

動的交通均衡状態における道路網のスループットの解析的評価

和田健太郎¹

¹正会員 東北大学大学院 情報科学研究科 特任助教 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)
E-mail: wadaken@plan.civil.tohoku.ac.jp

本稿では、ネットワーク全体の平均的なスループットを動的利用者均衡配分理論に基づき解析的に求める方法論を構築する。この方法論の基本的なアイディアは、物理的条件および OD 需要から内生的に渋滞パターンを求める動的利用者均衡問題を、比較的観測が容易な渋滞パターンを与件として、動的利用者均衡下で流れうるスループット (i.e., OD 需要の総和) を求める逆問題へと変換することである。この方法論により、ネットワークのマクロな特性 (e.g., Macroscopic Fundamental Diagram) を、よりミクロなネットワーク構造、渋滞パターンおよび経路選択行動と関連づけて解析・評価することが可能となる。

Key Words : *Macroscopic fundamental diagram, Network exit flow, Dynamic traffic assignment, Dynamic user equilibrium, Inverse problem*

1. はじめに

近年、都市レベルの複雑な道路ネットワークの運用・管理を可能とするために、エリアの交通状態をマクロに評価する指標 *Macroscopic Fundamental Diagram* (MFD) が Daganzo¹⁾により提案された。MFD はある時刻のエリアの平均密度 (車両台数) に対して平均交通量 (スループット) をプロットしたときに現れる関数関係であり、ばらつきの小さい well-defined MFD の存在が横浜エリアにおいて実証的に確認されている²⁾。また、この MFD は OD 需要の変化に *insensitive* であることが示唆されている。

このような MFD は、観測情報 (エリア平均密度) のみでエリアの交通状態をリアルタイムに把握できるため、信頼性の高いエリアの制御法構築のための有用な指標となりうる。例えば、エリア内の密度を臨界密度以下に流入制御することでネットワークの性能を最大活用することができる³⁾。しかし、MFD を実際に活用するためには、「どのような条件下で well-defined MFD が成立するのか?、その容量や形状はどのような要因で決まるのか?」といった MFD の特性を把握することが必須である。

これらの問いに対しては、エリア内の“空間的な密度分布” (渋滞パターン) が鍵となることがいくつかのシミュレーション研究によって示されている³⁾⁻⁵⁾。そして、Geroliminis and Sun⁶⁾は横浜エリアのデータを用いて、ある平均密度に対して実現する密度分布が (統計的に) 同一であれば well-defined MFD が成立すること

を示した。しかし、密度の頻度分布と MFD のばらつき度合いの相関関係を議論しているのみであり、密度分布 (渋滞パターン) によって MFD の容量・形状がどのように特徴付けられるかは示されていない。

一方、理論研究としては、ネットワークの物理的条件 (e.g., 信号パラメータ) から、MFD の容量・形状を解析的に近似する手法が開発されている^{7), 8)}。しかし、単純な単一道路区間の解析結果に基づいており、空間的な要素 (e.g., ネットワーク構造、渋滞パターン) を捨象している。また、渋滞パターンに強く影響を与えるドライバーのネットワーク上の経路選択行動を考慮することもできない。最近では、Leclercq and Geroliminis⁹⁾が平行経路における経路選択を考慮して MFD を解析的に評価しているが、本質的には単一道路区間の問題と変わりはない。

本研究では、ネットワーク全体のスループット¹⁾を動的利用者均衡 (DUE: *Dynamic User Equilibrium*) 配分理論に基づき解析的に求めることを目的とする。その基盤となるアイディアは、物理的条件および OD 需要から内生的に渋滞パターンを求める DUE 問題を、“渋滞パターンを与件として、流れうるスループット (i.e., OD 需要の総和) を導出する問題” (逆問題) へと変換することである。この方法論により、ネットワークのマクロな特性 (e.g., MFD) を、よりミクロなネットワーク構造、渋滞パターンおよび経路選択行動と関連づけて解析・評価することが可能となる。

¹⁾厳密には MFD を求めるのではなく、ネットワーク内の車両存在台数とトリップ完了率の関係を表す Network Exit Flow¹⁾を求めることに対応している。

本稿の構成は次の通りである。続く 2. では、時刻別分解された DUE 状態を概説する。そして、このモデルが渋滞パターンを与件としたとき、線形システム方程式に帰着することを示す。3. では、ネットワークのスループットを解析的に導出する。4. では、簡単なネットワークを用いて例を提示する。最後に 5. では、本研究のまとめと今後の課題を述べる。

2. 動的利用者均衡状態

(1) 解析の前提条件

本稿では、1 起点多終点のネットワークを対象とする。ネットワークはノード集合 N 、リンク集合 L 、起終点の集合 W で表現されており、各々の要素を $i \in N$, $ij \in L$, $od \in W$ とする。ネットワークの構造は、ノード・リンク接続行列 $\mathbf{A}^*$ ($N \times L$ 行列) で表される。この行列のランクは $N-1$ であるため¹⁰⁾、唯一の起点に対応する行を除き、その行列を既約接続行列 $\mathbf{A}$ とする。さらに、既約接続行列の +1 の要素を 0 にした行列を $\mathbf{A}_-$ 、-1 の要素を 0 にした行列を $\mathbf{A}_+$ とおく。

各 OD ペア間の交通需要は“外生的”に与えられる(以降の章では、“内生変数”とする)。より具体的には、時刻 t までに起点 o を出発し終点を d とする累積 OD 交通量を $Q_{od}(t)$ と表す。

各リンクは First-In-First-Out (FIFO) 原理を仮定し、交通状態は point queue モデルで表現されるとする。具体的には、各リンク (i, j) は自由走行リンクと待ち行列リンクで構成されているとし、自由走行リンクの旅行時間は定数 m_{ij} 、待ち行列リンクのボトルネック容量は $\bar{\mu}_{ij}$ とする。このとき、時刻 t にリンク (i, j) に流入した車両の旅行時間は、

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + \frac{x_{ij}(t + m_{ij})}{\bar{\mu}_{ij}} \quad (1)$$

$$\text{where } x_{ij}(t) = A_{ij}(t) - D_{ij} \quad (2)$$

ここで、 $x_{ij}(t)$ は時刻 t のリンク下流端での待ち行列台数、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ は各々時刻 t までにリンク (i, j) を流入、流出した累積交通量を表している。なお、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ が時間微分可能であれば交通流率は下記のように書くことができる：

$$\lambda_{ij}(t) \equiv \frac{dA_{ij}(t)}{dt}, \mu_{ij}(t) \equiv \frac{dD_{ij}(t)}{dt}. \quad (3)$$

(2) 時刻別分解された DUE の定式化

DUE は静的な利用者均衡を動的な場合に自然に拡張した解の概念であり、DUE 状態は以下のように定義される：任意の時刻において、どの利用者也自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態。言い換えれば、全ての瞬間において、

全ての利用者が選択した経路が“事後的”に見ても各人の最短経路となっているような交通流パターンである。

DUE 状態では、Kuwahara and Akamatsu¹¹⁾で示されたように、同時刻に同一起点を出発した利用者の任意のノードへの到着時刻は経路によらず等しい。さらに、DUE 状態では、起点における利用者の出発順序が終点到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されていなければならない。この性質により、起点出発時刻毎に、各ノードへの一意的な均衡到着時刻を定義することができる。これらの特性とリンクモデルの性質から、時刻 s に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は時刻 s 以降に起点を出発する利用者の影響を受けないことが分かる。そして、1 起点多終点を持つネットワークにおける DUE 状態は、起点出発時刻別に分解することができる。

出発時刻別の DUE では、次の 2 つの変数が中心的な役割を果たす。1 つは、出発時刻 s に関する流入交通流率：

$$y_{ij}^s \equiv \frac{dA_{ij}(s)}{ds} \quad (4)$$

であり、もう 1 つは、起点を時刻 s に出発した車両が最も早くノード i に到着する時刻 τ_i^s である。先に定義した絶対時刻 t における流入交通流率 $\lambda_{ij}(t)$ と y_{ij}^s の関係は、

$$y_{ij}^s = \lambda_{ij}(\tau_i^s) \frac{d\tau_i^s}{ds}. \quad (5)$$

上記の変数を用いて、出発時刻別の DUE は以下のように表される^{11), 12)}：

a) リンク旅行時間関数

$$c_{ij}^s = \int_0^s \frac{dc_{ij}^s}{ds} ds + c_{ij}^{s=0} \quad \forall s \quad (6)$$

$$\text{where } \frac{dc_{ij}^s}{ds} = \begin{cases} y_{ij}^s / \bar{\mu}_{ij} - d\tau_i^s / ds & \text{if there is a queue} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

b) 各ノードでのフロー保存則

$$\sum_i y_{ik}^s - \sum_j y_{kj}^s - \frac{dQ_{ok}(s)}{ds} = 0. \quad \forall k, k \neq o, \forall s \quad (8)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{y}^s = -\frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \quad (9)$$

ここで、後者の式はベクトル表示のフロー保存則である。

c) 最短経路選択条件

$$\begin{cases} y_{ij}^s \{c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s\} = 0 \\ c_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s \geq 0, y_{ij}^s \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij, \forall s \quad (10)$$

(3) 渋滞パターンを与件とした時刻別 DUE

上記で定式化した時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題であり、一般的に、解析解を求めることはできない。しかし、ネットワーク上の全てのリンクで交通流の流入があり (i.e., $y_{ij}^s > 0$)、かつ、渋滞パターンが分かっている (i.e., $x_{ij}(t) > 0$) を満たすリンクとそれ以外のリンクが区別できれば、時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着し、均衡解を解析的に求めることが可能である^{13)–16)}。ここでは、簡単のために、全てのリンクで待ち行列が発生している (i.e., $x_{ij}(t) > 0$) 場合のみ、均衡解を解析的に導出しよう。

起点出発時刻が s 以前のフローに対応したネットワークの状態は既知として、起点出発時刻が s の利用者に対応した均衡解を求める。ネットワーク内の全てのリンクで流入および渋滞があるため、前節で相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (7) および最短経路選択条件 (10) は等式条件に帰着する：

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} = \frac{y_{ij}^s}{\bar{\mu}_{ij}} - \frac{d\tau_i^s}{ds} \quad \forall ij \quad (11)$$

$$\frac{dc_{ij}^s}{ds} + \frac{d\tau_i^s}{ds} - \frac{d\tau_j^s}{ds} = 0 \quad \forall ij. \quad (12)$$

式 (11) を式 (12) へ代入すれば、

$$y_{ij}^s = \bar{\mu}_{ij} \frac{d\tau_j^s}{ds} \quad \forall ij \quad (13)$$

$$y^s = -(\mathbf{MA}^T) \frac{d\tau^s}{ds} \quad (14)$$

が成立する。そしてこの式をフロー保存則 (9) に代入すれば、

$$(\mathbf{AMA}^T) \frac{d\tau^s}{ds} = \frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \quad (15)$$

従って、 $\mathbf{AMA}^T$ の rank が $N-1$ であれば、DUE の均衡解は一意に決まる。なお、行列 $\mathbf{AMA}^T$ のランクは一般的に基準点の選び方に依存する。1 起点多終点ネットワークにおいては、起点ノードを基準点に選べば、ランクは必ず $N-1$ となる²⁾。従って、均衡解は、

$$\frac{d\tau^s}{ds} = (\mathbf{AMA}^T)^{-1} \frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \quad (16)$$

$$y^s = -(\mathbf{MA}^T)(\mathbf{AMA}^T)^{-1} \frac{d\mathbf{Q}^s}{ds} \quad (17)$$

3. スループットの解析的評価

本章では、DUE の均衡解 (16) を用いて、ネットワーク全体の交通量の流れを巨視的に分析する。より具体的には、ネットワーク内の車両台数が変化しない定常状態 (i.e., 周期境界条件) を考え、ネットワークを流れる平均的なスループットを解析的に導出する。

²⁾ また、均衡状態での起点の到着時刻変化率 $d\tau_o^s/ds$ は常に 1 であるから (未知変数ではない)、起点を基準点とすることは極めて自然である。

(1) 巨視的な変数と DUE の均衡解の関係性

ネットワーク・レベルの変数を以下のように定義する：

- $A(t) \equiv \sum_d Q_{od}(t)$: 累積流入関数
- $D(t) \equiv \sum_d Q_{od}(t - C^*(t))$: 累積流出関数
- $n(t) = A(t) - D(t)$: 車両の存在台数

ここで、 $C^*(t)$ は時刻 t に終点に到着する交通量の (均衡) 所要時間である。これらのネットワーク・レベルの変数と時刻別分解された DUE の解は以下のように関係付けられる：

$$\lambda(\tau_o^s) = \frac{dA(\tau_o^s)}{d\tau_o^s} = \sum_d \frac{dQ_{od}(\tau_o^s)}{d\tau_o^s} = \sum_d \frac{dQ_{od}(s)}{ds} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mu(\tau_d^s) &= \frac{dD(\tau_d^s)}{d\tau_d^s} = \sum_d \frac{dQ_{od}(\tau_d^s - (\tau_d^s - s))}{ds} \bigg| \frac{d\tau_d^s}{ds} \\ &= \sum_d \frac{dQ_{od}(s)}{ds} \bigg| \frac{d\tau_d^s}{ds} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \lambda(t) - \mu(t) = \sum_d \left(\frac{dQ_{od}(t)}{dt} - \frac{dQ_{od}(s)}{ds} \bigg| \frac{dt}{ds} \right) \quad (20)$$

式 (18)、式 (19) は集計的な流入交通流率、流出交通流率を表している。また、式 (20) はネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスを表している。なお、式 (19)、(20) において、 s は時刻 t に終点を流出するフローが流入した時刻を表している (OD ペア毎に異なることに注意)。

(2) 周期境界条件と平均スループットの定義

ここでは、各 OD ペアについて周期境界条件が成立していると仮定する。

$$\frac{dQ_{od}(\tau_d^s)}{dt} = \frac{dQ_{od}(s)}{ds} \bigg| \frac{d\tau_d^s}{ds} \quad \forall d \quad (21)$$

すなわち、各 OD ペアについて、ある時刻にネットワークを流出した交通量が同時刻の流入交通量となる。このとき、 $n(t_0)$ を初期時点のネットワーク内の車両存在台数とすると、

$$\frac{dn(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n(t) = n(t_0) \quad (22)$$

であり、ネットワーク内の車両存在台数は変化しない。さらにここでは、渋滞パターンも変化しないと仮定する。

このような状況下では、ネットワークレベルの input/output ダイアグラムは図-1 のように周期的に変動するであろう。そして、この input/output の平均的な傾き (赤い点線) は平均スループット (あるいは、ネットワーク・レベルの平均フロー) を表す。この平均ス

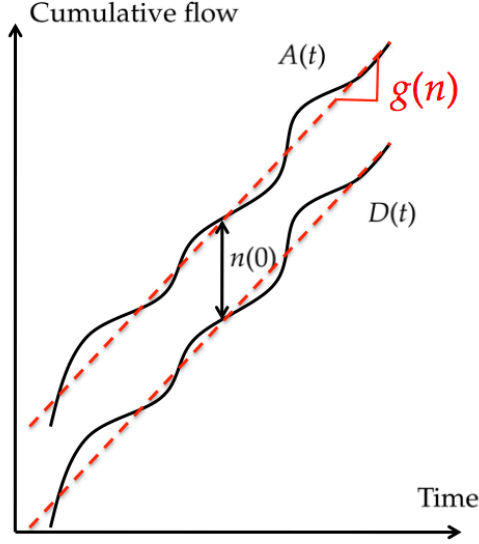


図-1 Macroscopic cumulative plots

ループット $g(n)$ は以下のように定義される：

$$g(n) = \sum_d g_d(n) = \sum_d \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{t_0}^s \frac{1}{s} \left(\frac{dQ_{od}(s)}{ds} \right) \left(\frac{d\tau_d^s}{ds} \right) ds. \quad (23)$$

(3) 平均スループットを求めるための逆問題

前節で定義した平均スループット $g(n)$ を具体的に求めるために、DUE 問題の逆問題を考えよう。先に示したように DUE 問題は、OD 交通量 dQ^s/ds を input として、均衡解 $d\tau^s/ds$ (および交通量・渋滞パターン) を求めるものであった (i.e., 式 (16))。この問題を順問題としたとき、逆問題は、 $d\tau^s/ds$ (および交通量・渋滞パターン) に関する条件を input とし、OD 交通量 dQ^s/ds を求めるものである。より具体的には、周期境界条件から $d\tau^s/ds$ に関する条件を導き (交通量・渋滞パターンは既に仮定している)、OD 交通量 dQ^s/ds を求める問題を構築する。結論を先に述べれば、この逆問題を解くことで求められる OD 交通量が各 OD ペアの平均スループットとなる。以下では、このことを具体的に見ていこう。

まず、各 OD ペアについて、流入・流出交通流率が平均スループット $g_d(n)$ に一致している状況を考える。このとき、周期境界条件は、

$$g_d(n) = \frac{g_d(n)}{d\tau_d^s/ds} \Leftrightarrow \frac{d\tau_d^s}{ds} = 1 \quad \forall d \quad (24)$$

となる。一方、1 起点多終点ネットワークの DUE 状態

における dQ^s/ds と $d\tau^s/ds$ の関係は、

$$\frac{dQ^s}{ds} = (\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T) \frac{d\tau^s}{ds} \quad (25)$$

であった。ここで、終点ノードに対応する行のみ 1、それ以外の行では $d\tau_i^s/ds$ をとるベクトル $d\hat{\tau}^s/ds$ (i.e., 周期境界条件) を考え、式 (25) に代入すると、

$$\frac{dQ^s}{ds} = (\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T) \frac{d\hat{\tau}^s}{ds} \quad (26)$$

が得られる。

この関係式をより詳細に見るために、終点ノードとそれ以外のノードを区別して表現してみよう。そのために、それぞれの行列、ベクトルを次のように分割して考える：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_- = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-} \\ \mathbf{A}_{d-} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{\tau}^s}{ds} = \begin{bmatrix} d\tau_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \frac{dQ^s}{ds} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_d(n) \end{bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{g}_d(n) = [\dots, g_d(n), \dots]^T$ である。このとき、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_d(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-} & \mathbf{A}_{d-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tau_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T & \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \\ \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T & \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tau_i^s/ds \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

であり、要素ごとには、

$$\mathbf{g}_d(n) = \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T \frac{d\tau_i^s}{ds} + \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} \quad (28)$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T \frac{d\tau_i^s}{ds} + \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (29)$$

と表される。ここで、第 2 式の $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T$ は純湧き出しノードを含まない行列であり、必ず逆行列を持つ。すなわち、

$$\frac{d\tau_i^s}{ds} = -(\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T)^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \quad (30)$$

が成立する。この式を先の第 1 式に代入すれば、各 OD ペアの平均スループットは次のように表される：

$$\mathbf{g}_d(n) = \mathbf{Z} + \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} \quad (31)$$

$$\text{where } \mathbf{Z} \equiv -\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T)^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} \quad (32)$$

そして、ネットワーク全体の平均スループット $g(n)$ は、

$$g(n) = \mathbf{1}^T \mathbf{g}_d(n) = -\mathbf{1}^T \mathbf{Z} \mathbf{1} + \mathbf{1}^T \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} \quad (33)$$

と解析的に求まる。

より詳しく平均スループットについて考察しよう。その準備として、 $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T$ を分解表現した行列の各部分が持つ意味を示す：

- $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T$ ：終点ノードの接続関係および通過ノードから終点ノードへの流入関係を表す行列
- $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T$ ：通過ノードの接続関係および終点ノードから通過ノードへの流入関係を表す行列

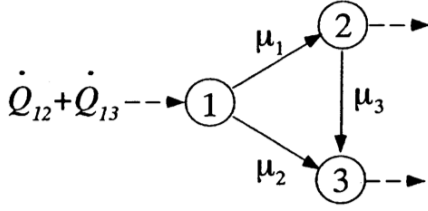


図-2 1 起点 2 終点ネットワーク

- $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T$: 通過ノードから終点ノードへの流出関係を表す行列
- $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T$: 終点ノードから通過ノードへの流出関係を表す行列

また、両側からベクトル $\mathbf{1}$ を掛けることは、行列の全要素を足し合わせることに相当する。従って、第 2 項は、通過ノードからの終点ノードへの流入リンクの容量の総和となる。一方、第 1 項は、すぐには決まらない。しかし、終点ノードから通過ノードへの流出がなければ、 $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T$ はゼロ行列となるため、平均スループットに影響は与えない。

なお、ネットワーク内の車両存在台数は明示的に扱っていないが、各 OD 間の最短経路費用 $[\tau_d^s - s]$ が評価できれば、リトルの法則より、

$$n(t) = \sum_d [\tau_d^s - s] g_d(n) \quad (34)$$

と求まる。

4. 簡単なネットワークにおける計算例

ここでは、Akamatsu and Heydecker^{15), 16)}で示されている単純なネットワークにおいて、その平均スループットを求めてみよう。

まずは、図-2 に示す 1 起点 2 終点のネットワークを考える。このネットワークは終点ノードと起点ノードしか含まないため、式 (33) の第 2 項のみで平均スループットが求まる。具体的には、

$$\begin{aligned} g(n) &= \mathbf{1}^T (\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T) \mathbf{1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu_1 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_2 + \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mu_1 + \mu_2 \end{aligned} \quad (35)$$

通過ノードのネットワーク構造が平均スループットに影響を与える（式 (33) の第 1 項が存在する）例として、図-3 に示すような梯子型のネットワーク（終点は c, d, e, f ）を考えよう。ここでは、終点ノードから通過ノードへの流出リンク 5 が存在するため、終点ノードへ直接接続しないリンクが平均スループットに影響を与える。

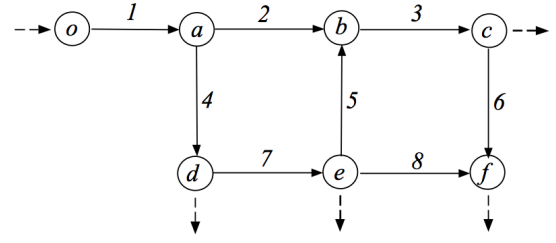


図-3 梯子型のネットワーク

このとき、各 OD ペアの平均スループット $g_d(n)$ を Akamatsu and Heydecker¹⁵⁾で提案されたアルゴリズム DUE-SN を用いて解くと、

$$\begin{aligned} g_f(n) &= \mu_6 + \mu_8 \\ g_c(n) &= \mu_3 - \mu_6 \\ g_e(n) &= \mu_7 - \mu_8 - \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_5} \mu_5 \\ g_d(n) &= \mu_4 - \mu_7 \end{aligned}$$

従って、ネットワーク全体の平均スループットは、

$$g(n) = \mu_3 + \mu_4 - \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_5} \mu_5 \quad (36)$$

5. おわりに

本稿では、ネットワーク全体の平均的なスループットを動的利用者均衡配分理論に基づき解析的に求める方法論を構築した。より具体的には、渋滞パターンを与件とした DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着することを利用し、かつ、周期境界条件を仮定することにより、渋滞パターンを input として動的利用者均衡に整合的なスループットを求める逆問題を定式化した。この方法論により、ネットワークのマクロな特性 (e.g., Macroscopic Fundamental Diagram) を、よりミクロなネットワーク構造、渋滞パターンおよび経路選択行動と関連づけて解析・評価することが可能となった。また、提案手法の特徴として、実際のネットワークを評価する際に OD 需要情報を必要としない点である。すなわち input すべきは、比較的観測が簡単な、渋滞パターン、OD パターン（量ではなくどのノード間で OD 交通需要が発生しそうか）、ネットワーク構造、各リンクの容量である。

本稿では、全てのリンクで渋滞しているパターンのみを対象としたが、提案した手法は、全てのリンクが渋滞していない場合にも適用可能である。その場合は、非渋滞リンクを適切に除いた縮約ネットワーク¹⁶⁾を構築し、上記と同じ手法を適用すれば良い。従って、様々な渋滞パターンに対して提案手法を適用することにより平均スループットが求まる。そして、そのスループット

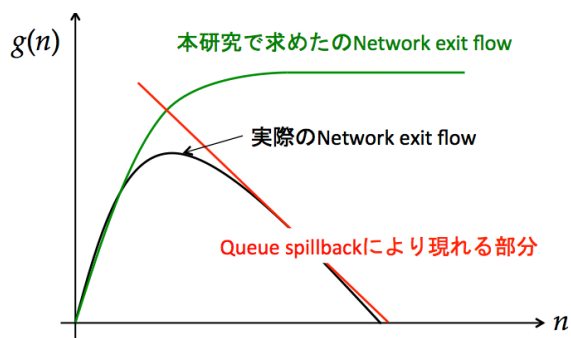


図-4 本研究で評価される network exit flow のイメージ

トの最大値を求めることでネットワークの容量も評価できる。また、多起点・1 終点ネットワークに対しても同様の方法論が構築できる。

しかしながら、そうして求められたネットワークの容量が意味を持つのは queue spillback が発生しないネットワークにおいてのみである。なぜなら、本稿では渋滞の物理的な長さを無視した point queue モデルを採用しているためである。図-4 に示すように、実際のネットワークの容量は提案手法で求められたものよりも、queue spillback の影響により小さくなると考えられる。従って、より現実的なネットワーク容量を評価するためにも、physical queue を考慮した DUE を用いて同様の方法を開発することは今後の重要な課題である。

参考文献

- 1) Daganzo, C. F.: Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41, No. 1, pp. 49–62, 2007.
- 2) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 42, No. 9, pp. 759–770, 2008.
- 3) Mazloumian, A., Geroliminis, N. and Helbing, D.: The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity., *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, Vol. 368, No. 1928, pp. 4627–47, 2010.
- 4) Knoop, V., Van Lint, J. and Hoogendoorn, S.: Routing strategies based on the macroscopic fundamental dia-

- gram, *Transportation Research Records*, No. 2315, pp. 1–10, 2012.
- 5) Mahmassani, H. S., Saberi, M. and K., A. Z.: Urban network gridlock: Theory, characteristics, and dynamics, *Procedia - Social and Behavioral Sciences: 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT 2013)*, Vol. 80, pp. 79–98, 2013.
- 6) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 3, pp. 605–617, 2011.
- 7) Daganzo, C. F. and Geroliminis, N.: An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 42, No. 9, pp. 771–781, 2008.
- 8) Helbing, D.: Derivation of a fundamental diagram for urban traffic flow, *The European Physical Journal B*, Vol. 70, No. 2, pp. 229–241, 2009.
- 9) Leclercq, L. and Geroliminis, N.: Estimating MFDs in simple networks with route choice, *Procedia - Social and Behavioral Sciences: 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT 2013)*, Vol. 80, pp. 99–118, 2013.
- 10) 赤松隆, 桑原雅夫: ネットワーク接続行列のランクについて, *土木学会論文集 IV*, Vol. 17, No. 449, pp. 223–226, 1992.
- 11) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (Daganzo, C. F.(ed.)), Elsevier*, pp. 185–204, 1993.
- 12) 赤松隆, 桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 OD ペアの場合, *土木学会論文集 IV*, Vol. 23, No. 488, pp. 21–30, 1994.
- 13) 赤松隆, 高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと OD 構造の関係に関する理論的考察, *土木学会論文集 IV*, Vol. 43, No. 618, pp. 39–51, 1999.
- 14) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 34, No. 6, pp. 515–531, 2000.
- 15) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks, *Transportation Science*, Vol. 37, No. 2, pp. 123–138, 2003.
- 16) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes: Analysis of non-saturated networks., Working Paper, Tohoku University., 2003.

(2013. 8. 2 受付)

An analytical estimation of the network exit flow under dynamic traffic equilibrium with point queues

Kentaro WADA