

# q-一般化ロジットモデルの推定特性： 経路選択行動を例に

力石 真<sup>1</sup>・中山晶一朗<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 広島大学大学院 国際協力研究科 特任准教授 (〒739-8529 広島県東広島市鏡山1-5-1)

E-mail: chikaraishim@hiroshima-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 金沢大学 環境デザイン学系 教授 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

本研究では, logit, weibitモデルを特殊解として含むq-logitモデルの特性を整理し, その推定可能性を検証する. 具体的には, まず, 誤差分布の形状, 効用関数の形状, 直接/交差弾性値の視点からq-logitモデルの特徴を整理し, q-logitに含まれるパラメータ $q$ がリスク/不確実性下での意思決定を特徴付ける重要なパラメータであることを示す. その後, 真値が既知であるシミュレーションデータを用いてモデルの推定特性を検証する. 検証の結果, (1) q-logitモデルの推定コストは小さく, 実務の文脈でも容易に適用可能なモデルであること, (2) 選択枝間の誤差相関を有するケースにおいても, パラメータ $q$ を安定的に推定出来ることが確認された.

**Key Words :** q-logit, route choice, risk, estimation properties

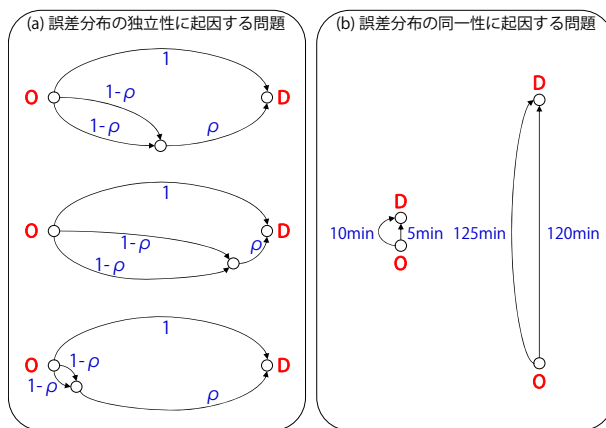
## 1. はじめに

離散選択モデルの開発系譜を眺めると, その中心は誤差構造の柔軟な表現を通じたモデル改良にあることが確認できる. これまでに, 大別して表-1に挙げる4種類の努力が重ねられてきており, 選択枝間/サンプル間の誤差項の独立性 (Independent distribution)及び同一性 (Identical distribution)の仮定に起因する問題が議論されてきた. とりわけ選択枝間の独立性の問題への対処については, 美しい閉形式として導出可能な一般化極値分布に基づく各種離散選択モデルや, 様々な誤差構造を近似的に表現するmixed logitモデルが開発され (Train, 2009), 道具立ては概ね整ったと思われる.

一方, 当然のことながら適切なモデル構造は扱う現象の性質に依存する. 例えば経路選択行動をモデル化するにあたっては, Sheffi (1985)が古くから指摘するように, (1) 選択枝間の誤差項の独立性仮定の緩和だけでなく, (2) サンプル間の誤差項の同一性仮定の緩和が重要となる. 具体的には, 前者が経路の重複等に起因する選択枝間の類似性の問題に関連するのに対し (図-1 (a)), 後者は, 例えば移動時間の増大に伴い移動時間に対する認知のばらつきが増大するといった, 確定項と誤差項の依存関係の問題に関連する (図-1 (b)). 例えば図1 (b)に示した各ODペアにlogitモデルを適用した場合, (移動距離

表-1 誤差構造に着目した離散選択モデルの分類

	選択枝間	サンプル間
独立性仮定への対処	e.g., nested logit, mixed logit	e.g., mass point, panel mixed logit, multilevel logit
同一性仮定への対処	e.g., heteroscedastic logit, mixed logit	e.g., weibit



出典: Sheffi (1985)を元に筆者作成

図-1 経路選択における誤差項の独立性及び同一性の問題

離の長短に依らず) 経路間の移動時間の差分は5分となるため, 経路1及び2の選択確率は両ODペアで同一となる. しかしながら, 実際の選択行動を考えると, 5分と10分の2つの経路がある場合には前者を選択する確率が極めて高くなる一方, 120分と125分の経路の場合, 移動時間の不確実性のため5分の差異が重要と認知されるこ

とは少なく、両経路の選択確率は50%に近づく可能性が高い。

以上の同一性の仮定に起因する問題に対し、近年、誤差項にワイブル分布を仮定したweibitモデルの利用可能性が議論されている (Castillo et al., 2008; Fosgerau and Bierlaire, 2009; Li, 2011; Kitthamkesom and Chen, 2014). weibitモデルは閉形式で依存関係を扱える極めて操作性の高いモデルだが、ワイブル分布により規定される依存関係が仮定されるにとどまり (具体的には、誤差項の分散が確定項の2乗に比例すると仮定)、実際の行動特性を反映していない点が問題として残る。

一方、Nakayama (2013)、中山 (2013)は、logitモデル及びweibitモデルを特殊解を含むq-一般化ロジットモデル (以下、q-logitモデルと表記) を提案している。本稿では、q-logitモデルを「logitモデル、weibitモデルを特殊解として含む、q-指数関数/q-対数関数を用いて定義される離散選択モデル」とする。ここでq-指数関数/q-対数関数とは、指数関数、対数関数をパラメータqの導入により拡張した関数である (詳細は後述)。Nakayama (2013)のモデルは、一般化極値分布から導かれた理論的に優れたモデルであるが、パラメータqの行動論的解釈が困難であること、高度に非線形であるため実データを用いたモデルの同定が難しい点が問題として残る。

そこで本稿では、まず、Nakayama (2013)のモデルを簡略化したq-logitモデルを定式化し、簡略版q-logitモデルのもとでは、パラメータqが誤差項と確定項の依存関係を記述する行動論的に解釈可能なパラメータであることを示す。その後、q-logitモデルの推定可能性及び実証分析上の有用性を示す。

次章では、logit、weibitモデルの特徴を整理した後、q-logitモデルを導入する。次に、q-logitモデルの特徴を、(a) 誤差分布の形状、(b) 直接弾性値・交差弾性値、(c) 効用関数の形状の3つの視点から整理し、パラメータqがq-logitモデルを特徴付ける重要なパラメータであることを示す。その後、真値が既知であるシミュレーションデータを用いてモデルの同定可能性を検証する。検証に当たっては (1) 選択肢間の誤差相関の影響がない状況下での推定特性、(2) 選択肢間の誤差相関の影響がある状況下での推定特性をそれぞれ示し、独立性仮定に起因する問題と同一性仮定に起因する問題の識別可能性を検証する。最後に本研究の成果と今後の課題をまとめる。

## 2. q-一般化ロジット(q-logit)モデル

本章では、logitモデル、weibitモデルについて整理した後、Nakayama (2013)のq-logitモデルを導入する。その後、Nakayama (2013)の実践上の問題点を踏まえ簡便化したq-

logitモデルを導入し、その特性を整理する。

### (1) logitモデルとweibitモデル

logitモデルとweibitモデルの差異は、(1) 誤差分布の形状、(2) 効用関数の形状の2つの視点から説明できる (Castillo et al., 2008)。

#### a) 誤差分布の形状の観点からの説明

logitモデルの場合、個人*i*が認知する経路*j*の一般化費用*t*が以下のガンベル分布 (*gumbel* ( $\theta_j, \lambda_j$ )) に従うと仮定する。

$$G(t) = \exp[-\exp(\theta_j(t - \lambda_j))] \quad (1)$$

認知された一般化費用の分布が全ての経路で独立であると仮定すれば、以下のlogitモデルが導出される。

$$P_{ij} = \frac{\exp(-\theta_i \lambda_{ij})}{\sum_k \exp(-\theta_i \lambda_{ik})} \quad (2)$$

ここで $\lambda_{ij}$ は実際の一般化費用であり、 $\theta_{ij}$ は未知パラメータである。

同様にweibitモデルの場合、個人*i*が認知する経路*j*の一般化費用*t*が以下のワイブル分布 (*weibull* ( $\xi_j, \alpha_j, \beta_j$ )) に従うと仮定する。

$$G(t) = \exp\left[-\left(\frac{t - \xi_j}{\alpha_j}\right)^{\beta_j}\right] \quad (3)$$

認知された一般化費用の分布が全ての経路で独立であると仮定すれば、以下のweibitモデルが導出される (証明はCastillo et al. (2008)やKitthamkesom and Chen (2014)参照)。

$$P_{ij} = \frac{\alpha_{ij}^{-\beta_j}}{\sum_k \alpha_{ik}^{-\beta_j}} \quad (4)$$

ここで $\alpha_{ij}$ は実際の一般化費用であり、 $\beta_{ij}$ は未知パラメ

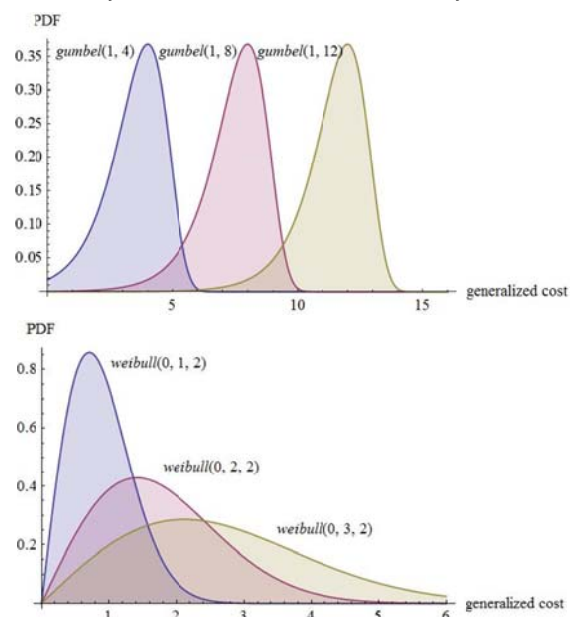


図-2 ガンベル分布(上)及びワイブル分布(下)の密度関数

ータである。

誤差分布の形状から見たlogitモデル、weibitモデルの特徴は、図-2に示すように、前者は一般化費用に依らず一定の分布形状となる一方（サンプル間で誤差分布が同一）、後者は一般化費用の増大に伴い分散が増大する仮定が置かれている点にある。

**b) 効用関数の形状の観点からの説明**

weibitモデルは、効用関数に対数関数を採用logitモデルからも導出できる。具体的には、効用関数を

$$u_{ij} = -\theta_i \ln(v_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

とし、誤差項にガンベル分布を仮定すると、

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta_i \ln(v_{ij}))}{\sum_k \exp(-\theta_i \ln(v_{ik}))} \quad (6)$$

$$= \frac{v_{ij}^{-\theta_i}}{\sum_k v_{ik}^{-\theta_i}}$$

となり、weibitモデルが導出される。図-3にそれぞれの効用関数を図示する。

効用関数の形状の観点からは、logitモデルとweibitモデルの選択は、リスク／不確実性下での意思決定メカニズムの選択として捉えることができる。具体的には、logitモデルを採用する場合、 $(u''(x)=0)$ なのでリスク中立型の効用関数となる一方、weibitモデルを採用する場合、 $(u''(x)>0)$ なのでリスク愛好型の効用関数となる。例として、1/2の確率で移動時間が10分と100分となる経路と、確率1で移動時間が55分となる経路があるとす。また、簡略化のため、一般化費用として移動時間のみを考慮する。このとき、線形型効用関数 $u=-v$ の場合、両経路とも効用の期待値は-55となる一方、対数型効用関数 $u=-\ln(v)$ の場合、前者の効用の期待値は $\{-\ln(10)-\ln(100)\}/2=-3.45$ となるが、後者の効用の期待値は $-\ln(55)=-4.01$ となり、前者の期待値の方が高くなる。言い換えると、対数型効用関数は、損失（一般化費用の増大）に対してはリスク愛好的になるという考えを反映した効用関数と見なせる。ただし、対数型効用関数の場合、リスク愛好の程度は関数形に依ってのみ規定されており、実際の行動特性を反

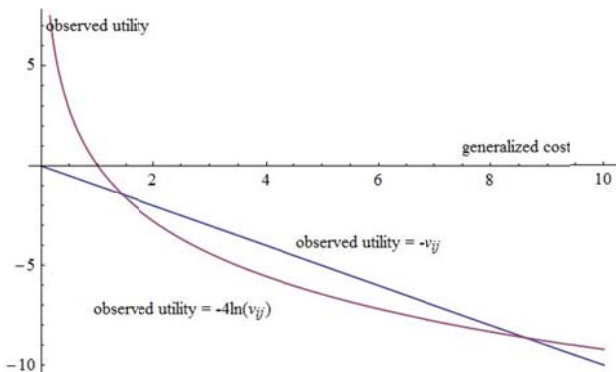


図-3 効用関数の形状

映している訳ではない点に注意する必要がある。この点は、当然のことながら、図-2に示したワイブル分布の分散が確定項の2乗の関数で規定される問題と等価である。

**c) logitモデルとweibitモデルの統合**

Fosgerau and Bierlaire (2009)が実証分析を通して示したように、logitモデルとweibitモデルのどちらを採用すべきかはデータの特性に依存する。また、上述のリスク状況下での意思決定の議論からも分かるように、本来はリスク中立型からリスク愛好型までを包括した関数を採用し、データ特性からリスク性向を特徴付けることが望ましい。

以上のような問題意識に対応可能なq-logitモデルが、Nakayama (2013)、中山 (2013)によって提案されている。

**(2) Nakayama (2013) のq-logitモデル**

q-logitモデルは、logitモデル及びweibitモデルを特殊解に含む一般化された離散選択モデルであり、ツァリス統計を援用してlogitモデルの一般化を試みたものである。ツァリス統計はボルツマン-ギブス統計を拡張した統計であり、その基礎となる関数は、q-対数関数/q-指数関数である。それぞれ以下のように定義される (例えば、須鎗, 2010)。

$$q\text{-対数関数} : \ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (7)$$

$$q\text{-指数関数} : \exp_q(x) := [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (8)$$

$q=1$ のとき、それぞれ通常対数関数、指数関数となる性質を有する。

Nakayama (2013)は、各選択肢の効用が一般化極値分布

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 - (1-q)\frac{x - v_{ij}}{s - (1-q)v_{ij}}\right]\right\}^{1/(1-q)} \quad (9)$$

$$= \exp\left[-\exp_q\left(-\frac{x - v_{ij}}{s - (1-q)v_{ij}}\right)\right]$$

に従うと仮定した場合、以下で定義される離散選択モデルを導出できることを示している。

$$p_{ij} = \frac{\exp_q(\hat{v}_{ij})}{\sum_k \exp_q(\hat{v}_{ik})} \quad (10)$$

where  $\hat{v}_{ij} = \frac{v_{ij}}{s - (1-q)v_{ij}}$

ここで $v_{ij}$ は選択肢 $j$ の効用の確定項、 $s, q$ は未知パラメータである。

式(4)は、 $q=1$ の場合、

$$p_{ij} = \frac{\exp(v_{ij})}{\sum_k \exp(v_{ik})} \quad (11)$$

となりlogitモデルが導出される。また $\tilde{v}_{ij}=1+(1-q)v_{ij}$ とすると、以下のweibit型のモデルが導出される。

$$p_{ij} = \frac{(\tilde{v}_{ij})^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_k (\tilde{v}_{ik})^{\frac{1}{1-q}}} \quad (12)$$

本モデルは、一般化極値分布から演繹的に導出された点において優れていると言えるが、パラメータ $q$ の行動論的解釈が困難であること、また、効用関数が高度に非線形であるため実データを用いたモデル同定が困難である点が問題として残る。そこで本研究では、誤差分布の形状の議論と効用関数の形状の議論が密接に関連することを念頭に、次に述べる簡便な $q$ -logitモデルを考える。

#### (4) $q$ -対数関数を用いた簡便な $q$ -logitモデル

確定項に $q$ -対数関数を採用した以下の効用関数を想定する。

$$u_{ij} = -\theta \ln_q(v_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (13)$$

誤差項 $\varepsilon_{ij}$ にガンベル分布を採用すると、以下の離散選択モデルが導出される。

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta \ln_q(v_{ij}))}{\sum_k \exp(-\theta \ln_q(v_{ik}))} \quad (14)$$

効用関数の確定項を $q$ -対数関数により定義しただけの極めてシンプルなlogitモデルの改良であるが、本モデル、とりわけパラメータ $q$ が確定項と誤差項の依存関係を表現する重要なパラメータであることを(1) 誤差分布の形状、(2) 直接弾性値・交差弾性値、(3) 効用関数の形状の観点から示す。

なお、以降においては、Fosgerau and Bierlaire (2009)を参考に、以下の効用関数を設定する。

$$v_{ij} = x_{ij} + \beta x_{2ij} \quad (15)$$

ここで $x_{ij}$ は経路 $j$ の移動費用、 $x_{2ij}$ は移動時間であり $\beta$ は未知パラメータである。ここで、

$$\begin{aligned} VoT &= \frac{\partial -\theta \ln_q v_j}{\partial x_{j2}} \bigg/ \frac{\partial -\theta \ln_q v_j}{\partial x_{j1}} \\ &= \theta \beta v_j^{-q} / \theta v_j^{-q} \\ &= \beta \end{aligned} \quad (16)$$

となるため、 $\beta$ は時間価値を表すパラメータである。従って $v_{ij}$ は経路 $j$ の一般化費用となる。

#### a) 誤差分布の形状

$q=0$ のとき、

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta v_{ij})}{\sum_k \exp(-\theta v_{ik})} \quad (17)$$

$q=1$ のとき、

$$p_{ij} = \frac{v_{ij}^{-\theta}}{\sum_k v_{ik}^{-\theta}} \quad (18)$$

となり、logitモデル及びweibitモデルを特殊解として含有していることが確認できる。また、これらの特殊形に該当するかどうかはパラメータ $q$ のみで決まるというシンプルな性質を有する。

#### b) 直接弾性値・交差弾性値

直接弾性値 $E$ （選択枝 $j$ の要因 $x_{jk}$ が1%変化したときに選択枝 $j$ の選択確率 $p_j$ が変化する割合）は、以下のように計算できる。

$$E_{x_{j1}} = \frac{x_{j1}}{p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_{j1}} = -\frac{x_{j1}\theta}{v_j^q} [1 - p_j] \quad (19)$$

$$E_{x_{j2}} = \frac{x_{j2}}{p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_{j2}} = -\frac{x_{j2}\theta\beta}{v_j^q} [1 - p_j] \quad (20)$$

同様に、交差弾性値 $E'$ （選択枝 $j$ の要因 $x_{jk}$ が1%変化したときに選択枝 $k$ の選択確率 $p_k$ が変化する割合）は、以下のように計算できる。

$$E'_{x_{j1}} = \frac{x_{j1}}{p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial x_{j1}} = -\frac{x_{j1}\theta}{v_j^q} p_j \quad (21)$$

$$E'_{x_{j2}} = \frac{x_{j2}}{p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial x_{j2}} = -\frac{x_{j2}\theta\beta}{v_j^q} p_j \quad (22)$$

以上より、 $q$ -logitモデルの直接弾性値及び交差弾性値は、通常のロジット型の直接弾性値を $v_j^q$ で除した値となることが確認された。このことは、 $q>0$ の場合、一般化費用の上昇に伴い各変数の弾性値は低下することを意味する。

#### c) 効用関数の形状

$q$ -対数関数を用いて定義される効用関数は、累級効用関数 (Power utility function)の一種と見なせるため (例えば Gerber and Pafumi, 1998)、マクロ経済理論やファイナンス理論でしばしば議論されるリスク性向の観点から行動論的解釈が可能である。具体的には、効用関数のリスク性向は関数の曲がり具合の大きさによって表されるので、以下のアロー-プラットの絶対リスク回避度及び相対リスク回避度によって効用関数の特性を示すことができる (Atkinson; 1970; Luenberger, 1998; 小塩, 2010)。なお、ここでは慣例に従いリスク回避という用語を使用しているが、リスク愛好型効用関数の特性もこれらの指標を用いて確認できる。

絶対的リスク回避度 (限界効用の変化率) :

$$a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (23)$$

相対的リスク回避度 (限界効用の弾力性) :

$$r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (24)$$

式 (13)の一般化費用に対する絶対的/相対的リスク回避度を算出すると、それぞれ $q/v_{ij}$ 、 $q$ となり、(1) 一般化費用 $v_{ij}$ が高くなると絶対的リスク回避度 (限界効用の変



化率)は減少する, (2) 相対的リスク回避度(限界効用の弾力性)は一般化費用の水準に依らず一定であることが確認できる. 前者は一般化費用が大きくなるほど, より大きなリスク(一般化費用の実現値のばらつき)をとってもよいと考えることを, 後者は, 一般化費用の大きさに依らず, 一般化費用1%の上昇に対して限界効用は $q\%$ 減少することを示している. 後者の性質は, 相対的リスク回避度一定(constant relative risk aversion)の性質として広く知られており, 実際,  $q$ -対数関数は平等性を議論する際に頻繁に利用されるAtkinson (1970)の効用関数の一種と見なせる(小塩, 2010).

#### d) $q$ -logitモデルの特性: まとめ

上のa), b), c)より,  $q$ -logitモデルに含まれるパラメータ $q$ は, 確定項と誤差項の依存関係を表現しており, パラメータ $q$ で記述される依存関係は, (1) 誤差分布の議論(ガンベル分布かワイブル分布か)にも, (2) 効用関数の形状の議論(リスク中立型の効用関数かリスク愛好型の効用関数か)にも帰着できることが示された. とりわけ, パラメータ $q$ のみを導入したシンプルなlogitモデルの拡張にも関わらず, 誤差項の同一性仮定に起因する問題への対処を, 行動理解を手助けしつつ行える点が本モデルの特徴である. ただし, 本モデルの実証分析上の有用性は, パラメータ $q$ を安定的に推定できるかどうかにかける.

そこで次章では, パラメータ $q$ の推定可能性を数値計算により検証する. また, 通常, 実データは同一性の問題だけでなく独立性の問題を有するため, 誤差相関を有する場合においても $q$ を特定できるかどうかを確認する.

### 3. 数値計算

#### (1) シミュレーションデータの作成

本研究では, 計14パターン of シミュレーションデータを使用する. シミュレーションデータは以下の手順で作成する.

##### a) 選択肢の設定

図-4に示す3肢選択問題を想定する.

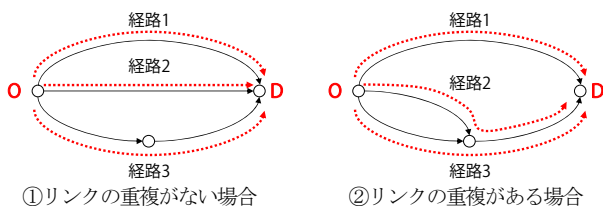


図-4 本研究で対象とする3肢選択問題

##### b) 効用関数の設定

個人 $i$ が経路 $j$ の利用から得る効用を以下の式で定義す

る.

$$u_{ij} = -\theta \ln_q(x_{1ij} + \beta x_{2ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (25)$$

ここで, パラメータの真値を以下のように設定する.

$\theta$ : 2.0

$\beta$ : 1.5

$q$ : 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0の7パターン ( $q=0.0$ のときlogitモデル,  $q=1.0$ のときweibitモデル)

#### c) 誤差項の生成

##### ① リンクの重複がない場合

$\varepsilon_{ij}$ に分散を $\pi^2/6$ としたガンベル分布(すなわちスケールパラメータを1としたガンベル分布)を採用し, 誤差項を生成する.

##### ② リンクの重複がある場合

以下の式に基づき誤差項を生成する.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i1} &= e_{i1} \\ \varepsilon_{i2} &= \eta_{i23} + e_{i2} \\ \varepsilon_{i3} &= \eta_{i23} + e_{i3} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $e_{ij}$ は分散 $\pi^2/6$ のガンベル分布,  $\eta_{i23}$ は平均0分散 $\sigma^2$ の正規分布を仮定する. したがって誤差項 $\{\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i3}\}$ の共分散行列は, 以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} \pi^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \pi^2/6 & \sigma^2 \\ 0 & \sigma^2 & \sigma^2 + \pi^2/6 \end{pmatrix} \quad (27)$$

本研究では,  $\sigma^2=1$ をリンクの重複があるケースとする.

#### d) 説明変数の生成

全ての経路に対して, 移動費用 $x_{1ij}$ 及び移動時間 $x_{2ij}$ を以下の乱数より生成する.

$x_{1ij}$ : 最小値0.1, 最大値1の1様乱数

$x_{2ij}$ : 最小値0.1, 最大値1の1様乱数

#### e) 選択結果の生成

生成した説明変数, 誤差項を効用関数に代入し3つの経路の効用を算出し, 最も効用の高い経路を選択結果とする.

以上の手順に基づき, サンプル数10,000のシミュレーションデータを計14パターン作成した(表-2).

表-2 シミュレーションデータ

	(a) リンクの重複がない場合	(b) リンクの重複がある場合
$q=0.0$	データセット1	データセット8
$q=0.1$	データセット2	データセット9
$q=0.3$	データセット3	データセット10
$q=0.5$	データセット4	データセット11
$q=0.7$	データセット5	データセット12
$q=0.9$	データセット6	データセット13
$q=1.0$	データセット7	データセット14

(2) モデル構造

本数値計算では、以下の2パターンモデルを (a) リンクの重複がない場合、(b) リンクの重複がある場合、それぞれに適用する。

① q-logitモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta \ln_q(v_{ij}))}{\sum_k \exp(-\theta \ln_q(v_{ik}))} \quad (28)$$

$$u_{ij} = -\theta \ln_q(x_{1ij} + \beta x_{2ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (29)$$

$$q = \exp(qq) / [1 + \exp(qq)] \quad (30)$$

$\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i3}$ : スケールパラメータ1のガンベル分布に従う誤差項

$\theta, \beta, qq$ : 未知パラメータ

② mixed q-logitモデル

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta \ln_q(v_{ij}))}{\sum_k \exp(-\theta \ln_q(v_{ik}))} \quad (31)$$

$$u_{ij} = -\theta \ln_q(x_{1ij} + \beta x_{2ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (32)$$

$$q = \exp(qq) / [1 + \exp(qq)] \quad (33)$$

$$\varepsilon_{i1} = e_{i1}, \varepsilon_{i2} = \eta_{i23} + e_{i2}, \varepsilon_{i3} = \eta_{i23} + e_{i3} \quad (34)$$

$e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}$ : スケールパラメータ1のガンベル分布に従う誤差項

$\eta_i$ : 平均0, 分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う誤差項

$\theta, \beta, \sigma, qq$ : 未知パラメータ

なお、当然ながら、(a)のケースについてはq-logitモデルが、(b)のケースについてはmixed q-logitモデルが適切なものと考えられるが、ここでは、(b)のケースに対するq-logitモデルの適用可能性、(a)のケースに対するmixed q-logitモデルの適用可能性についても併せて検討する。これは、前者は、誤差構造が実際のデータ特性とは異なる場合においても安定的にパラメータ $q$ を推定出来るかどうかを、後者は、実際には誤差相関のないデータに対し、誤差相関が存在し得る可能性を考慮したmixed q-logitモデルを適用した場合（すなわち余分なパラメータを導入した場合）においても安定的にパラメータ $q$ を推定出来るかどうかを検証することを狙いとしている。

(3) パラメータ推定の安定性

まず、q-logitモデルの推定の安定性を確認する。具体的には、パラメータの初期値を乱数により100セット作成し、これらを初期値とした場合の100回分の推定結果のばらつきを確認する。なお、ここではリンクの重複がない場合のデータセット1~7のデータのみ使用する。推定には、代表的な準ニュートン法であるBFGS法を用いた。初期値は以下の乱数により発生させた。

$\theta$ : 最小値-4, 最大値0の一樣乱数

$\beta$ : 最小値0, 最大値3の一樣乱数

$qq$ : 最小値-3, 最大値3の一樣乱数

表-3 パラメータ推定の安定性検証結果

		$\theta$	$\beta$	$qq$	$LL$
データセット1	最小値	-2.024	1.500	-3.287	-8844
	第1四分位数	-2.013	1.507	-3.018	-8844
	中央値	-2.012	1.507	-3.017	-8844
	平均値	-2.013	1.507	-2.993	-8844
	第3四分位数	-2.012	1.507	-2.966	-8844
	最大値	-2.008	1.509	-2.648	-8844
	分散	2.58E-06	6.78E-07	4.90E-03	3.14E-05
	推定エラー	21/100			
データセット2	最小値	-2.011	1.517	-1.958	-8902
	第1四分位数	-1.999	1.518	-1.918	-8902
	中央値	-1.999	1.518	-1.917	-8902
	平均値	-2.000	1.518	-1.917	-8902
	第3四分位数	-1.999	1.518	-1.917	-8902
	最大値	-1.997	1.518	-1.792	-8902
	分散	1.69E-06	2.37E-08	2.42E-04	1.04E-05
	推定エラー	14/100			
データセット3	最小値	-1.998	1.527	-0.802	-9012
	第1四分位数	-1.996	1.528	-0.716	-9012
	中央値	-1.996	1.528	-0.716	-9012
	平均値	-1.996	1.528	-0.718	-9012
	第3四分位数	-1.996	1.528	-0.716	-9012
	最大値	-1.988	1.532	-0.701	-9012
	分散	8.73E-07	2.11E-07	1.05E-04	1.46E-05
	推定エラー	13/100			
データセット4	最小値	-1.985	1.521	0.069	-9128
	第1四分位数	-1.985	1.522	0.077	-9128
	中央値	-1.985	1.522	0.077	-9128
	平均値	-1.985	1.522	0.077	-9128
	第3四分位数	-1.985	1.522	0.077	-9128
	最大値	-1.984	1.522	0.082	-9128
	分散	3.39E-08	2.64E-08	3.26E-06	5.39E-09
	推定エラー	6/100			
データセット5	最小値	-2.043	1.529	0.977	-9205
	第1四分位数	-1.991	1.529	0.995	-9198
	中央値	-1.991	1.529	0.995	-9198
	平均値	-1.992	1.530	1.167	-9198
	第3四分位数	-1.991	1.529	0.996	-9198
	最大値	-1.991	1.547	17.070	-9198
	分散	2.80E-05	3.40E-06	2.75E+0	5.16E-01
	推定エラー	6/100			
データセット6	最小値	-1.989	1.541	2.253	-9255
	第1四分位数	-1.988	1.542	2.350	-9255
	中央値	-1.988	1.542	2.351	-9255
	平均値	-1.988	1.542	2.348	-9255
	第3四分位数	-1.988	1.542	2.352	-9255
	最大値	-1.987	1.543	2.436	-9255
	分散	1.17E-07	4.63E-08	4.58E-04	9.17E-07
	推定エラー	23/100			
データセット7	最小値	-1.997	1.541	3.747	-9266
	第1四分位数	-1.997	1.543	5.204	-9266
	中央値	-1.997	1.543	5.755	-9266
	平均値	-1.996	1.543	6.256	-9266
	第3四分位数	-1.996	1.543	6.586	-9266
	最大値	-1.993	1.544	20.408	-9266
	分散	7.81E-07	2.15E-07	4.86E+0	3.77E-04
	推定エラー	4/100			

表-4 logit, weibit, q-logitモデルの推定結果

	真値			logitモデル				weibitモデル				q-logitモデル						最終対数尤度			
	$\theta$	$\beta$	$q$	$\theta$		$\beta$		$\theta$		$\beta$		$\theta$		$\beta$		$q^{(1)}$		logit	weibit	q-logit	
				param	t-値	param	t-値	param	t-値	param	t-値	param	t-値	param	t-値 <sup>(2)</sup>	t-値 <sup>(3)</sup>					
データセット1	-2	1.5	0	-1.994	-35.09	1.506	31.68	-2.243	-53.51	1.555	28.71	-2.012	-31.70	1.507	31.57	0.047	0.11	2.25	-8844.2	-8935.3	-8844.0
データセット2	-2	1.5	0.1	-1.948	-34.51	1.515	31.10	-2.211	-53.13	1.562	28.35	-1.999	-32.51	1.518	30.87	0.128	0.76	5.19	-8903.0	-8977.4	-8901.6
データセット3	-2	1.5	0.3	-1.869	-33.51	1.519	30.05	-2.151	-52.42	1.564	27.76	-1.996	-35.52	1.528	29.56	0.328	4.00	8.19	-9021.3	-9056.8	-9012.1
データセット4	-2	1.5	0.5	-1.798	-32.61	1.506	29.01	-2.083	-51.58	1.549	27.13	-1.985	-39.14	1.522	28.33	0.519	7.52	6.96	-9150.7	-9150.6	-9128.0
データセット5	-2	1.5	0.7	-1.742	-31.85	1.503	28.20	-2.043	-51.06	1.547	26.78	-1.991	-43.42	1.529	27.35	0.730	8.92	3.30	-9241.5	-9204.7	-9197.7
データセット6	-2	1.5	0.9	-1.688	-31.09	1.505	27.43	-2.004	-50.55	1.548	26.40	-1.988	-46.66	1.542	26.49	0.913	4.87	0.46	-9323.2	-9255.9	-9255.2
データセット7	-2	1.5	1	-1.674	-30.88	1.502	27.20	-1.997	-50.46	1.543	26.40	-1.996	-49.70	1.543	26.39	0.994	0.87	0.01	-9349.6	-9265.7	-9265.8
データセット8	-2	1.5	0	-1.813	-32.73	1.535	29.32	-2.057	-51.21	1.586	26.59	-1.818	-30.13	1.535	29.29	0.014	0.01	0.85	-9089.3	-9178.7	-9089.3
データセット9	-2	1.5	0.1	-1.784	-32.36	1.533	28.91	-2.035	-50.93	1.583	26.40	-1.824	-29.86	1.535	28.76	0.104	0.48	4.18	-9136.7	-9208.2	-9135.8
データセット10	-2	1.5	0.3	-1.696	-31.14	1.536	27.67	-1.961	-49.91	1.576	25.66	-1.810	-32.53	1.541	27.34	0.304	3.33	7.62	-9272.2	-9308.0	-9265.2
データセット11	-2	1.5	0.5	-1.656	-30.62	1.529	27.09	-1.930	-49.49	1.570	25.40	-1.825	-35.83	1.541	26.59	0.478	6.45	7.05	-9342.7	-9349.6	-9325.6
データセット12	-2	1.5	0.7	-1.580	-29.52	1.535	26.02	-1.872	-48.62	1.569	24.80	-1.813	-39.66	1.552	25.43	0.687	8.57	3.90	-9453.5	-9427.2	-9418.7
データセット13	-2	1.5	0.9	-1.544	-28.99	1.532	25.47	-1.851	-48.31	1.564	24.65	-1.833	-43.97	1.557	24.81	0.895	5.35	0.63	-9514.1	-9456.0	-9455.0
データセット14	-2	1.5	1	-1.532	-28.82	1.527	25.27	-1.848	-48.26	1.557	24.68	-1.847	-47.88	1.557	24.68	0.996	0.79	0.00	-9538.8	-9461.5	-9461.5

1)  $q = \exp(qq)/(1+\exp(qq))$ とし, qqを推定

2) 標準偏差の計算にデルタ法を使用 (null:  $q=0$ )

3) 標準偏差の計算にデルタ法を使用 (null:  $q=1$ )

表-3に推定結果を示す。表より、1-2割程度の推定エラーがあるものの、概ね安定的にパラメータ $q$ を推定出来ていることが確認できる。ここで推定エラーとは、パラメータの推定値及び/又はその標準誤差が得られなかった推定結果を指し、ほとんどはヘッセ行列の逆行列が計算できなかったことによる。また、(1)  $q$ を0.5に固定したモデルを推定し、(2) (1)の推定結果を初期値としてモデルを推定する2段階の手続きを経ると、極めて安定的にモデルを推定可能であることが確認され、q-logitモデルの推定コストは小さいものと考えられる。

(4) logit, weibit, q-logitモデルの比較

表-4にlogit, weibit, q-logitモデルの推定結果を示す。表より、以下のことが確認出来る。

- i. q-logitモデルの推定結果をみると、 $q=0.0$ のときlogitモデル、 $q=1.0$ のときweibitモデルと概ね同じ結果となっており、両モデルを特殊解として含んだモデル構造となっていることが確認出来る。
- ii.  $0.1 < q < 0.9$ のとき、q-logitモデルのモデル適合度はlogitモデル、weibitモデルよりも高くなっており、特に $q$ が0.5のとき、モデル精度の改善が大きい。
- iii. リンクの重複がない場合（データセット1~7）については、q-logitモデルのパラメータ $\theta$ の推定値は、どのケースについても概ね真値となった。一方、logitモデルの場合は $q$ が1に近づくにつれ、weibitモデルの場合は $q$ が0に近づくにつれ、真値から剥離する。このことは、( $\theta$ はロジットモデルのスケールパラメータと解釈できるため) logitモデルの場合、移動費用や移動時間に対する感度を過小評価してしまう傾向にあることを、weibitモデルの場合、過大評価してしまう傾向にあることを示唆する。
- iv. リンクの重複がない場合（データセット1~7）については、パラメータ $\beta$ の推定値を見ると、logitモデル

については $q$ の値に依らず真値が推定されていることが確認された。weibitモデルについては、 $q$ の値に依らず3%程度時間価値が高く算出される傾向がある。q-logitモデルの場合、 $q$ の値が小さいケースは真値に近いが、 $q$ の値が大きくなるにつれて最大3%程度の系統誤差が発生する傾向が確認された。

- v. リンクの重複がある場合（データセット8~14）、パラメータ $\theta$ 、パラメータ $\beta$ に系統誤差が発生することが確認された。ただし、パラメータ $q$ については安定的に推定出来ることが分かった。

まとめると、結果より、q-logitモデルは、logitモデル、weibitモデルを特殊解として含むモデルであり、十分に両モデルを近似できることが示された。

(5) mixed q-logitモデルによる選択肢間の誤差相関と誤差分布形状の識別可能性

表-5にmixed logit, mixed weibit, mixed q-logitモデルの推定結果を示す。推定にはマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた。表より、以下のことが確認出来る。

- i. リンクの重複がない場合（データセット1~7）の結果より、実際には誤差相関のないデータに対し誤差相関を推定するmixed型のモデルを当てはめても、パラメータ $\theta, \beta, q$ の推定値にバイアスはほとんどかからないことが確認できる。
- i. リンクの重複がある場合（データセット8~14）の結果より、mixed型のモデルを適用することによって、誤差相関により生じていたバイアスは概ね補正されることが確認できる。

以上より、選択肢間の誤差相関と誤差分布の形状は今回のケースでは十分に識別可能であることが示された。このことは、(1) 選択肢間の誤差項の独立性仮定の緩和、(2) サンプル間の誤差項の同一性仮定の緩和の問題を一つのモデル内で同時に扱うことが可能であることを示唆

表-5 mixed logit, mixed weibit, mixed q-logitモデルの推定結果

	真値			mixed logit モデル						mixed weibit モデル					
	$\theta$	$\beta$	$q$	$\theta$		$\beta$		$\sigma$		$\theta$		$\beta$		$\sigma$	
				param	t-値	param	t-値	param	t-値 <sup>1)</sup>	param	t-値	param	t-値 <sup>1)</sup>		
データセット 1	-2	1.5	0	-2.016	-34.00	1.509	31.52	0.321	3.58	-2.252	-51.17	1.560	28.37	0.169	1.51
データセット 2	-2	1.5	0.1	-1.956	-34.16	1.517	30.98	0.197	2.56	-2.242	-48.07	1.567	27.96	0.350	2.91
データセット 3	-2	1.5	0.3	-1.892	-32.69	1.521	30.02	0.344	4.91	-2.190	-46.12	1.570	27.68	0.397	3.15
データセット 4	-2	1.5	0.5	-1.812	-32.14	1.509	28.61	0.276	3.99	-2.109	-45.79	1.554	26.86	0.317	2.40
データセット 5	-2	1.5	0.7	-1.752	-31.61	1.505	28.22	0.230	3.38	-2.080	-44.27	1.553	26.56	0.395	2.90
データセット 6	-2	1.5	0.9	-1.709	-30.36	1.507	27.46	0.333	3.30	-2.012	-48.89	1.553	26.21	0.183	2.28
データセット 7	-2	1.5	1	-1.689	-29.70	1.504	27.09	0.285	2.20	-2.024	-46.11	1.548	26.38	0.333	2.78
データセット 8	-2	1.5	0	-1.996	-29.55	1.539	29.43	1.035	10.99	-2.290	-39.38	1.594	26.45	1.083	10.26
データセット 9	-2	1.5	0.1	-1.969	-29.54	1.538	29.34	1.053	10.26	-2.273	-38.39	1.589	26.50	1.103	9.86
データセット 10	-2	1.5	0.3	-1.873	-28.94	1.542	27.63	1.063	11.36	-2.196	-39.22	1.584	25.85	1.123	11.10
データセット 11	-2	1.5	0.5	-1.829	-27.52	1.535	27.36	1.064	10.26	-2.160	-40.19	1.578	25.35	1.116	11.60
データセット 12	-2	1.5	0.7	-1.746	-27.39	1.543	26.22	1.074	10.51	-2.098	-38.92	1.577	24.64	1.124	11.28
データセット 13	-2	1.5	0.9	-1.703	-26.86	1.541	25.65	1.070	10.25	-2.070	-37.48	1.572	24.53	1.113	10.21
データセット 14	-2	1.5	1	-1.686	-26.38	1.538	25.11	1.062	9.89	-2.067	-38.48	1.568	24.74	1.116	10.98

	真値			mixed q-logit モデル									最終対数尤度		
	$\theta$	$\beta$	$q$	$\theta$		$\beta$		$\sigma$		$q^2)$			mixed logit	mixed weibit	mixed q-logit
				param	t-値	param	t-値	param	t-値 <sup>1)</sup>	param	t-値 <sup>3)</sup>	t-値 <sup>4)</sup>			
データセット 1	-2	1.5	0	-2.041	-32.78	1.510	31.66	0.246	2.13	0.083	1.51	16.70	-8827.2	-8654.6	-8560.5
データセット 2	-2	1.5	0.1	-2.031	-32.56	1.522	31.16	0.368	4.01	0.140	2.07	12.64	-8626.7	-8536.8	-8785.4
データセット 3	-2	1.5	0.3	-2.020	-33.98	1.532	29.63	0.328	2.62	0.332	4.49	9.06	-8613.7	-8693.7	-8701.8
データセット 4	-2	1.5	0.5	-2.020	-37.30	1.526	28.19	0.398	4.17	0.524	7.17	6.50	-8842.8	-8692.8	-8933.7
データセット 5	-2	1.5	0.7	-1.995	-42.90	1.534	27.05	0.154	4.07	0.731	9.95	3.66	-8752.0	-9127.6	-9085.0
データセット 6	-2	1.5	0.9	-2.009	-44.03	1.546	26.13	0.326	3.05	0.898	14.95	1.69	-9147.3	-8941.5	-8999.8
データセット 7	-2	1.5	1	-2.018	-44.95	1.544	26.40	0.371	3.50	0.947	23.17	1.31	-8933.6	-8873.1	-9085.9
データセット 8	-2	1.5	0	-2.028	-28.28	1.542	29.06	1.031	10.46	0.078	1.43	16.84	-6808.1	-6715.9	-6819.5
データセット 9	-2	1.5	0.1	-2.028	-28.38	1.542	29.02	1.049	10.29	0.141	2.00	12.13	-6782.1	-6667.4	-6793.7
データセット 10	-2	1.5	0.3	-2.012	-28.94	1.548	27.05	1.068	10.44	0.329	4.23	8.64	-6849.3	-6673.4	-6825.7
データセット 11	-2	1.5	0.5	-2.034	-32.09	1.549	26.63	1.089	11.47	0.499	6.50	6.54	-6897.1	-6729.1	-6798.4
データセット 12	-2	1.5	0.7	-2.023	-33.73	1.561	25.57	1.094	10.60	0.705	9.31	3.89	-6942.9	-6753.7	-6848.8
データセット 13	-2	1.5	0.9	-2.050	-36.44	1.566	25.07	1.122	11.10	0.894	14.21	1.68	-6999.9	-6809.3	-6779.0
データセット 14	-2	1.5	1	-2.055	-37.93	1.564	24.99	1.112	10.79	0.952	24.71	1.25	-7045.2	-6805.6	-6818.0

1) パラメータ  $\sigma$  は理論的に 0 未満にはなり得ないため、t-値は参考値。2)  $q = \exp(qq)/(1+\exp(qq))$  とし、 $qq$  を推定。3) null:  $1=0$ 。4) null:  $q=1$ 。5) 推定値は MCMC で得た 10000 サンプルの平均値。6) t-値は MCMC で得た 10000 サンプルの平均値をその標準偏差で除したもの。



している。

#### 4. おわりに

本研究ではまず、簡便なq-logitモデルを提案し、その基本的性質を整理した。提案したq-logitモデルの特徴はパラメータ $q$ に集約される。具体的には、(1) 既存モデルとの関係の観点からは、 $q=0$ のときlogitモデル、 $q=1$ のときweibitモデルとなる、(2) 効用関数の形状の観点からは、 $q=0$ のときリスク中立型、 $q>0$ のときリスク愛好型の効用関数となる（このとき、相対的リスク回避度は $q$ となる）性質を有する。また、数値計算の結果より、(1) q-logitモデルの推定コストは小さく、容易に適用可能なモデルであること、(2) 選択肢間の誤差相関を有するケースにおいても安定的にパラメータ $q$ を推定できることが確認された。

q-logitモデルはweibitモデル及びlogitモデルを特殊解として含む一般的な離散選択モデルであるため、適用先は極めて広いものと考えられる。中でもq-logitモデルの特性を活かした適用として、情報提供が経路選択行動に及ぼす影響をq-logitモデルを用いて評価する方向性が考えられる。通常情報提供は、認知している所要時間の確度を高めるために実施される。このことは、パラメータ $q$ が1から0の方向にシフトすることを意味する。従って $q$ を情報提供の程度や有無といった変数を用いて構造化すれば、情報の確度の向上による行動変容がモデル上で表現できる可能性がある。

モデルの今後の発展性として、今回は効用関数をq-対数関数で置き換えるというシンプルな手続きでモデルを導出したが、 $0<q<1$ のときの分布形を陽に記述出来ていない。分布形の特性と関数形の特性を式上で接続することが望ましいと考えられる。また、特に上述した情報提供効果計測への適用の場合、研究蓄積のある不完全情報下での行動特性の議論との関連性を整理しておく必要がある。さらに、今回はリスク中立型からリスク愛好型までを含む形で効用関数を一般化した。例えばプロスペクト理論(Kahneman and Tversky, 1979)にて指摘されているように、人々が参照点を基準に利益に対してはリスク回避的だが、損失に対してはリスク愛好的な行動を

とる場合、より良い現象記述のためには更なるモデルの一般化が必要となる。ただし、本研究で提案したモデルは、実務の文脈においても容易に利用可能な極めてシンプルなモデル構造を有しており、関数を複雑化することのコストを考慮しつつ議論を進める必要がある。今後、本研究で提案した手法を用いた実証分析を進めていきたいと考えている。

#### 参考文献

- 1) Atkinson, A.B. (1970) On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory* 2, 244-263.
- 2) Castillo, E., Menendez, J.M., Jimenez, P., Rivas, A. (2008) Closed form expressions for choice probabilities in the Weibull case. *Transportation Research Part B* 42, 373-380.
- 3) Luenberger, D.G. (1998) Investment science, Oxford University Press (今野浩, 鈴木賢一, 枇々木規雄 (2002) 金融工学入門, 日本経済新聞出版社).
- 4) Fosgerau, M., Bierlaire, M. (2009) Discrete choice models with multiplicative error terms. *Transportation Research Part B* 43, 494-505.
- 5) Gerber, H.U., Pafumi, G. (1998) Utility functions: From risk theory to finance. *North American Actuarial Journal* 2, 74-100.
- 6) Kahneman, D., Tversky, A. (1979) Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-292.
- 7) Kitthamkesorn, S., Chen, A. (2014) Unconstrained weibit stochastic user equilibrium model with extensions. *Transportation Research Part B* 59, 1-21.
- 8) Li, B. (2011) The multinomial logit model revisited: A semi-parametric approach in discrete choice analysis. *Transportation Research Part B* 45, 461-473.
- 9) Nakayama, S. (2013) q-Generalized logit route choice and network equilibrium model, *proceedings of the 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT 2013)*.
- 10) Sheffi, Y. (1985) *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall.
- 11) Train, K. (2009) *Discrete Choice Methods with Simulation*, Cambridge University Press.
- 12) Yai, T., Iwakura, S., Morichi, S. (1997) Multinomial probit with structured covariance for route choice behavior. *Transportation Research Part B* 31, 195-207.
- 13) 小塩隆士 (2010) 再配分の厚生分析: 公平と効率を問う, 日本評論社.
- 14) 須鎗弘樹 (2010) 複雑系のための基礎数理: べき乗則とツァリスエントロピーの数理, 牧野書店.
- 15) 中山晶一郎 (2013) ロジット・ワイビットモデルの一般化, 土木計画学研究・講演集, Vol. 48, (CD-ROM).

(2014. 4. 25 受付)

## ESTIMATION PROPERTIES OF Q-GENERALIZED LOGIT MODEL

Makoto CHIKARAISHI, Shoichiro NAKAYAMA

This study first characterizes q-logit model (which involves logit and weibit models as special cases) and then clarify the estimation properties with simulated data. Concretely, we first show parameter  $q$  in q-logit model characterizes decision making mechanism under risk and uncertainty. We then identify the estimation properties with the simulated data where the real parameter values are known. The results indicate (1) the estimation cost of q-logit model is fairly low and the model may be ready to use in practical context, and (2) parameter  $q$  can be unbiasedly estimated, even when error correlation among alternatives exists.