交通ネットワークの確率特性とパラメータ推定に関する基礎的研究

廖　文韜[1]・中山　晶一朗[2]・高山　純一[3]

[1]学生会員　金沢大学　理工研究域環境デザイン学系（〒920-1192石川県金沢市角間町）
E-mail: liaowentao2010@hotmail.co.jp
[2]正会員　金沢大学准教授　理工研究域環境デザイン学系（〒920-1192石川県金沢市角間町）
E-mail: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp
[3]フェロー会員　金沢大学教授　理工研究域環境デザイン学系（〒920-1192石川県金沢市角間町）
E-mail:takayama@t.kanazawa-u.ac.jp

交通ネットワークの計画・分析の際，研究・実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．確率的利用者均衡配分モデルでは、道路利用者が認識するコストは誤差を持っているものと考え、その誤差の程度を「分散パラメータ」にとって表す．実際に交通ネットワーク均衡モデルを適用する際には，各種パラメーターの設定が必要となる．経路交通量が十分に大きい場合、中心極限定理により、正規分布に従うと近似することができる．交通ネットワークが膨大する場合、リンク交通量ベクトルは多変量正規分布として与えることができる．小さいのはリンク間相関の局所性があるので、ネットワークの大きさはどのぐらい、多変量正規分布を入れる最尤推定法で推定すればいいかは本研究の目的の一つだ．他に、速く収束する最適化問題の解法の正確性と金沢市の交通ネットワークの真値を検討しよう．

Key Words : parameters,estimate,maximum likelihood method,logit model

1. 背景

本研究では交通ネットワーク均衡モデルにおけるパラメータ推定に関するMPECを取り扱う．交通ネットワークの計画･分析の際，研究・実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．ロジット型利用者均衡（確率的利用者均衡）は，離散選択モデルによる経路選択に基づいた均衡である．ロジットモデルを用いた場合，経路効用 F は最も簡単な場合でも $F=-\theta t+\varepsilon$ であり，パラメータ θ を推定する必要がある．ここで t は経路の旅行時間，ε は確率項である．ロジット型利用者均衡では，このパラメータにどのような値を用いるべきかが問題となることが少なくない．また，$-\theta t+\varepsilon$ よりも複雑な効用関数を定義することも可能で，その時は更にパラメータ推定が重要になる．

パラメータ推定は既存のシステムモデルに対して、入力と出力のデータを用いて、パラメータを計算の過程で、ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定では，データ入手の容易さの観点からリンク交通量の利用が便利であると考えられる．8世紀ドイツの数学CFガウスは、最小二乗法を用いて計算天体軌道を提案した.1960年代には、コンピュータの普及に伴って、パラメータ推定は、急速な発展をされています.様々な方法のパラメータ推定、最小二乗法、最尤法、最大事後法、最小のリスクと最大エントロピー法を最小限に抑えることができる.最も基本的な方法は、最小二乗および最尤法する方法である.

ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定では，データ入手の容易さの観点からリンク交通量の利用が便利であると考えられる．しかし，リンク交通量はリンク間で独立ではなく，近接するリンクではその相関はかなり高い．本研究では，最尤推定法を用いてリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルに，パラメータ推定法を提案する.

パラメータ推定（パラメータ推定）は未知パラメータの全体分布に含まれていると推定母集団から採取したサンプルに基づいている.人々はしばしば法の性質を反映したデータ、分析や推論データへの手にする必要がる.デジタル機能の全体的な分布を推測するサンプルデータの統計情報を選択する方法.統計的推論は、数理統計学の研究の中核となる問題である.いわゆる統計的推論は、全体的な分布や、合理的な推論を行うデジタル機能の分布上のサンプルに基づいている.それは二つの部分点推

定と区間推定に分け、数理統計学の重要な分野である統計的推論の基本的な形だ.

2. 研究の目的

本研究では最適化手法を用いることによって，目的関数や制約条件に大きく左右されることなく最適解（大域的最適解）への収束を可能とする最適化手法の構築を目指す．今回は簡単な仮想ネットワーク，さらには大規模道路ネットワークを用いて実際に交通均衡配分モデルにおけるロジットパラメータの推定を行い，構築した最適化手法の有意性を示すこととする．ニュートン法をロジットモデルのパラメータ推定に適用するという試みは今までに本格的にはなされておらず，パラメータ推定において焼きなまし法の特徴であるゆらぎ項の効果に期待し，焼きなまし法の適用を行う．

3. ロジット型確率ネットワーク均衡

リンク a のリンク交通量を $x_a\left(a \in A\right)$，その確率変数を X_a とする．OD ペア $i\left(\in I\right)$ の経路 $j\left(\in J_i\right)$ の経路交通量を y_{ij} とし，その確率変数を Y_{ij} とする．つまり x_a および y_{ij} はそれぞれ確率変数 X_a および Y_{ij} の実現値である．経路交通量とリンク交通量は，リンク経路接続変数 $\delta_{a,ij}$ を用いて

$$X_a = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\delta_{a,ij}Y_{ij} \tag{3.1}$$

$$x_a = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\delta_{a,ij}y_{ij} \tag{3.2}$$

が成立している．なお，$\delta_{a,ij}$ は OD ペア i の経路 j の経路にリンク a が含まれていれば 1，含まれていなければ 0 である．これらのベクトル表示 $X=\Delta Y$，$X=\Delta Y$ を必要に応じて用いることとする．ただし X は X_a を要素に持つリンク交通量の確率変数ベクトル，Y は y_{ij} を要素に持つ経路交通量の確率変数ベクトル $Y=\left(Y_{11},Y_{12},\ldots,Y_{21}\ldots\right)^{\mathrm{T}}$ であり，x および y はそれぞれ X および Y の実現値ベクトルである．Δ は $\delta_{a,ij}$ を要素に持つリンク・経路接続行列（パス-リンクインシデックスマトリックス），T は転置である．本論文では今後断りがない限り，ベクトルは列ベクトルとし，基本的に英大文字は確率変数，ブロック体の英文字はベクトルもしくは行列を表すこととする．

本研究では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択を仮定する．各道路利用者は次式のロジットモデルに従い，経路選択確率 P_i を決定していると仮定する．

$$p_{ij} = \frac{\exp\left(-\theta\,\bar{c}_{ij}\right)}{\sum_{j'\in J_n}\exp\left(-\theta\,\bar{c}_{ij'}\right)} \tag{3.3}$$

ここで $\bar{c}_{ij}$ は OD ペア i の経路 j の平均旅行時間，θ は正のパラメータである.

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するにあたり，式(3.4)を含んだ関数 $g=\left(g_{11},\ldots,g_{21},\ldots\right)^{\mathrm{T}}$ を考える．関数gの要素 g_{ij} を以下のように定義する.

$$g_{ij}(m) = \lambda_i \frac{\exp\left(-\theta\,\bar{c}_{ij}(m)\right)}{\sum_{j'\in J_n}\exp\left(-\theta\,\bar{c}_{ij'}(m)\right)} \tag{3.4}$$

確率ネットワーク均衡は関数（写像）$\mathbf{g}$ に関する以下の不動点問題として定式化できる.

$$m = g(m) \tag{3.5}$$

なお，平均リンク交通量ベクトル μ を用いて，$\mu=\Delta g'(m)$ とリンクに関する定式化も可能である．ただし g' は入力がリンク交通量の場合の g である.

4. 多変量正規分布

OD 交通量はポアソン分布に従って確率変動しており，各利用者はロジットモデルに従った経路選択を行っていると仮定する[1), 2)]．この場合，経路交通量も独立なポアソン分布 Po[mij] に従う.

OD ペア i の OD 交通量の平均を，その経路 j の経路交通量の平均を m_{ij} とする．経路交通量が十分に大きい場合，ポアソン分布の平均と分散はともに経路交通量であるため，中心極限定理により平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 N[m_{ij}, m_{ij}]に従うと近似することができる．また，ポアソン分布は取り扱いが難しいため，経路交通量は独立な正規分布とみなす[3)]．このとき，リンク交通量ベクトル X は以下の多変量正規分布として与えることができる.

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

(4.1)

ただし，μ は平均リンク交通量ベクトルでその要素は μ_n，Σ はリンク交通量の分散共分散行列，Σ^{-1} は Σ の逆行列，$|\Sigma|$ は Σ の行列式，T は転置，n はリンクの総数である．

また，平均経路交通量のベクトル m（その要素 m_{ij}）を用いると，$\Sigma=\Delta diag(m)\Delta^T$ である[1)]．ただし Δ はリンク・経路接続行列（パスリンクインシデックスマトリックス），$diag(m)$ は m の各成分を対角成分に持つ対角行列である．つまり，$diag(m)$ は経路交通量ベクトル Y の分散共分散行列であり，各経路交通量は独立であるため，それは対角行列となる．ここで，$\mu=\Delta m$ が成立しているため，$f_x(x)$ は $f_x(x,m)$ と考えることもできる．なお，このようなリンク交通量の確率密度関数を定義するためには，$|\Sigma|$ が 0 でないことが必要である．例えば，本来ならば一つのリンクで記述すべきものを 2 つの連続隣接のリンクで表現した場合を考える．その 2 つのリンクは全く同じリンク交通量及び分布となる．このように他のリンク交通量（の確率変数）によって一意に表現できるリンク（の確率変数）は除去しなければ，$f_x(x)$ は定義できないことに注意が必要である．

5　最尤推定法

リンク交通量の観測が行われたとして，観測リンク交通量ベクトルを $\tilde{\mathbf{x}}$ とする．また観測されたリンクの集合を $\tilde{\mathbf{A}}$ とする．観測リンク交通量は式(5.1)の分布の周辺確率として以下の確率密度関数に従う．

$$f_{\tilde{\mathbf{x}}}(X)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\tilde{n}}|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}$$

(5.1)

ここで X は観測交通量の確率変数ベクトル，μ は観測交通量の平均値ベクトル，Σ は観測交通量の分散共分散行列，$\tilde{n}$ は観測リンクの総数である．μ と Σ は式(4.1)で用いられている μ と Σ について，観測しているリンクに関する要素を抜き出して構成することができる．

リンク交通量の実現値，つまりリンク交通量の観測値 X が与えられた場合，以下の対数尤度関数 $L(\theta|X)$ を定義することができる．

$$L(\theta|X)=\ln f_X(X)$$

(5.2a)

$$=\sum_{a\in A}\ln f_X(x_a\mid X_{-a})$$

(5.2b)

ただし $f_{X_a}(x_a|X_{-a})$ はリンク a 以外のリンク交通量が与えられた場合のリンク a の交通量の確率密度関数である．

また複数回それらのリンクを観測している場合，第 r 回目の観測値を X_r とする $(r\in R)$．異なった回の観測値が独立である場合，尤度関数は以下のように定義できる．

$$L(\theta|X;\forall r\in R)=\sum_{r\in R}\ln f_{X_r}(X_r)$$

(5.3)

ここで $f_{X_r}(X_r)$ は r 回目の観測交通量が生起する確率である．なお異なった回の観測値が独立ではない場合は，観測回間での関係を考慮した尤度関数を個別に設定することが必要になる．以降では断りがない限り X は観測回数が 1 回のみのデータとする．そして尤度関数を $l(\ln l=L)$ と表すこととする．

非線形の制約や目的関数と数理計画はオペレーションズ･リサーチの重要なブランチです. 方程式や不等式のセット、および目的関数と制約条件の少なくとも一方の制約の下でn項実関数の極値問題を研究する非線形プログラミングは未知数の非線形関数である. 目的関数および制約条件は、線形関数の場合は、線形計画法である.

数値解析の分野において、ニュートン・ラフソン法とは、方程式系を数値計算によって解くための反復法による求根アルゴリズムの 1 つである．対象とする方程式系に対する条件は、領域における微分可能性と 2 次微分に関する符号だけであり、線型性などは特に要求しない．収束の速さも 2 次収束なので古くから数値計算で使用されていた.

6. 検定用のネットワーク

自由旅行時間 α，交通容量 β は横リンクが全部 4 分，縦リンクが全部 6 分に与える．交通容量は全部リンクが 3000 台．初期経路交通量は全部経路 1000 台．観測リンク交通量は均衡制約条件式のロジットパラメータ θ の

真値を 0.6 とした時の平均経路交通量をもとに経路間の相関率が全部 0 の多変量正規分布乱数として生成したもの.

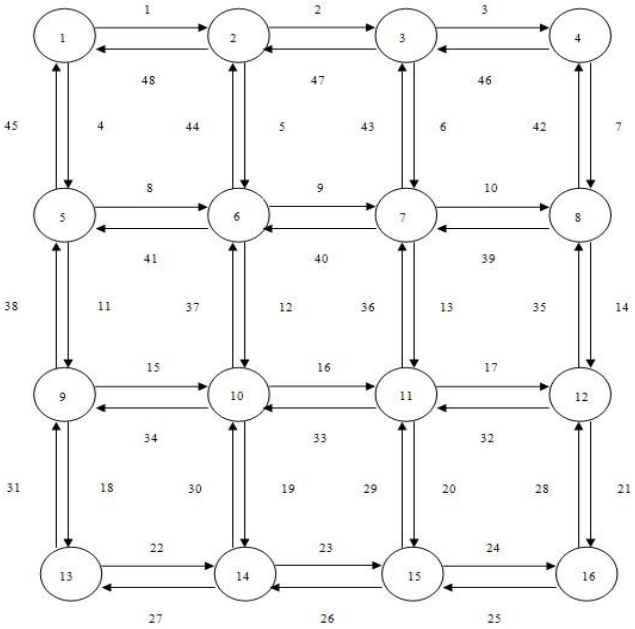

図 1　対象ネットワーク

OD ペアは八つとし，各 OD ペアの交通量，それぞれに経路を幾つかは表 1 の通りに設定する.

表 1　各 OD ペアの交通量

OD	交通量	経路数
1→16	2000	13
4→13	3000	11
13→4	5000	14
16→1	2300	13
2→15	4700	7
5→12	6000	9
3→9	1600	6
8→9	900	5

統計学に観測リンク数パターンの作り方について，検定用ネットワークでは，リンク数は 48，経路数は 78 がある．リンク経路接続変数を要素に持つリンク・経路接続行列では行と行が全部独立ではなくて，他の行と相関がある行を消して，必要のリンク数は 38 本（リンク・経路接続行列の階数）．必要なリンク番号は表 2 に示す.

表 2　必要なリンク番号

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	31
32	33	34	35	39	40
41	42				

リンクの観測比率や観測数と推定精度の関係の考察，調査対象全体を母集団と呼ぶ．実際に調査を行って調べる対象を標本と呼ぶ．母集団を一つの集合と考えると，標本はその部分集合である．母集団及び標本の要素の個数，母集団のサイズ，標本のサイズと呼ぶ．本報告適用するネットワークで 19 本を検定すると，母集団のサイズは 35345263800 個，可算無限母集団と呼べる．さて，母集団を全部検定することはできない．母集団より標本抽出を行う際に，どの要素を抽出するのかを調査者のコントロールできない乱数に決めてもらうとする．こうすると，母集団の中のどのパターンも，標本として選ばれる可能性を持っていることになる.

一回ごとの抽出でそのパターンが何であるかを観測した後，その要素を再び元の母集団に返す方法に返す方法が考えられる．各回の抽出に際し，どのパターン等しい確率で選ばれるようにする.

リンク間交通量が独立ではない条件下，推定パラメータの誤差と観測リンク数との関係について，一般にリンク交通量は互いに独立ではなく，このように独立でない場合の最尤推定法について，ある一定距離の以上離れたリンク間の交通量は独立であると仮定できると考えられる．リンク 1 を対象として，計算したリンク1と全リンクの相関率を表2に示す.

表 3　リンク 1 と他のリンクの相関率

リンク 1	1.000	リンク 11	0.000	リンク 31	0.509
リンク 2	0.640	リンク 12	0.064	リンク 32	0.000
リンク 3	0.548	リンク 13	0.086	リンク 33	0.000
リンク 4	0.000	リンク 14	0.248	リンク 34	0.000
リンク 5	0.138	リンク 15	0.000	リンク 35	0.000
リンク 6	0.149	リンク 16	0.028	リンク 36	0.000
リンク 7	0.191	リンク 17	0.054	リンク 37	0.000
リンク 8	0.000	リンク 18	0.000	リンク 38	0.679
リンク 9	0.055	リンク 19	0.047	リンク 39	0.000
リンク 10	0.111	リンク 20	0.077	リンク 40	0.000
リンク 21	0.461	リンク 31	0.509	リンク 41	0.000
リンク 22	0.000	リンク 32	0.000	リンク 42	0.000
リンク 23	0.038	リンク 33	0.000	リンク 43	0.000
リンク 24	0.153	リンク 34	0.000	リンク 44	0.000
リンク 25	0.000	リンク 35	0.000	リンク 45	0.504
リンク 26	0.000	リンク 36	0.000	リンク 46	0.000

リンク 27	0.000	リンク 37	0.000	リンク 47	0.000
リンク 28	0.000	リンク 38	0.679	リンク 48	0.000
リンク 29	0.000	リンク 39	0.000		
リンク 30	0.000	リンク 40	0.000		

観測リンクの相互の関係を明らかにするために番号を付けた48のリンクの中に，必要の38本を取り出す．観測リンクの数を1から38まで変えた各算術平均値を推定パラメータとした場合に，起る誤差を求める．各観測リンク数に対して5個の組合せを任意標本数列として用いて作る．観測リンクの数を変えた場合，5個（38の場合が1個）のそれぞれの推定パラメータと真値の偏差の平均（平均偏差），およびそれと新値との100分率を表3に示す．

観測リンクの相互の関係を明らかにするために番号を付けた48のリンクの中に，必要の38本を取り出す．観測リンクの数を1から38まで変えた各算術平均値を推定パラメータとした場合に，起る誤差を求める．各観測リンク数に対して5個の組合せを任意標本数列として用いて作る．観測リンクの数を変えた場合，38個のそれぞれの推定パラメータと真値（0.6）の偏差の平均絶対値（偏差の絶対値の平均），およびそれと新値との100分率を表4に示す．

表4　観測リンク数を変えた場合の推定値と真値の偏差と偏差率

観測リンク数	組み合わせ数	平均推定値	△θ絶対値	△θ/θ
1	38	0.57498	0.23658	39.43%
2	38	0.55438	0.15109	25.18%
3	38	0.59070	0.12649	21.08%
4	38	0.64155	0.11848	19.75%
5	38	0.59851	0.10107	16.85%
6	38	0.59297	0.07238	12.06%
7	38	0.58613	0.04750	7.92%
8	38	0.58308	0.05507	9.18%
9	38	0.59714	0.04852	8.09%
10	38	0.59457	0.03732	6.22%
11	38	0.61118	0.04526	7.54%
12	38	0.57983	0.04333	7.22%
13	38	0.58454	0.04091	6.82%
14	38	0.58121	0.03639	6.06%
15	38	0.59641	0.03808	6.35%
16	38	0.59149	0.03213	5.36%
17	38	0.58544	0.02876	4.79%
18	38	0.59859	0.02963	4.94%
19	38	0.59825	0.03405	5.68%
20	38	0.59606	0.02167	3.61%
21	38	0.59310	0.02601	4.34%
22	38	0.58836	0.02842	4.74%
23	38	0.59489	0.02043	3.41%
24	38	0.59084	0.02187	3.64%
25	38	0.58122	0.02026	3.38%
26	38	0.59444	0.01686	2.81%
27	38	0.59650	0.01746	2.91%
28	38	0.59888	0.01612	2.69%
29	38	0.59698	0.01587	2.65%
30	38	0.60413	0.01099	1.83%
31	38	0.60925	0.01568	2.61%
32	38	0.61181	0.01489	2.48%
33	38	0.61640	0.01764	2.94%
34	38	0.61584	0.01861	3.10%
35	38	0.61869	0.02116	3.53%
36	38	0.61890	0.01919	3.20%
37	38	0.61796	0.01834	3.06%
38	1	0.57498	0.01825	3.04%

表4の推定量と真値の偏差を縦軸に，観測リンク数を横軸に，観測リンク数と推定値の偏差の関係を図2に示す．

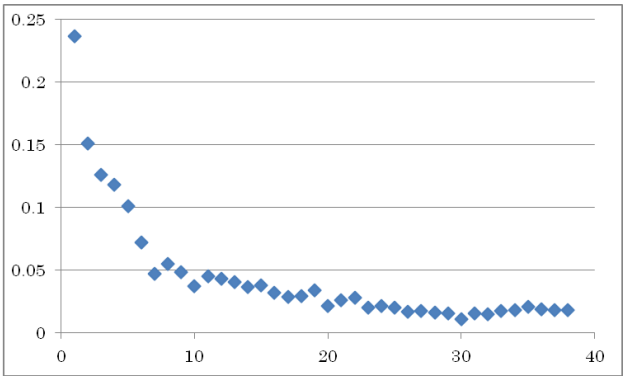

図2　観測リンク数と推定値の偏差の関係

7. まとめ

表4に見れば，多変量正規分布に従う観測経路交通量で作った観測リンク交通量を用いて，観測リンク数は1から38まで，組み合わせ数が多ければ，リンク間の相関があっても，平均推定したパラメータは真値0.6と近い，観測リンクの数とパターンは関係が少ない，推定精度はかなり高い．観測リンク数が十分多ければ，一回の観測交通量を使っても，最尤推定量が信じられやすい．しかし，リン数と組み合わせの数が少なければ，うまく推定できないこともわかる．

ほか，実際の観測リンク交通量，確率的利用者配分モデルでは，道路利用者が認識する旅行コストは誤差を持っているものと考え，その誤差の程度を「分散パラメータ」によって表す．道路利用者が知っている各経路の旅行コストは不完全である．」「道路利用者は旅行時間と

道路料金以外も考慮して経路を選んでおり，必ずしも旅行コスト最小の経路のみを選ぶとは限らない」と考えた法がより現実的，一般的である．言いかえれば，現実道路ネットワークの交通量配分モデルは明らかに分かるのではない，計算の際に配分モデルは現実的かどうか把握しにくい，経路数，経路の作り方，均衡解の判断方法など，4.1式の平均値に影響を与える．実際のネットワークで，表4のような結果より偏差がもっと大きいと思い，リンク数が多いほど，推定精度が高くなるいと考えられる．配分モデル精緻化も今後の課題とする．

最尤推定法はバイアスなく推定できる．もう一つの原因は，今回の推定では，全域解を解く手法をプログラムに入れてない，ニュートン法で更新してもらった最尤値の時の値．全域最適化手法を使うと，各手法の精度と収束速度が違い，今後検討したい．

経路交通量が大きい場合（30以上），ポアソン分布は多変量正規分布に近似することができるが，ポアソン分布に従う交通量を用いると，推定精度はどうなるのかも検討したい．

参考文献

1）Clark, S. and Watling, D.：ModelingNetwork Travel Time Reliability under Stochastic Demand, *Transportation Research* Vol.39B, pp.119-140, 2005.

2) Nakayama, S., Connors, R. and Watling, D.：Estimation of Parameters of Network Equilibrium Models: A Maximum Likelihood Method and Statistical Properties of Network Flow, Transportation and Traffic Theory: *Proceedings of the 18th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, accepted, 2009.

3) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，所俊宏：現実道路ネットワークの時間信頼性評価のための確率的交通均衡モデル及びそれを用いた情報提供効果分析, 土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.537-547, 2006.

The Characteristic of Transportation Network and The Basic Research about Estimation of Parameters

During the planning and analysis of network traffic, research and practice, traffic network equilibrium model plays an important role. The stochastic user equilibrium assignment model, we consider the cost of road users to recognize the one that has the error, is expressed by taking the "dispersion parameter" the extent of the error. When applying the traffic network equilibrium model in fact, it is necessary to set the various parameters.

It can be approximated if the traffic route is large enough, by the central limit theorem, and normally distributed. If the transportation network is large, it is possible to give a multivariate normal distribution link traffic vectors.