

社会的損失最小化のための道路ネットワークの耐震補強問題：統計的推計と確率的最適化

三留 拓也¹・長江 剛志²

¹学生員 東北大学大学院工学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-11-816）

E-mail:takuya.mitome@most.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院工学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-11-814）

E-mail:nagae@m.tohoku.ac.jp

本研究では、広域な地震災害を想定して道路ネットワーク上のどの施設を耐震化するか明らかにするための方法論を構築する。現存するすべてのトンネルや橋梁等の道路インフラ施設を地震や津波などの自然災害に耐えられるよう補強を行うと、巨額の費用が生じてしまう。そのため、重要度の高い施設から効率的に耐震補強を行う必要がある。しかし重要度の高い施設を決定する際、(i)損壊するリンクの組み合わせの数と、(ii)重要とする施設の組み合わせの数が増大になってしまう。

そこで本研究では、任意の道路ネットワークに適用できる計算手法を、目的関数の非凸性と上記2つの組み合わせ数の膨大さを考慮して構築し、実際の道路ネットワークを想定して補強すべき重要な施設を明らかにする。

Key Words : Anti-seismic reinforcement, 0-1Binary integer programming, Cross-entropy method, Markov chain-Monte Carlo method

1. はじめに

地震などの自然災害が発生した場合、道路ネットワーク上の施設(i.e. 橋梁、トンネル等)への被害が想定される。一昨年の東日本大震災のように地震・津波による被害が広域にもたらされた場合、交通が遮断されることによって、救援物資の輸送が滞る等の社会的不便益も発生する。しかし、現存するすべての道路施設を自然災害に耐えられるよう補強した場合、巨額の費用が生じることが想定される。そこで本研究では、少ない費用でより多くの不便益軽減を達成するような耐震化戦略の決定手法を提案する。

このような問題に対して、神戸市周辺の道路ネットワークを対象とした先行研究¹⁾では、耐震補強問題を社会的損失(社会的費用)の最小化問題として定式化し、解法を提案している。しかし、この提案手法は、「判り易さ」と「手続き再現可能性」のみを目的としているため、得られた戦略が最適解に近いかどうかは保障されない。そこで本研究では、よりよい戦略が作為的に抽出する作業

なしに生成可能であり、任意のネットワークに対して適用可能である手法を提案することを目的とする。

本稿ではまず、**2.** で本研究で提案する計算モデルについての説明を行う。次に **3.** ではモデル中で使用する2種類の計算手法についての説明を行い、**4.** では **3.** で説明した計算手法の試算を行う。

2. モデル

(1) 道路ネットワークの耐震補強問題

本研究では、先行研究¹⁾で提案されているモデルをもとに簡略化したモデルを使用して解決手法の開発を行う。耐震補強問題を社会的費用(e.g. 災害によって増加する交通不便益の期待値と施設の耐震化費用の和)を $Z(\mathbf{x})$ と表すと、以下のように定式化できる。

$$\min_{\mathbf{x} \in X} Z(\mathbf{x})$$

ここで、 X は耐震化戦略((ii)重要とする施設の組み合わせ)の集合である。道路施設が B 個あるとして、インデッ

クスをそれぞれの施設に1, 2, ..., Bと付け、その集合を $B := \{1, 2, \dots, B\}$ とする。第b番目の施設を耐震化するなら $x_b = 1$ 、耐震化しないなら $x_b = 0$ とするB次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_B)$ とすると、耐震化戦略の集合Xは、

$$X := \{0, 1\}^B \\ = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (1, 1, \dots, 0), \\ \dots, (1, 1, \dots, 1)\}$$

と表される。Z(x)は交通不便益の期待値と施設の耐震化費用の和であるため、交通不便益を $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とし、K(x)を耐震化コストとすると、

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + K(\mathbf{x})$$

ここで、 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は戦略xにおける被災パターンy((i)損壊する施設の組み合わせ)の生起確率である。被災パターン $\mathbf{y} \in Y$ は、道路リンクがA本あるとし、それぞれにインデックスを付け $A := \{1, 2, \dots, A\}$ とする。そして、第a番目のリンクが利用不可能なら $y_a = 0$ 、利用可能なら $y_a = 1$ とするA次元ベクトル $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_A)$ を用いて被災パターンを表現する。すると、被災パターンの集合は、

$$Y := \{0, 1\}^A \\ = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (1, 1, \dots, 0), \\ \dots, (1, 1, \dots, 1)\}$$

で表される。ある被災パターンyの生起確率は、リンク $a \in A$ が利用不可能になる確率を、

$$\phi_a(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{b \in B_a} (1 - \psi_b(\mathbf{x}))$$

とすると、

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \prod_{a: y_a=0} \phi_a(\mathbf{x}) \right\} \left\{ \prod_{a: y_a=1} (1 - \phi_a(\mathbf{x})) \right\}$$

と表される。施設b ∈ Bの破壊確率ψ_bは、

$$\psi_b(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_b^H & \text{if } x_b = 1, \\ \psi_b^L & \text{if } x_b = 0 \end{cases}$$

で表され、耐震化の有無によって大きさが変化する。

(2) 問題点

(1)で提案したモデルは一般的な道路ネットワークを対象とした場合、下記2つの理由より、解くことが困難である。一つは、目的関数Z(x)の厳密評価が困難であることである。特に、「震災によって増加する交通不便益の期待値」を厳密に評価することは困難である。これは、すべての被災パターンについて交通不便益を求める必要があり、実際の道路ネットワークを使用した場合、すべてのパターンについて交通不便益を求めることは非常に困難である。二つめは、目的関数Z(x)が一般に耐震化戦略 $\mathbf{x} \in X$ に関して非凸である点である。すなわち、この問題は、非凸0-1整数計画問題である。このことは、大域的

最適解を多項式時間内に求めるアルゴリズムが存在しないことを意味している。

本研究では以後、厳密評価困難かつ非凸な目的関数と、(i), (ii)の数の膨大さに対処するための解決手法を提案する。次章で、本研究で提案する解決手法についての説明を行う。

3. 解決手法

(1) 被災パターンの生成と交通不便益の期待値の推計

本研究では、(i)被災パターン数の膨大さより発生する、交通不便益の厳密評価困難性に対処するために、統計的な推計手法を導入する。この部分は、本研究が新規性を持つ部分である。

無作為にサンプル(被災パターンから計算した交通不便益)を推計する手法として、マルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov chain - Monte Carlo method: 以下MCMC)を使用する。MCMCは、与えられた多変量の確率分布からサンプルを得るための手法²⁾である。MCMCでは、以下の手続きを行い、被災パターンを生成する²⁾。

- i 被災パターン $\mathbf{y}^{(k)}$ からリンク $a \in A$ のうち一つ選ぶ。
- ii $y_a^{(k)} = 0$ なら $\hat{y}_a^{(k)} = 1$, $y_a^{(k)} = 1$ なら $\hat{y}_a^{(k)} = 0$ とした被災パターン $\hat{\mathbf{y}}^{(k)}$ を次の候補とする。
- iii 候補の確率 $\hat{p}^{(k)} = p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}^{(k)})$ と現在の確率 $p^{(k)} = p(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(k)})$ の比rを計算する

$$r \leftarrow \frac{\hat{p}^{(k)}}{p^{(k)}}$$

- iv $0 \leq R < 1$ の一様乱数Rを生成する。
- v $R < r$ なら $\mathbf{y}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{y}}^{(k)}$ とし、候補を次の状態に採用する(accept)。
さもなければ $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)}$ とし、現在の状態をそのまま次の状態とする(reject)。

生成した被災パターン集合(サンプル列)からパターンごとに交通不便益を求め、平均値をとる。なお、サンプルを取る間隔(sampling rate)やサンプル列の最初の方を除く(burn-in)する数を調整する必要もある。最初の方の被災パターン集合は事象の生起確率(確率分布)に従って生成されるため、生成した被災パターンの出現確率は、実際の被災パターンの生起確率に収束するはずである。すなわち、被災パターンに対応する交通不便益の値(サンプル)の平均値は、サンプル数を増大させると実際の交通不便益の期待値に収束すると考える。

(2) 最適戦略の探索

(ii)の戦略数の膨大さに対処する手法として、組み合わせ最適化手法として Rubinstein³⁾らによって開発され

たクロスエントロピー法(Cross-Entropy method : 以下CE法)を考える。

CE法では、最適な戦略を探索するために以下の2つのステップを繰り返し行う。

- i ある確率分布 $\phi^{(k)}$ のもとで戦略標本をN個生成する。
生成した各戦略のパフォーマンスを評価する。
- ii 上位 pN 個(p :上位として採用する確率)が生成されるように確率分布を改訂して、次の確率分布 $\phi^{(k+1)}$ とする。

4. 提案手法のパフォーマンスの試算

(1) 使用するネットワーク

本発表では、小型のネットワークを使用して、実際に上記の計算手法を適用した結果を交えて説明する。小型のものを使用することで、実際に全被災パターンと全戦略を列挙して見つけた交通不便益の期待値と耐震化戦略を、本手法によって求めた交通不便益の期待値と耐震化戦略が比較可能である。

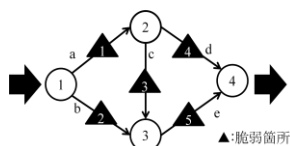


図-1 小型のネットワーク

交通配分モデルを最小費用流問題として定式化し、各被災パターンについて交通不便益を求める。計算を行う際、O-D需要はノード①→④に100台、リンク容量をリンクa, b, c, d, e, の順に[50 50 40 40 70]、リンク交通コストを車両1台当たり[1 1 1 1 1]、リンクの途絶する確率を[0.6 0.4 0.4 0.6 0.4]とし耐震化によって0.5倍になると仮定した。さらに各リンクの耐震化コストを[40 40 40 40 40]とした。なお、通行不可能台数を表現するためにリンクを追加し、このリンクの交通量を他のリンクの10倍にした。これにより、通行不可能な台数が多いほど交通不便益が大きくなるようにした。

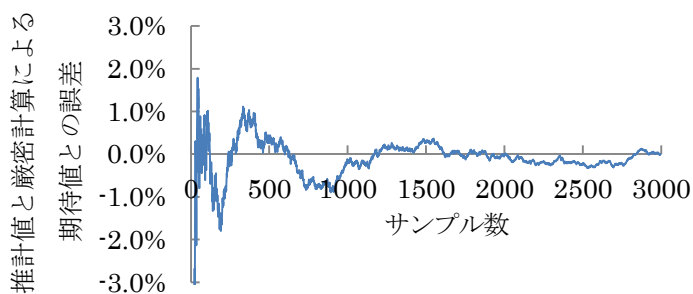


図-2 戦略0に対する交通不便益の期待値の収束

(2) 被災パターン生成と交通不便益の期待値の推計

実際にMCMCで交通不便益の推計を行った結果を示す。戦略0(耐震化なし)のときの計算結果をもとに説明する。まず、MCMCによって被災パターンの集合を生成し、パターンごとに交通不便益を求めた。

生成した被災パターンごとの交通不便益の平均値を求め、実際の交通不便益に収束するかどうかを確認した(図-2)。図-2では、平均値計算に使用するサンプル数が1500前後から推計値の誤差が $\pm 0.5\%$ 以内におおむね収束している。図-2では戦略0のときの計算の様子を示したが、この手続きを全耐震化戦略(戦略0 : 31の32個)について行い、すべてのパターンを列挙して求めた理論値による交通不便益の期待値と比較する。

ここで、計算の妥当性を評価するために、マルコフ連鎖が成り立っているか、すなわちMCMCによって生成した被災パターンの出現確率と実際の被災パターンの生起確率のずれの大きさを評価する必要がある。推計した結果を、表-1に示す。平均値計算に使用するサンプル数は図-2より1500とした。

表-1 推計した交通不便益と理論値の比較

戦略 ID	推計値	理論値	誤差
0	808.98	811.23	-0.28%
1	764.51	764.15	0.05%
2	774.10	773.84	0.03%
3	730.95	730.21	0.10%
4	811.90	800.17	1.47%
5	752.47	744.80	1.03%
6	764.60	766.00	-0.18%
7	724.50	716.51	1.12%
8	779.77	782.29	-0.32%
9	732.57	713.52	2.67%
10	734.68	745.77	-1.49%
11	683.90	681.09	0.41%
12	772.33	768.99	0.43%
13	707.25	690.23	2.47%
14	750.60	737.24	1.81%
15	664.54	666.17	-0.25%
16	759.41	763.24	-0.50%
17	720.38	711.67	1.22%
18	704.81	713.38	-1.20%
19	661.92	666.42	-0.68%
20	743.44	748.49	-0.67%
21	704.69	685.86	2.74%
22	705.06	702.94	0.30%
23	655.50	648.14	1.14%
24	736.30	735.86	0.06%
25	662.86	663.75	-0.13%
26	685.81	687.16	-0.20%
27	614.61	620.52	-0.95%
28	727.88	718.12	1.36%
29	655.41	632.71	3.59%
30	676.93	675.79	0.17%
31	604.77	600.63	0.69%

推計を行った結果、戦略によって精度のばらつきがあるが、どの戦略も $\pm 3.6\%$ 以内の誤差の範囲で収まっている。

(3) 最適戦略の探索

最適戦略探索を行うにあたり、本発表では(全被災パターンを列挙して求めた)厳密計算による交通不便益の期待値を使用して、耐震化戦略のパフォーマンスの評価を行った。

まず、最初に定めた生成確率(耐震化確率)に従って、戦略を生成する。戦略ごとの「パフォーマンス」(社会的費用の大きさ)を比較し、上位のものを選び、上位のものの出現回数から耐震化確率を改訂する。この作業を複数回繰り返す、最適戦略のみ表示される。この様子を図-3に示す。図-3では、 $N = 12$, $p = 0.25$ とした。

表-2 CEでの耐震化確率の改訂

耐震化確率	a	b	c	d	e	社会的費用
繰り返し数						
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	786.42
1	1	1	0.33	0.33	0.67	780.52
2	1	1	0	0.25	1	780.52
3	1	1	0	1	1	780.52
4	1	1	0	1	1	780.52
5	1	1	0	1	1	780.52

この計算結果では繰り返し数が3回目のときに最適戦略(戦略27)のみが出現するようになっている。

5. おわりに

モデルの定式化を、非凸0-1整数計画問題として定式化した。モデル中の被災パターン数の膨大さに起因する、交通不便益の期待値の厳密評価困難性に対処するため、MCMCを使用した期待値の推計手法を提案し、実際に適用を試みた。耐震化戦略数の膨大さに対処するために、CE法を使用した確率的最適化手法を提案し、適用例を図示した。

今後、本研究で提案したMCMCによる交通費用をもとにして、耐震化問題を解いた結果を発表までに用意する予定である。また、正当性が検証され次第全被災パターン、耐震化戦略を列挙できる限界(数百~数千程度)の大きさのネットワークにサイズアップして、この計算手法が効果的であるかどうかを検証する。

参考文献

- 1) Nagae, T., Fujihara, T. and Asakura, Y. : Anti-seismic reinforcement strategy for an urban network, Transportation Research Part A 46 pp.813-827, 2012
- 2) 例えば：豊田秀樹 編：統計ライブラリー マルコフ連鎖モンテカルロ法, 朝倉書店, 2008.
- 3) Rubinstein, R. : The Cross-Entropy Method for Combinational and Continuous Optimization, Methodology and Computing in Applied Probability, 1, pp.127-190, 1999

ANTI-SEISMIC REINFORCEMENT PROBLEMS FOR URBAN ROAD NETWORKS: STATISTICAL ESTIMATION AND STOCHASTIC OPTIMIZATION APPROACH

Takuya MITOME, Takeshi NAGAE

In this study, we develop a novel method for anti-seismic reinforcement (ASR) problem of a number of transportation facilities on an urban road network under multiple earthquake risks. An ASR problem is a prioritization of the transportation facilities: Which facilities have to be reinforced and which can be left unreinforced. Because reinforcement incurs a certain cost, we need the optimal ASR strategies with the best balance between the reinforcement cost and reduction in the expected transportation disutility. It is however difficult to find an optimal ASR strategy due to two reasons: (i) the rigorous evaluation of the expected transportation disutility for each ASR strategy is extremely difficult because the transportation disutility depends on the network damage pattern (ie. set of closed links), whose number of combinations, 2 to the power of the number of links, is too large to enumerate; (ii) even if one can evaluate the expected transportation disutility, optimal (or better) solutions to the ASR problem are difficult to find as it is a non-convex 0-1 integer programming and the number of possible ASR strategies, 2 to the power of number of facilities, is also too large to enumerate.

To overcome these difficulties, we introduce following approach. First, we use the statistical estimation (Markov chain Monte-Carlo method, MCMC), which estimates the expected transportation disutility for each ASR strategy as an arithmetic average of transportation disutilities of randomly generated sample damage patterns. Second, we use the stochastic estimation (cross-entropy approach, CE) to find a seemingly optimal ASR strategy. Finally, we develop a novel solution method for ASR problem as a combination of these two approaches and apply it to example networks with few links and transportation facilities.