

空間的進展過程を考慮した RC高欄の剥離・剥落発生モデル

早矢仕廉太郎¹・小濱健吾²・貝戸清之³

¹学生員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: r.hayashi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学特任研究員 大学院工学研究科 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

かぶりコンクリートの剥離・剥落の発生は、コンクリート構造物における代表的な劣化事象であり、構造安全性および第三者被害の観点から実現象に応じた発生リスクの評価を行い、適切に対応することが必要となる。本研究では、実態調査データに基づき、不確実性を考慮したコンクリートの剥離・剥落発生を予測するための方法論を提案する。具体的には、はじめに、時間の経過とともに鉄筋が腐食し、剥離・剥落発生数が増大する現象をワイブル劣化ハザードモデルを用いて表現する。つぎに、その後鉄筋腐食によって、周辺コンクリートの剥離・剥落発生数が局所的に増大する現象を、空間的な連鎖性としてワイブル劣化ハザードモデルに組み込んだ、空間的ワイブル劣化ハザードモデルを提案する。

Key Words : *peeling/flaking of concrete, spatial Weibull hazard model, MCMC, asset management*

1. はじめに

近年、老朽化に伴い補修・補強等の対策を要する社会基盤施設が急増している。特に、施設の構造安全性への影響は小さくとも、第三者被害の可能性を有するような損傷に対しては、早急な対策を講じる必要がある。構造物管理者は、第三者被害を未然に防ぐために定期的に目視点検を行い、社会基盤施設の安全確保に努めている。定期点検の頻度を増やし、構造物の損傷を早期発見することで、損傷を長時間放置するリスクが小さくなる。しかし、高頻度の点検は点検費用の増加を招き、結果的に維持管理費用を増加させる。また、施設が老朽化するにつれて、損傷の発生頻度が増加する可能性がある。そのため、同一の点検間隔を設定しても、構造物の供用年数とともに損傷発生数が増える場合も考えられる。構造物管理者が第三者被害リスクに合理的に対応するためには、維持管理業務の効率化に配慮した点検・補修のあり方を検討する必要がある。また、そのために実現象に応じた損傷発生リスクの評価が必要となる。

本研究では、鉄道高架橋の高欄のかぶりコンクリートの剥離・剥落発生過程に着目する。かぶりコンクリートの剥離・剥落発生はコンクリート構造物における代表的な劣化事象であり、剥離・剥落の発生過程は構造物の構造条件や環境条件だけではなく、中性化や内の塩

害などによる鉄筋の腐食深さに大きく依存する。既往研究の理論、知見に基づいて鉄筋の腐食過程を表現し、剥離・剥落発生過程を分析することも可能ではあるが、確定的手法であるために剥離・剥落発生過程の不確実性を表現することが困難となる。実際の管理においては、不確実性を考慮した剥離・剥落発生過程のモデル化が必要とされている。

以上の問題意識のもと、本研究では、不確実性を考慮したコンクリートの剥離・剥落発生過程モデルを提案する。具体的には、時間の経過とともに鉄筋が腐食し、剥離・剥落発生数が増大する現象をワイブル劣化ハザードモデルを用いて表現する。その後鉄筋腐食によって、剥離・剥落が発生したコンクリート周辺において部分的に剥離・剥落発生数が増大する現象を、空間的な連鎖性としてワイブル劣化ハザードモデルに組み込んだ、空間的ワイブル劣化ハザードモデルを提案する。以下、**2.**で本研究の基本的な考え方を説明する。**3.**では空間的ワイブル劣化ハザードモデルを定式化する。さらに、**4.**で推計手法について述べる。

2. 本研究の基本的考え方

(1) 従来の研究概要

コンクリート構造物の変状過程は鉄筋の腐食深さやかぶり厚に大きく依存する。そのため、鉄道構造物に

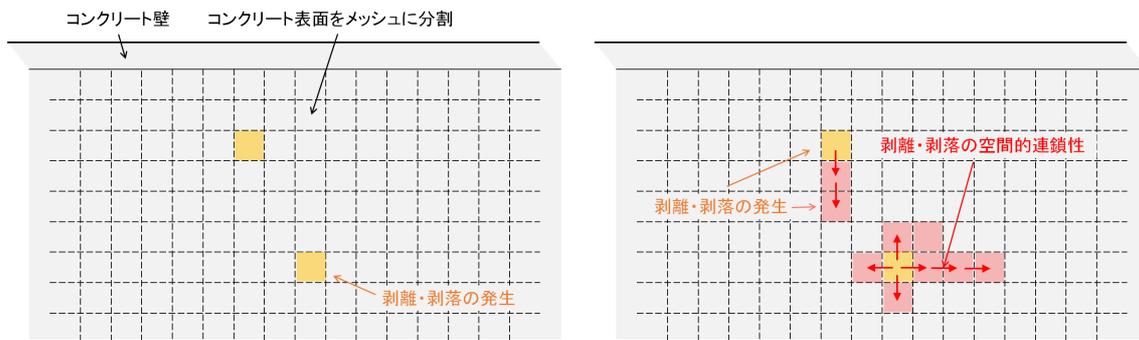


図-1 メッシュ分割と剥離・剥落評価

関する統計的な分析¹⁾⁻³⁾が実施され、2006年制定の鉄道構造物等維持管理標準・同解説⁴⁾(以下、維持管理標準と呼ぶ)において既往の研究のとりまとめがなされている。維持管理標準では、コンクリート構造物の変状過程を、潜伏期、進展期、加速期、劣化期の4期間に区分し、ひび割れや剥離・剥落が発生する加速期、劣化期の期間長を、鉄筋腐食深さ、および鉄筋腐食速度を用いて推測することにより、ひび割れや剥離・剥落が生じる時期を把握する手法が提案されている。その際、鉄筋腐食深さや鉄筋腐食速度を、かぶりコンクリート厚や鉄筋径、初期塩化物イオン濃度といった影響因子を支配方程式に代入することで算出している。さらに、同手法を基礎としたかぶりコンクリートの剥離・剥落予測モデルがいくつか提案されている^{5),6)}。いずれの予測モデルにおいても、鉄筋腐食深さや鉄筋腐食速度の算出が確定的であるために、不確実性を考慮することが困難であり、管理者は現象のばらつきを自らの知識や経験をもとにして、目視点検の結果を用いて適宜修正していく必要があった。

一方、構造物の劣化過程に介在する不確実性を考慮した予測手法として、目視点検情報を利用した統計的予測モデルが急速に発展してきている^{7),8)}。本研究で対象とするかぶりコンクリートの剥離・剥落発生予測モデルに関しても、いくつかの研究事例がある。貝戸等⁹⁾は、剥離・剥落発生過程を斉次ポアソン過程により表現している。しかし、前述したように、剥離・剥落を含むコンクリート構造物の変状過程は鉄筋の腐食深さに大きく依存し、さらに、鉄筋の腐食速度は時間の経過とともに増大していくと考えられるため、剥離・剥落発生過程をより正確に表現しようとする、到着率が時間の経過にかかわらず一定である斉次ポアソン過程では表現しきれないという問題点が存在する。松岡等¹⁰⁾は上述の問題点を克服するために、剥離・剥落発生過程を非斉次ポアソン過程によって表現することで、到着率の時間依存性を考慮した剥離・剥落の発生

予測モデルを提案している。

鉄筋腐食は、かぶりコンクリート厚や鉄筋径、初期塩化物イオン濃度といった影響因子によって進展度合いが変化するために、対象とする高欄内においても、部分的に鉄筋の腐食深さが異なると考えられる。そのため、剥離・剥落が発生した箇所では鉄筋の腐食が進展しており、当該箇所の付近では剥離・剥落発生確率が增大すると考えられるが、既往の研究においては、上述の現象を考慮した事例はない。本研究では、このような鉄筋腐食による剥離・剥落発生確率の増大を空間的連鎖性として考慮する。空間的連鎖性を実測データから推計する方法論は地球統計学分野において発展してきた空間統計学、および地域科学分野において発展してきた空間計量経済学の、2つの潮流が存在する¹¹⁾。特に、空間計量経済学では現象の空間的な相関性の取り扱いについて、システム自体の空間的相関を表す空間ラグモデルと外力などのシステムへの入力との空間的相関を表す空間誤差モデルに分けて考えることが可能である。それらのモデルは空間自己回帰型モデルとして整理されている¹²⁾。一方で、剥離・剥落をはじめとした構造物の劣化事象に対してこれらの方法論を応用した事例はほとんど存在しない。本研究では、到着率の時間依存性を考慮したようなワイブルハザードモデルを採用した上で、上述の空間自己回帰が鉛直方向と水平方向により異なるような異方性空間自己回帰を考え、鉄筋腐食による剥離・剥落発生数の空間的連鎖性を表現した、空間依存型のハザードモデルを構築する。

(2) 剥離・剥落の空間的連鎖性

本研究では過去に剥離・剥落の評価法として提案されたメッシュ分割法を前提とする^{10),13)}。メッシュ分割法は図-1に示すようにコンクリート表面を任意メッシュに分割し、メッシュごとに劣化事象を評価する方法である。過去に提案されたメッシュ分割法に基づく剥離・剥落発生予測モデルは、各メッシュの剥離・剥落発生は

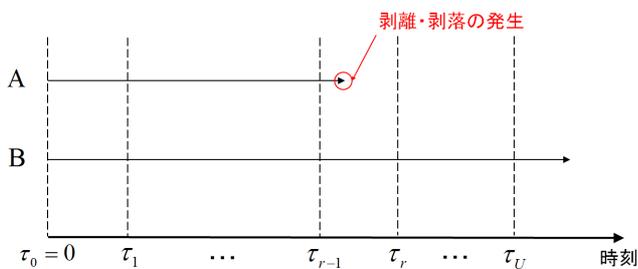


図-2 剥離・剥落の発生過程

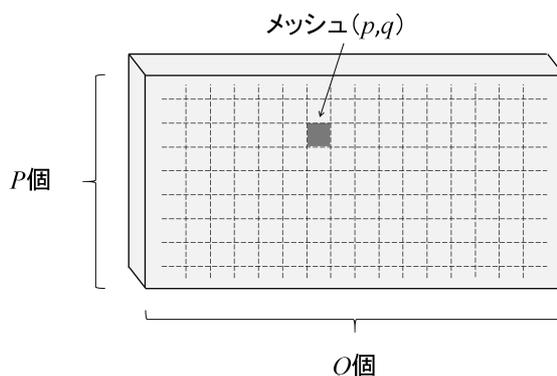


図-3 剥離・剥落モデル

互いに独立で相関性はないものと仮定していた。一方で、剥離・剥落の発生はその物理的・化学的特性から空間的に独立とは言い難く、剥離・剥落発生メッシュに隣接するメッシュでは剥離・剥落が通常よりも発生しやすくなる空間的連鎖性が存在すると考えられる。本研究はそのような空間的連鎖性による剥離・剥落発生確率の増幅効果を、実構造物の実態調査から評価可能な空間依存型のハザードモデルを構築する。

図-1 左には、ある時点でのコンクリート表面の剥離・剥落状況を示している。さらに時間経過によって、コンクリート表面の状況が図-1 右のように変化した場合を考える。このとき、図中に黄色で示すメッシュは空間的に独立に発生した剥離・剥落であり、過去の研究でその影響因子と統計的ハザードモデルによる発生予測法が検討されてきた¹⁰⁾。一方で図中に赤色で示すメッシュは、近傍で以前に剥離・剥落しているメッシュの影響を受けてその後発生した剥離・剥落である。本研究では図-1 右に赤矢印で示す近接メッシュへの剥離・剥落の発生の空間的連鎖の影響を、空間的確率伝播として空間統計モデルにより表現する。このような空間的確率伝播を組み込んだハザードモデルを構築することで、剥離・剥落の発生規模や進展方向予測が可能となる。また、このような空間連鎖性の定量的評価は大規模な剥離・剥落を抑制するためのかぶり厚の（厚さのみならず、そのばらつきを制御するような）設定法に関する定量的な議論を可能にする。空間的確率伝播を組み込んだハザードモデルとして、本研究では空間自己回帰ハザードモデルを開発する。本モデルは時間的な劣化の進展を表すワイブルハザードモデルと、空間的な劣化進展を表す空間自己回帰モデルを融合させた時空間モデルである。

3. 空間的ワイブル劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

かぶりコンクリートの剥離・剥落過程をモデル化するために、図-2 に示すような時刻 $t = 0$ から無限遠に

続く連続時間軸を導入する。時刻 $t = 0$ に対象とする鉄道高架橋の高欄の供用が開始され、それ以降の任意の時刻にわたって実態調査が実施される。現時刻までに時刻 $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_U)$ において、合計 U 回の実態調査が実施されている。ただし、0 回目の実態調査は供用開始時刻を表し、 $\tau_0 = 0$ である。また、鉄道高架橋の高欄を図-3 に示すように、鉛直方向に P 個、水平方向に Q 個、合計 $P \times Q$ 個のメッシュへと分割し、これらメッシュ単位で剥離・剥落事象が発生する。時刻 τ に実施される実態調査により、各メッシュにおける剥離・剥落発生の有無が判定される。

(2) ワイブル劣化ハザードモデル

空間的ワイブル劣化ハザードモデルは、各メッシュの空間的連鎖性を考慮したワイブル劣化ハザードモデルである。ハザードモデルに関する詳細は、参考文献^{14),15)}に譲る。ここでは、空間的ワイブル劣化ハザードモデルを定式化するに先立って、読者の便宜を図るために、ワイブル劣化ハザードモデル⁷⁾について簡単に説明しておく。

いま、各メッシュの剥離・剥落発生事象が、互いに独立であり、剥離・剥落発生確率が時間とともに増大すると仮定する。対象とする鉄道高架橋の高欄の供用が開始されたとし、高欄のあるメッシュにおけるかぶりコンクリートの剥離・剥落が発生するまでの期間（以下、寿命と呼ぶ）に着目する。メッシュの寿命を確率変数 ζ で表し、確率密度関数 $f(\zeta)$ 、分布関数 $F(\zeta)$ に従って分布すると仮定する。ただし、寿命 ζ の定義域は $[0, \infty)$ である。供用開始から任意の時刻 $t \in [0, \infty)$ まで、剥離・剥落が発生しないで生存する確率（以下、生存確率と呼ぶ） $\tilde{F}(t)$ は、全事象確率 1 から時刻 t までに剥離・剥落が発生する累積発生確率 $F(t)$ を差し引いた値

$$\tilde{F}(t) = 1 - F(t) \quad (1)$$

により定義できる。ここで、あるメッシュにおいて剥

離・剥落が時刻 t まで発生せず、かつ、期間 $[t, t + \delta t]$ 中にはじめて発生する確率は

$$\lambda(t)\delta t = \frac{f(t)\delta t}{\tilde{F}(t)} \quad (2)$$

と表せる。剥離・剥落が時刻 t まで発生せず、かつ当該時刻で発生する確率密度関数 λ を「ハザード関数」と呼ぶ。式 (1) の両辺を t に関して微分することにより、

$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = -f(t) \quad (3)$$

を得る。この時、式 (2) は

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\tilde{F}(t)} = \frac{d}{dt} \left(-\log \tilde{F}(t) \right) \quad (4)$$

と変形できる。ここで、 $\tilde{F}(0) = 1 - F(0) = 1$ を考慮し、式 (4) を積分すれば

$$\int_0^t \lambda(u)du = -\log \tilde{F}(t) \quad (5)$$

を得る。したがって、劣化ハザード関数 $\lambda(u)$ を用いれば、時刻 t まで剥離・剥落が発生しない確率 $\tilde{F}(t)$ は

$$\tilde{F}(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda(u)du \right] \quad (6)$$

と表される。このように、劣化ハザード関数 $\lambda(u)$ の形式を決定すれば、メッシュの生存確率 $\tilde{F}(t)$ を導出することができる。さらに、 $\tilde{F}(t) = 1 - F(t)$ より、剥離・剥落の累積発生確率 $F(t)$ を求めることができる。ここで、劣化ハザード関数としてワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda(t) = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'\alpha t^{\alpha-1} \quad (7)$$

を考える。ただし、メッシュ間の剥離・剥落発生過程の違いがメッシュ特性により表現されると考え、メッシュの特性を M 個の特性変数 $x^m (m = 1, \dots, M)$ を用いて表現している。また、 $\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \dots, \beta^M)$ は未知パラメータベクトルであり、 ι は転置操作を示し、特性 α は形状を表すパラメータである。 $\alpha = 1$ のとき、ハザード率は時間に依存せず一定値となる。ワイブル劣化ハザード関数を用いた場合、メッシュの寿命の確率密度関数 $f(t)$ 、およびメッシュの生存確率 $\tilde{F}(t)$ はそれぞれ

$$f(t) = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'\alpha t^{\alpha-1} \exp(-\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'t^\alpha) \quad (8)$$

$$\tilde{F}(t) = \exp(-\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'t^\alpha) \quad (9)$$

と表される。

(3) 空間的ワイブル劣化ハザードモデル

実際の高欄においては、各メッシュにおける剥離・剥落発生事象が独立とは考えがたく、剥離・剥落の発生確率が大きいメッシュの近傍では、剥離・剥落の発生確率が同様に大きくなるような空間的連鎖性が存在すると考えられる。いま、メッシュ (p, q) におけるハザード率を $\lambda_{p,q}$ とし、当該メッシュにおけるハザード率が、隣り合うメッシュのハザード率から影響を受けるとする。このとき、鉛直方向への影響を表す自己相関係数を ρ_p 、

水平方向への影響を表す自己相関係数を ρ_q とすると、メッシュ (p, q) における空間的ワイブル劣化ハザード関数 $\lambda_{p,q}$ を

$$\begin{aligned} \lambda_{p,q} &= \mathbf{x}_{p,q}\boldsymbol{\beta}'\alpha t^{\alpha-1} \\ &+ \rho_p(\lambda_{p-1,q} - \lambda_{p,q}) + \rho_p(\lambda_{p+1,q} - \lambda_{p,q}) \\ &+ \rho_q(\lambda_{p,q-1} - \lambda_{p,q}) + \rho_q(\lambda_{p,q+1} - \lambda_{p,q}) \end{aligned} \quad (10)$$

と表すことができる。第 2 項より後ろの項は、隣り合うメッシュ間でハザード率が類似している様子を表現する、空間的自己相関項である。また、 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,Q}, \dots, \lambda_{P,1}, \dots, \lambda_{P,Q})'$ 、 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{1,1}, \dots, \mathbf{x}_{1,Q}, \dots, \mathbf{x}_{P,1}, \dots, \mathbf{x}_{P,Q})'$ とし、式 (10) を整理して行列表示すると、

$$(1 + 2\rho_p + 2\rho_q)\boldsymbol{\lambda} = \rho_p\mathbf{W}_p\boldsymbol{\lambda} + \rho_q\mathbf{W}_q\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}'\alpha t^{\alpha-1} \quad (11)$$

と表すことができる。ここにおいて、 \mathbf{W}_p は鉛直方向の空間重み付け行列、 \mathbf{W}_q は水平方向の空間重み付け行列であり、その要素 $w_{p,q}^p$ 、 $w_{p,q}^q$ は、

$$w_{p,q}^p = \begin{cases} 1 & p = q \pm Q \\ 1 & p = q \\ (p \leq Q \text{ or } (P-1)Q \leq p \leq PQ) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12a)$$

$$w_{p,q}^q = \begin{cases} 1 & p = q \pm 1 \\ 1 & p = q = (i-1)Q + 1 \\ \text{or } p = q = iQ \\ (1 \leq i \leq P) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12b)$$

である。さらに、 \mathbf{I} を $P \times Q$ 行 $P \times Q$ 列の単位行列とし、式 (11) を変形すると

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ (1 + 2\rho_p + 2\rho_q)\mathbf{I} - \rho_p\mathbf{W}_p - \rho_q\mathbf{W}_q \right\}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}'\alpha t^{\alpha-1} \quad (13)$$

と書き換えることができる。式 (13) のハザード関数を用いることで、任意の時刻におけるメッシュ (p, q) の生存確率を算出することができる。式 (13) における未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\theta} = (\rho_p, \rho_q, \alpha, \boldsymbol{\beta})$ とおくと、時刻 t までにメッシュ (p, q) で剥離・剥落が発生しない確率 $\tilde{F}(t|\lambda_{p,q}(\boldsymbol{\theta}))$ は

$$\tilde{F}(t|\lambda_{p,q}(\boldsymbol{\theta})) = \exp \left[-\int_0^t \lambda_{p,q}(\boldsymbol{\theta})dt \right] \quad (14)$$

によって表される。

実態調査により、メッシュごとに、実態調査を実施した時刻 $\tau_u (u = 1, \dots, U)$ 、および剥離・剥落発生の有無に関する情報を得ることができる。実態調査を実施したある時刻 $t = \tau_{r,p,q}$ を考える。時刻 $\tau_{r,p,q}$ は、 r 回目の実態調査によりメッシュ (p, q) において初めて剥離・剥落が観測された時刻を表す。以下、煩雑さを避けた

め、当面の間添え字 p, q を省略し、当該時刻を τ_r と簡単に表記する。この場合、剥離・剥落が発生した正確な時刻を把握することはできないが、時刻 $t = \tau_{r-1}$ において剥離・剥落が発生しておらず、時刻 $t = \tau_r$ において剥離・剥落が発生していることから、少なくとも期間 $[\tau_{r-1}, \tau_r)$ の中のどこかで剥離・剥落が発生したということを把握できる。メッシュ (p, q) において、寿命が少なくとも $t = \tau_{r-1}$ より大きく、かつ期間 $[\tau_{r-1}, \tau_r)$ において剥離・剥落が発生する確率は

$$\begin{aligned} & \Pr(\tau_{r-1} \leq \zeta \leq \tau_r) \\ &= \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} f(t|\lambda_{p,q}) dt \\ &= \tilde{F}(\tau_{r-1}|\lambda_{p,q}) - \tilde{F}(\tau_r|\lambda_{p,q}) \end{aligned} \quad (15)$$

と表すことができる。また、実態調査によってメッシュ (p, q) に剥離・剥落の発生が観測されない場合、当該メッシュの寿命は少なくとも τ_U より大きいことを把握できる。この時、実態調査の実施により、剥離・剥落の発生が観測されない確率は $\tilde{F}(\tau_U|\lambda_{p,q})$ となる。ここで、メッシュ (p, q) において、 U 回の実態調査時に剥離・剥落が発生していたか否かを表すダミー変数 $\delta_{p,q}$ を

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \tau_{r-1} \leq \zeta_{p,q} \leq \tau_r \text{ のとき} \\ 0 & \zeta_{p,q} \geq \tau_U \text{ のとき} \end{cases} \quad (16)$$

と定義する。このとき、高欄 $k (k = 1, \dots, K)$ の実態調査によって観測値ベクトル $\bar{\xi}_{p,q}^k = (\bar{\tau}^k, \bar{\tau}_{r_{p,q}}^k, \bar{\delta}_{p,q}^k, \bar{\alpha}_{p,q}^k)$ が観測される同時生起確率（尤度） $\mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k)$ は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ &= \left\{ \tilde{F}(\bar{\tau}_{r_{p,q}-1}^k|\lambda_{p,q}^k(\theta)) - \tilde{F}(\bar{\tau}_{r_{p,q}}^k|\lambda_{p,q}^k(\theta)) \right\}^{\bar{\delta}_{p,q}^k} \\ & \quad \left\{ \tilde{F}(\bar{\tau}_U^k|\lambda_{p,q}^k(\theta)) \right\}^{1-\bar{\delta}_{p,q}^k} \end{aligned} \quad (17)$$

と表すことができる。したがって、すべての高欄の実態調査によって獲得された全データセット $\bar{\Xi}$ が観測される尤度は、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi}) \\ &= \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

4. モデルの推計法

(1) ベイズ推定の概要

本研究では、空間的ワイブル劣化ハザードモデルに対して、マルコフ連鎖モンテカルロ法¹⁶⁾（以下、MCMC法）を利用したベイズ推定を行う。一般的なベイズ推定手法では、パラメータの事前分布と、観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推定する。ここで、未知パラメータベクトル

θ が確率変数で、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ に従うと仮定する。観測値データ $\bar{\Xi}$ が与件であるときに、未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ はベイズの定理より、

$$\pi(\theta|\bar{\Xi}) \propto \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})\pi(\theta) \quad (19)$$

と近似でき、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ と尤度関数 $\mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})$ により、表すことができる。

(2) 事後分布の定式化

事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ は、

$$\pi(\theta) = \pi(\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta) = \pi(\rho_p)\pi(\rho_q)\pi(\alpha)\pi(\beta) \quad (20)$$

と展開できる。式 (20) の未知パラメータベクトル θ の事前確率密度関数をそれぞれ以下のように設定する。まず、空間的自己相関パラメータ ρ_p, ρ_q の事前確率密度関数 $\pi(\rho_p)$, $\pi(\rho_q)$ をそれぞれ正規分布 $\mathcal{N}(\rho_p^0, P_p^0)$, $\mathcal{N}(\rho_q^0, P_q^0)$ 、加速度パラメータ α の事前確率密度関数 $\pi(\alpha)$ を正規分布 $\mathcal{N}(\alpha_0, A_0)$ にしたがう確率変数とする。 β の事前確率密度関数 $\pi(\beta)$ としては多次元正規分布を用いる。すなわち、 $\beta \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}_0, \Sigma_{\mathbf{b}_0})$ である。なお、添え字 0 はハイパーパラメータを表す。以上から、同時事後確率密度関数は式 (19) に式 (18)、式 (20) に代入することで、

$$\begin{aligned} & \pi(\theta|\bar{\Xi}) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ & \quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2P_p^0} (\rho_p - \rho_p^0)^2 \right\} \\ & \quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2P_q^0} (\rho_q - \rho_q^0)^2 \right\} \\ & \quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2A_0} (\alpha - \alpha_0)^2 \right\} \\ & \quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mathbf{b}_0)' \Sigma_{\mathbf{b}_0}^{-1} (\beta - \mathbf{b}_0) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

と表すことができる。

(3) 同時事後確率密度関数の推定

空間的ワイブル劣化ハザードモデルの同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ を求めるために、条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリング¹⁶⁾ を用いる手法がある。ここでは、未知パラメータベクトル θ を各未知パラメータ $\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta$ に分け、他のパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数を用いて、式 (21) を算出する。なお、ギブスサンプリングにおける各パラメータの条件付き事後確率密度関数の算出に際しては、事後分布から直接サンプリングすることが困難なために、それぞれに対してメトロポリス・ヘイスティング法（以下、MH法）を用いる必要がある。

はじめに空間的ワイブル劣化ハザードモデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を算出する。式 (21) より, ρ_q, α, β を既知とした時の ρ_p の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\rho_p|\rho_q, \alpha, \beta, \Xi)$ は,

$$\begin{aligned} & \pi(\rho_p|\rho_q, \alpha, \beta, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2P_0^0}(\rho_p - \rho_p^0)^2\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

と表せる。また, ρ_p, α, β が既知とした時の ρ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\rho_q|\rho_p, \alpha, \beta, \Xi)$ は

$$\begin{aligned} & \pi(\rho_q|\rho_p, \alpha, \beta, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2P_0^0}(\rho_q - \rho_q^0)^2\right\} \end{aligned} \quad (23)$$

と表せる。同様に ρ_p, ρ_q, β が既知とした時の α の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\alpha|\rho_p, \rho_q, \beta, \Xi)$ についても,

$$\begin{aligned} & \pi(\alpha|\rho_p, \rho_q, \beta, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2A_0}(\alpha - \alpha_0)^2\right\} \end{aligned} \quad (24)$$

と表すことができる。さらに, ρ_p, ρ_q, α が既知とした時の β の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta|\rho_p, \rho_q, \alpha, \Xi)$ については,

$$\begin{aligned} & \pi(\beta|\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{p=1}^P \prod_{q=1}^Q \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}_{p,q}^k) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \mathbf{b}_0)' \Sigma_{\mathbf{b}_0}^{-1} (\beta - \mathbf{b}_0)\right\} \end{aligned} \quad (25)$$

と表すことができる。

これらの条件付き確率密度関数に対して MH 法を用いてサンプリングを行い, 式 (21) の同時事後確率密度関数を算出する。MH 法では事後分布 (目標分布) からのサンプリングが難しい場合に, これを近似するような分布 (提案分布) からサンプリングを行う。これと同時に目標分布と提案分布の差異を修正する。これらの操作をギブスサンプリングと同様の手順に従い繰り返し続けたとき, 十分に大きな繰り返し回数においてサンプリングされた標本は目標分布からランダムサンプリングされた標本とみなすことができる¹⁷⁾。

いま, 目標分布を $\pi(\theta|\Xi)$, 提案分布の確率密度関数を $q(\theta'|\theta^{(n-1)})$ と表す。提案分布を用いて n 回目のサンプリングで事後分布からの標本の候補として $q(\theta'|\theta^{(n-1)})$

に従う標本 θ' を発生させる。提案された標本 θ' は目標分布 $\pi(\theta|\Xi)$ からの標本でないために, その差を修正するために, 確率

$$\psi(\theta'|\theta^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\theta'|\Xi)q(\theta'|\theta^{(n-1)})}{\pi(\theta^{(n-1)}|\Xi)q(\theta^{(n-1)}|\theta')} \right] \quad (26)$$

に従って受容し, $\theta^{(n)} = \theta'$ とする。また棄却された場合には $\theta^{(n)} = \theta^{(n-1)}$ とする。

本研究ではランダムウォーク MH 法を用いて, 式 (22), (23), (24), (25) の各条件付き確率密度関数からサンプリングを行う。

まず, $\pi(\rho_p|\rho_q, \alpha, \beta, \Xi)$ のサンプリングにおいて, n 回目の候補を,

$$\rho_p' = \rho_p^{(n-1)} + \mathcal{N}(0, P_p) \quad (27)$$

で表されるランダムウォークにより発生させる。このとき, 提案分布の確率密度 q は $(\rho_p', \rho_p^{(n-1)})$ に関して対称となるために, ランダムウォークにより発生させた候補 ρ_p' は確率

$$\begin{aligned} & \psi_{\rho_p}(\rho_p'|\rho_p^{(n-1)}) \\ & = \min \left[\frac{\pi(\rho_p'|\rho_q^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)}{\pi(\rho_p^{(n-1)}|\rho_q^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \Xi)}, 1 \right] \end{aligned}$$

で受容される。実際の数値計算では区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布 $\mathcal{U}(0, 1)$ から, 一様乱数 $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ を発生させ, $\rho_p^{(n)}$ を以下のルールに従い決定する。

$$\rho_p^{(n)} = \begin{cases} \rho_p^{(n-1)} & u > \psi_{\rho_p} \\ \rho_p' & u \leq \psi_{\rho_p} \end{cases} \quad (28)$$

$\pi(\rho_q|\rho_p, \alpha, \beta, \Xi)$, $\pi(\alpha|\rho_p, \rho_q, \beta, \Xi)$, $\pi(\beta|\rho_p, \rho_q, \alpha, \Xi)$ についても, 同様の方法でサンプリングを行う。

以下に具体的な推定手順を示す。

ステップ 1

事前分布のパラメータ値 $\rho_p^0, P_p^0, \rho_q^0, P_q^0, \alpha_0, A_0, \mathbf{b}_0, \Sigma_{\mathbf{b}_0}$ を任意に設定する。また, 未知パラメータ $\theta = [\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta]$ の初期値 $\theta^{(0)} = (\rho_p^{(0)}, \rho_q^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ を任意に設定する。初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れる。また, 定常状態に収束した後のサンプリングとは無関係である。

ステップ 2-1

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\rho_p^{(n)}$ を $\pi(\rho_p|\rho_q, \alpha, \beta, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。

ステップ 2-2

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\rho_q^{(n)}$ を $\pi(\rho_q|\rho_p, \alpha, \beta, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。

ステップ 2-3

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\alpha^{(n)}$ を $\pi(\alpha|\rho_p, \rho_q, \beta, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする.

ステップ 2-4

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\beta^{(n)}$ を $\pi(\beta|\rho_p, \rho_q, \alpha, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする.

ステップ 3

十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\theta^{(n)} = (\rho_p^{(n)}, \rho_q^{(n)}, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$ を記録する.

ステップ 4

$n = \bar{n}$ ならば計算を終了する. $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ としてステップ 2 に戻る.

十分大きな \underline{n} に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば, ランダムウォーク MH 法を用いたサンプリングによる $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ のサンプリングは式 (19) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる. したがって, サンプリングによって得られるこれらの標本 $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ を用いて, パラメータベクトル $\theta = [\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta]$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる.

(4) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて, パラメータベクトル $\theta = [\rho_p, \rho_q, \alpha, \beta]$ に関する推定値を決定することができる. いま, MCMC 法により得られた標本を $\theta^{(n)} = (\rho_p^{(n)}, \rho_q^{(n)}, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)}) = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_K^{(n)}) (n = 1, \dots, \bar{n})$ と表すこととする. なお, $K = 1 + 1 + 1 + M$ である. このうち, 最初の \underline{n} 個を事後分布への収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する. そのうえで, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する. このとき, パラメータ θ の同時確率分布関数 $G(\theta)$ は,

$$G(\theta) = \frac{\#\{\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (29)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である. また, パラメータ θ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\theta) &= (\tilde{\zeta}(\theta_1), \dots, \tilde{\zeta}(\theta_K))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_1^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_K^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \quad (30) \end{aligned}$$

と表される. また, ギブスサンプリングによる標本を用いて, パラメータ θ の信用域を定義できる. $100(1 - 2\kappa)\%$ 信用域は, 標本順序統計量 $(\theta_k^\kappa, \bar{\theta}_k^\kappa) (k = 1, \dots, K)$

$$\theta_k^\kappa = \arg \max_{\theta_k^*} \frac{\#\{\theta_k^{(n)} \leq \theta_k^*, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \quad (31a)$$

$$\bar{\theta}_k^\kappa = \arg \min_{\theta_k^{**}} \frac{\#\{\theta_k^{(n)} \geq \theta_k^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \quad (31b)$$

$$\bar{\theta}_k^\kappa = \arg \min_{\theta_k^{**}} \frac{\#\{\theta_k^{(n)} \geq \theta_k^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \quad (31b)$$

を用いて $\theta_k^\kappa < \theta_k < \bar{\theta}_k^\kappa$ と定義できる.

MCMC 法では, 初期パラメータ値 $\theta^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. ギブスサンプリングで発生させた \bar{n} 個のサンプルのうち, 最初の \underline{n} 個の標本 $\theta^{(n)} (n = 1, \dots, \underline{n})$ を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える. その上で, 第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本を取り上げる. $\underline{n} + 1$ 以降の標本が, 不変分布である事後分布からの標本であるかを Geweke の方法¹⁸⁾を用いて仮説検定を試みる.

5. おわりに

本研究では, 実態調査のデータに基づき, 不確実性を考慮したコンクリートの剥離・剥落発生予測を実施するための方法論を提案した. 具体的には, 時間の経過とともに鉄筋が腐食し, 剥離・剥落発生数が増大する現象をワイブル劣化ハザードモデルを用いて表現し, その後, 鉄筋腐食により局所的に剥離・剥落発生数が増大する現象を, 空間的な連鎖性としてワイブル劣化ハザードモデルに組み込んだ, 空間的ワイブル劣化ハザードモデルを提案した. なお, 講演会当日には, 本研究で提案した手法を実際の RC 高欄のデータに適用し, 有効性を検証した事例を紹介する.

参考文献

- 1) 川村力, 谷村幸裕, 曾我部正道, 佐藤勉, 長谷川雅志: 実態調査に基づく鉄道高架橋におけるかぶりの施工誤差に関する研究, 土木学会論文集, No.767/V-64, pp.253-266, 2004.
- 2) 谷村幸裕, 長谷川雅志, 曾我部正道, 佐藤勉: 鉄道 RC ラーメン高架橋の中性化に関する耐久性照査法の適用に関する研究, 土木学会論文集, No.760/V-63, pp.147-157, 2004.
- 3) 川村力, 谷村幸裕, 曾我部正道, 鳥取誠一, 長谷川雅志, 東川考治: 鉄道構造物の調査に基づくコンクリート中への塩化物イオン浸透に関する研究, 土木学会論文集, No.781/V-66, pp.193-204, 2005.
- 4) 鉄道総合技術研究所編: 鉄道構造物等維持管理標準・同解説 (構造物編) コンクリート構造物, 丸善, 2007.
- 5) 曾我部正道, 谷村幸裕, 松橋宏治, 宇野国和: 鉄道高架橋の RC 高欄の変状調査とその劣化予測, コンクリート工学, Vol.47, No.8, pp.16-24, 2009.
- 6) 轟俊太郎, 曾我部正道, 谷村幸裕, 松橋宏治: 鉄筋腐食によるかぶりコンクリート剥落の実態調査, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, No.1, pp.1103-1108, 2010.
- 7) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 8) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード

- 率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 9) 貝戸清之, 起塚亮輔, 伊藤哲男, 橋爪兼治, 出口宗治: 床板かぶりコンクリートの剥離・剥落発生リスクと最適点検政策, 土木学会論文集 F4 (建設マネジメント), Vol.68, No.1, pp.11-27, 2012.
 - 10) 松岡弘大, 貝戸清之, 徳永宗正, 曾我部正道: 鉄筋腐食を考慮した RC 高欄の剥離・剥落発生モデル, コンクリート工学年次論文集, Vol.34, No.2, pp.1435-1440, 2012.
 - 11) 堤盛人, 瀬谷創: 応用空間統計学の二つの潮流」空間統計学と空間計量経済学, 統計数理, Vol.60, No.1, pp.3-25, 2012.
 - 12) Anselin, L.: *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
 - 13) 松本光矢, 曾我部正道, 轟俊太郎, 谷村幸裕: 内的塩害と中性化の複合劣化を対象とした劣化予測に関する検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, No.2, pp.1423-1428, 2010.
 - 14) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
 - 15) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
 - 16) 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
 - 17) 伊庭幸人: 計算統計学のフロンティア-計算統計 II, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, 2005.
 - 18) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, 1996.

(2013. 8. 2 受付)

A PEELING/FLACKING PREDICTION MODEL FOR RC HANDRAILS IN CONSIDERATION OF A SPATIAL CHAIN

Rentaro HAYASHI, Kengo OBAMA and Kiyoyuki KAITO

Occurrence of peeling/flacking of concrete of RC handrails is a typical deterioration phenomenon in a concrete structure. From the point of view of structural safety and third party damage, it is necessary to evaluate the risk of peeling/flacking accurately and to cope with peeling/flacking. In this study, the authors propose the methodology based on the data obtained from investigation to predict on peeling/flacking of concrete in consideration of uncertainty. Concretely, a Weibull hazard model is formulated to express a corrosion of reinforcement with progress of time and an increase of the number of peeling/flacking. Moreover, a partial increase of the number of peeling/flacking caused by a corrosion of reinforcement is expressed as a spatial chain. Finally, a spatial Weibull hazard model is composed by both Weibull hazard model and a spatial chain.