ連鎖に定常性があるかどうかを統計学的に調べる．

(a) Multiple Network

80チェーンすべての最後の5 ターンについて検定を行い，p値を算出した．各チェーンで得られたp値のヒストグラムを図-7に示す．どのチェーンにおいても有意水準5%で棄却はできない（p値がいずれも0.5以上である）ことがわかる．このことは，Multiple Networkのケースについては，各チェーン最後の200 万日についての定常性は少なくとも否定できないことを示しており，おそらく結果として定常性があると考えて差し支えないだろう．

(b) Sioux Falls Network

1本のチェーンの11ターンから15ターンについて，遅れ時間の存在するリンクに対するp値の分布を図-8に示す．有意水準5%では有意でないものが多く見られる．このことは，Multiple Networkとは異なり，定常性が完全には満たされていないことを示す．

5. 結論および今後の課題

本研究では動的な交通量配分問題を，車を1日あたり1台だけ新しい最短経路に移動するという手順を含むDay-to-dayダイナミクスを用いて計算する方法を提案した．提案手法のダイナミクスがもしなんらかの点に収束すればそれは結果としてNash均衡を解いたことになる．一方，ネットワークの設定によっては，均衡状態に収束せず，交通状況が変動しつづけるような状況があることが数値計算例により確認された．しかしこのような場合であっても，その変動はエルゴード性があることが，数値計算例のうちMultiple Networkについては統計学的な手法により確認出来た．定常な状態に達するのであれば従来の交通量配分問題の目的である均衡状態を求めるのではなく，到達し得る定常な状態を求める事を交通量配分のアプローチとすることができよう．

一方で，Sioux Falls Networkのような複雑なネットワークでは，今回の計算ではエルゴード性が完全には確認できていない．理由としては，交通状況が今回の計算ではまだ定常な状態に達成していなかったか，そもそも提案したDay-to-dayダイナミクスのエルゴード性の存在自体が常に保証されるとは限らないかのいずれかであろう．これについては今後検討を要する．また，このアプローチを確かなものとするには，提案したような統計学的手法に限らず，定常性が担保されることを理論的に証明することが求められよう．

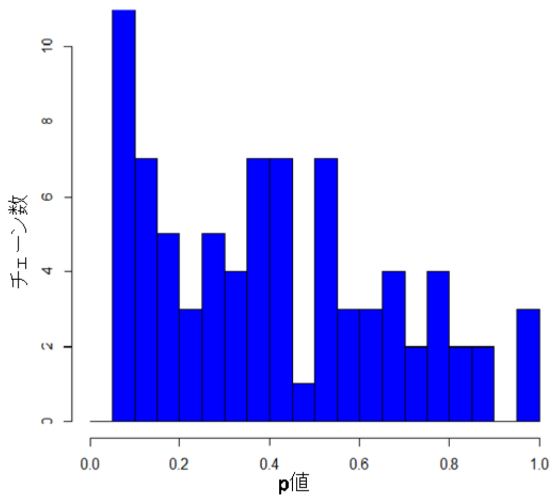

図-7 Multiple Networkの定常性の検定結果

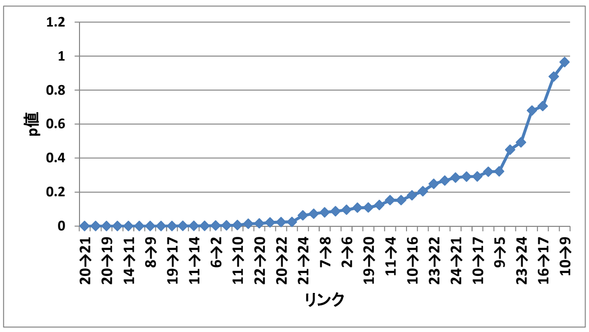

図-8 Sioux Falls Networkの定常性の検定結果

参考文献

1) Kuwahara, M., and T. Akamatsu.: Dynamic Equilibrium Assignment with Queues for a One-to-Many OD Pattern,Transportation and Traffic Theory, Proceedings of the 12th International Symposium on the Theory of Traffic Flow and Transportation, edited by C.F.Daganzo, pp.185-204, 1993.
2) 井料　隆雅：車両を離散化した動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol.67,No.1,pp.70-83, 2011.
3) Iryo, T.: Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology, Transportmetrica B: Transport Dynamics, Vol.1, No.1, 52-67, 2013.
4) Wei, C., Asakura, Y. and Iryo, T.: The posterior probability distribution of traffic flow: a new scheme for the assignment of stochastic flow, Transportmetrica, iFirst, 1-19, 2012.
5) Wei, C., Asakura, Y. and Iryo, T.: Formulating the within-day dynamic stochastic traffic assignment problem from a Bayesian perspective, Transportation Research Part B 59, 45-57, 2014.
6) 舟木直久：確率論，朝倉書店，2004.
7) Heidelberger.P. and Welch.P.: Simulation Run Length Control in the Presence of an Initial Transient, Operations Research, Vol.31, No.6, 1983.
8) Output analysis and diagnostics for MCMC, http://cran.r-project.org/web/packages/coda/index.html. [Accessed 2 February 2014]
9) Iryo.T.: Multiple Equilibria in a Dynamic Traffic Network, Transportation Research Part B 45 (6),867-879,2011.
10) L.J.Leblanc, E.K.Morlok, and W.P.Pierskalla:An efficient approach to solving the road network equilibrium assignment problem, Traspn Res. Vol.9, pp.309-318, 1975.