

ボトルネック渋滞を考慮した 出発・始業時刻均衡モデル

高山 雄貴¹

¹正会員 愛媛大学 助教 大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番)
E-mail: takayama@cee.ehime-u.ac.jp

時差出勤制度は、通勤ラッシュ時の渋滞緩和のための TDM 施策の一つとして注目されている。しかし、労働時間を分散化させるこの制度は、企業の生産効率を低下させる効果を持つことが知られており、その外部性が時差出勤の普及を妨げている。そこで、時差出勤の維持可能性や効率性を検証するために、出発・始業時刻均衡モデルによる分析が古くから行われてきた (e.g., Henderson, 1981; 赤松・佐藤, 2006) もの、その均衡状態の一般特性 (e.g., 一意性・安定性) は未だ十分には明らかにされていない。そこで、本研究では、赤松・佐藤 (2006) に基づき、ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻均衡モデルを構築する。そして、このモデルがポテンシャル・ゲームとして表現できることを利用し、均衡状態の一般特性を明らかにする。その結果から、時差出勤制度の維持可能性・効率性を検証する。

Key Words : *staggered working hours, bottleneck congestion, uniqueness, stability*

1. はじめに

多くの都市で、中心市街地に向かう通勤交通により交通渋滞が発生している。これは、殆どの企業の業務スケジュールが固定的であり、同時に始業するためである。そこで、企業の始業時間を分散させ、交通渋滞を緩和させる効果がある、時差出勤制度に関する議論が多く行われてきた。この制度は、東日本大震災直後、電力不足の影響もあり、日本の多くの企業で一時的に導入されることとなった。しかし、その状態は定着せず、今では殆どの企業が時差出勤を取りやめている。これは、Wilson¹⁾ により示唆されるように、時差出勤制度の導入が企業間の相互取引機会の減少に伴う業務効率の低下をもたらすためである。このように、始業時刻の分散化を推進する方策は、社会的には家計の通勤混雑解消と、企業の生産性低下のトレードオフ関係を内包している。したがって、この方策の効果や実現の可能性を検証するには、企業と家計双方の行動を合わせて考える必要がある。

Henderson²⁾ は、これらの効果を考慮した均衡モデルを構築し、時差出勤制度の維持可能性や効率性を検証している。しかし、このモデルは、通勤ピーク時の道路混雑を静的なモデルにより表現しており、通勤時間に多大な影響を与える渋滞待ち行列の影響を考慮できない枠組みとなっている。さらに、始業時刻が連続的に分布している状態を仮定した分析しかなされていない。したがって、現実に見られるような、始業時刻が

いくつかの特定の時刻 (e.g., 8 時半, 9 時, 9 時半) に集中する状況を考慮できていない。さらに、時差出勤が行われていない状況との比較もなされていない。佐藤・赤松³⁾ は、ボトルネック渋滞を考慮した始業・出発時刻均衡モデルを構築し、その均衡状態の特性を明らかにしている。しかし、このモデルには、複数の均衡状態が存在することが確認されているにも関わらず、その安定性は未確認のままとなっている¹⁾。

そこで、本研究では、ボトルネック混雑と離散的な始業時刻を表現することができる始業・出発時刻均衡モデルを構築する。そして、このモデルで創発する安定均衡状態と社会的最適状態の特性を明らかにする。そのために、本稿で提示するモデルが、ポテンシャル・ゲームの形で表現される (i.e., 均衡条件と等価な最適化問題が構成できる) ことを示す。そして、ポテンシャル・ゲームの性質を利用して、安定均衡状態・社会的最適状態の一般特性を解析的に明らかにする。

2. 出発・始業時刻同時均衡モデル

(1) 都市と交通条件の設定

単一の住宅地と CBD を持つ都市を想定する (図-1)。その住宅地と CBD との間に、CBD 直前に単一のボト

¹ 道路交通とは異なるものの、鉄道通勤を対象とした時差出勤制度に関する研究は、奥村らによる一連の研究^{4,5,6,7)} により蓄積されている。また、時差出勤とは若干枠組みが異なるものの、Flexitime 制度の導入効果に関する分析も、Mun and Yonekawa⁸⁾、吉村・奥村⁹⁾、Yoshimura and Okumura¹⁰⁾、吉村ら¹¹⁾ により行われている。

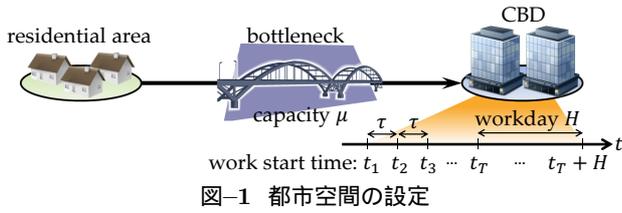


図-1 都市空間の設定

ルネックをもつ道路が存在すると仮定する。

総数 N 人の労働者は、毎朝、住宅地から自らが働く企業が立地する CBD へ自動車通勤する。本稿では、この通勤時に生じるピークロード混雑を、Vickrey¹²⁾、Arnott et al.¹³⁾ の point queue モデルに基づいて定式化する。具体的には、自動車の通勤所要時間は、自宅からボトルネックまでの所要時間と、ボトルネックでの待ち時間で与えられる。ここで、全ての自動車は、自宅からボトルネックまで一定速度で走行すると仮定し、その所要時間は $t_f = 0$ とする。また、ボトルネックでの待ち行列は、流入する交通流率その容量を超えた際に発生し、その長さに応じて待ち時間が決定される。

全ての企業は、CBD に立地している。その各々の企業は、始業時刻を一定間隔 τ に並ぶ T 種類の選択肢 $\{t_1, t_2, \dots, t_T\}$ から決定することができる²。すなわち、 $t_i = \tau + t_{i-1}$ が成立する。ただし、ここでは、 $t_T \leq t_1 + H$ が成立すると仮定する。また、企業の就業時間は H とする。

(2) 主体の行動

a) 労働者の行動

労働者は、賃金、通勤時間とスケジュールコストから構成される効用を最大化する。全ての労働者は均質であり、その効用最大化行動は次のように与えられる：

$$\max_i \left\{ \max_t u_i = w_i - c_i(t) \right\}. \quad (1)$$

ここで、 u_i は始業時刻 t_i の企業に勤める労働者の効用、 t は CBD 到着時刻、 w_i は始業時刻 t_i の企業から得られる賃金、 $c_i(t)$ は渋滞待ち時間 $q(t)$ とスケジュールコスト $s(|t - t_i|)$ の和で表される通勤費用である：

$$c_i(t) = q(t) + s(|t - t_i|). \quad (2)$$

本稿では、スケジュールコスト関数 $s(x)$ は凸関数であると仮定する³。

² 本稿では、企業が選択できる始業時刻は連続的でなく離散的であると仮定する。これは、殆どの始業時刻が、8:30、9:00、9:30 のように、いくつかの時刻に集中している状況を反映するためのものである。

³ この仮定は、Daganzo¹⁴⁾、Kuwahara¹⁵⁾ で証明されているように、FIFW 条件を満たす時刻選択パターンが一意に定まるようにするためのものである。

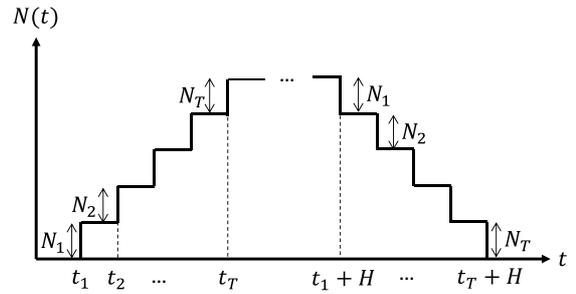


図-2 時刻別の労働者数

b) 企業の行動

企業のある時刻 t での“瞬間的”生産関数を、その時間の労働者数 $N(t)$ の次の関数で定義する：

$$\alpha n_i N(t). \quad (3)$$

ここで、下付き添え字 i は時間 t_i に始業する企業を表し、 n_i はある 1 企業の労働者数、 $N(t)$ は時刻 t での企業全体の総労働者数である。また、 α は技術水準パラメータである。一日の生産量 $f_i(n_i)$ は瞬間的生産関数を始業時刻 t_i から終業時刻 $t_i + H$ まで積分したものとなる：

$$f_i(n_i) = \alpha n_i \int_{t_i}^{t_i+H} N(t) dt. \quad (4)$$

設定できる始業時間が、一定間隔 τ で、 t_1, t_2, \dots, t_T の T 存在し、その各々の時間の企業の総労働者数を N_1, N_2, \dots, N_T とした場合、 $N(t)$ は次のように与えられる(図-2)：

$$N(t) = \begin{cases} N_1 & \text{if } t \in (t_1, t_2), \\ N_1 + N_2 & \text{if } t \in [t_2, t_3), \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^j N_k & \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}), \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^T N_k & \text{if } t \in [t_T, t_1 + H), \\ \sum_{k=2}^T N_k & \text{if } t \in [t_1 + H, t_2 + H), \\ \vdots & \\ \sum_{k=j}^T N_k & \text{if } t \in [t_{j-1} + H, t_j + H), \\ \vdots & \\ N_T & \text{if } t \in [t_{T-1} + H, t_T + H). \end{cases} \quad (5)$$

この生産関数の下で、企業は次の利潤最大化行動を行う：

$$\max_{n_i} \pi(n_i) = f_i(n_i) - w_i n_i, \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } n_i > 0. \quad (6b)$$

したがって、一階条件(利潤ゼロ条件)より、賃金 w_i が

与えられる:

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha \int_{t_i}^{t_i+H} N(t) dt \\ &= \alpha \sum_{k=1}^T \{H - |i - k| \tau\} N_k. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, $\tau \equiv t_i - t_{i-1}$ である.

(3) 出発・始業時刻選択均衡条件

労働者・企業の出発・始業時刻選択均衡条件は次のように与えられる:

$$\begin{cases} n_i(t)(c_i^* - q(t) - s(|t - t_i|)) = 0, \\ n_i(t) \geq 0, c_i^* - q(t) - s(|t - t_i|) \geq 0, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} q(t)(\mu - \sum_k n_k(t)) = 0, \\ q(t) \geq 0, \mu - \sum_k n_k(t) \geq 0, \end{cases} \quad (8b)$$

$$\int n_i(t) dt = N_i. \quad (8c)$$

$$\begin{cases} N_i \{u_i^* - (w_i - c_i^*)\} = 0, \\ N_i \geq 0, u_i^* - (w_i - c_i^*) \geq 0, \end{cases} \quad (8d)$$

$$\sum_k N_k = N. \quad (8e)$$

ここで, $n_i(t)$ は, CBD に到着する時刻 t である, 始業時刻が t_i の企業の労働者数である. また, c_i^*, u_i^* は, 各々, 始業時刻が t_i の企業の労働者に関する, 均衡通勤費用と均衡効用である.

均衡条件 (8a), (8d) は, 各々, CBD 到着時刻 (または, 居住地からの出発時刻) ・労働者の始業時刻 (または, 勤務する企業) 選択の無裁定条件を表している. すなわち, どの労働者も自らの始業時刻・CBD 到着時刻を変更するインセンティブを持たないことを意味している. 条件 (8b) は, ボトルネックの容量制約である: 流出時刻 t においてボトルネックに渋滞 (渋滞待ち時間 $q(t)$) が発生する場合, その時刻のボトルネック流出者数は容量 μ に等しく, 渋滞が発生していない時刻の流出者数は μ 以下である. 条件 (8c), (8e) は, 各々, 各始業時刻の通勤者数と総労働者数の保存則である.

3. 均衡状態の一意性と安定性

(1) 均衡条件の等価表現

前節で示した均衡条件から, 均衡解の一意性・安定性を調べることは容易ではない. そこで, 均衡条件 (8) が, 均衡解の一意性・安定性を調べやすい, 最適化問題として表現できることを示そう⁴.

⁴ 井料ら¹⁶⁾で示されているとおり, 最適化問題 (9) の解は FIFO 条件を満たすとは限らない. すなわち, FIFO 条件が成立するための条件 $q(t+dt) - q(t) \geq dt \forall t$ は必ずしも満たされない. そこで, 本稿ではこの条件が常に満たされると仮定する. より具体的には, ボトルネック容量やスケジュールコスト関数のパ

命題 3.1 均衡条件 (8) は, 以下の最適化問題の極値条件と等価である:

$$\max_{\{n_i(t)\}, \{N_i\}} P = P_1(\{N_i\}) - P_2(\{n_i(t)\}), \quad (9a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k n_k(t) \leq \mu, \quad (9b)$$

$$\int n_i(t) dt = N_i, \quad (9c)$$

$$\sum_k N_k = N, \quad (9d)$$

$$n_i(t) \geq 0, \quad (9e)$$

$$N_i \geq 0. \quad (9f)$$

ここで, $P_1(\{N_i\}), P_2(\{n_i(t)\})$ は, 各々, 次のように与えられる $\{N_i\}, \{n_i(t)\}$ の関数である:

$$P_1(\{N_i\}) = \frac{1}{2} \sum_k N_k w_k, \quad (10a)$$

$$P_2(\{n_i(t)\}) = \sum_k \int n_k(t) s(|t - t_k|) dt. \quad (10b)$$

証明 最適化問題 (9) の Kuhn-Tucker 条件が均衡条件 (8) と一致することから, 明らかに最適化問題の極値条件と均衡条件は等価である.

この最適化問題 (9) より, 均衡状態は第 1 項の総賃金の 1/2 で表される (生産性に関する外部経済を表現した) 時間集積力と, 第 2 項の総スケジュールコストで表される (ボトルネック渋滞による外部不経済を表現した) 時間分散力により決まることがわかる. したがって, 目的関数 P のうち, 第 1 項が卓越する場合は始業時間が集中し, 第 2 項が卓越する場合は始業時間が分散する時差出勤が実現する.

命題 3.1 は, 本稿で示したモデルがポテンシャル・ゲーム¹⁷⁾ に属することを示している. そこで, 次節以降では, ポテンシャル・ゲームの性質⁵⁾を利用して, 均衡状態の一意性・安定性を調べる.

(2) 均衡状態の一意性と安定性

最初に均衡状態の一意性を最適化問題 (9) の目的関数の形状により調べる. そのために, 目的関数の第 1 項 $P_1(\{N_i\})$ と第 2 項 $P_2(\{n_i(t)\})$ の形状を確認しておこう:

補題 3.1 最適化問題 (9) の目的関数の第 1 項 $P_1(\{N_i\})$ は凸関数, 第 2 項 $P_2(\{n_i(t)\})$ は線形関数である.

証明 付録 I 参照.

ラメータが, FIFO 条件を満たす値に設定されていると考える.
⁵ ポテンシャル・ゲームの性質については, 進化ゲーム理論の成果を体系的にまとめた Weibull¹⁸⁾, Fudenberg and Levine¹⁹⁾, Sandholm²⁰⁾ などの教科書を参照.

補題 3.1 より, 目的関数 P は凸関数と線形関数の和で表されるため, 次の命題が得られる:

命題 3.2 ボトルネック渋滞を考慮した出発・始業時刻均衡モデルの均衡状態は, 一般的に一意であるとは言えない.

モデルの均衡状態が一般に一意ではないことから, 均衡選択のために, 均衡状態の局所安定性を確認する必要がある. この均衡状態の安定性は, 本モデルがポテンシャル・ゲームに属することを利用することで, 容易に確認できる. より具体的には, 目的関数 P の極大値となる状態 $(\{N_i\}, \{n_i(t)\})$ は, 広いクラスの調整ダイナミクスの下で, 安定均衡状態となる (詳細については, 例えば, Sandholm^{21,22}), Oyama^{23,24}), Fujishima²⁵) 参照.). したがって, 次節以降では, 均衡状態の安定性を目的関数 P の形状により確認する.

4. 安定均衡状態: 設定可能な始業時刻が 2 種類の場合

(1) 均衡条件と等価な最適化問題

本節では, 本稿で提示したモデルがポテンシャル・ゲームに属することを利用すれば, 容易に安定均衡状態を調べることができることを示す. ここでは, その具体的な例として, 時差出勤が実現した状態が常に (i.e., 任意のパラメータ下で) 均衡状態となる, $T = 2$ の場合を考える⁶. また, スケジュールコスト関数 $s(x)$ は次の 2 次関数で与えられると仮定する:

$$s(x) = \beta x^2. \quad (11)$$

この時, 均衡状態における始業時刻・出発時刻パターンは, 次の 3 通りに分類できる:

Pattern 1: 全ての企業の始業時刻が同一となる (図-3-a).

Pattern 2.1: 時差出勤が実現し, かつ, 渋滞が発生する時間帯 (rush hour) が 2 つに分かれる (図-3-b).

Pattern 2.2: 時差出勤が実現し, かつ, 渋滞が発生する時間帯 (rush hour) が分けない (図-3-c).

Pattern 2.1, 2.2 が均衡状態となり得るのは, 各々, $2\mu\tau - N$ が正・負のときのみであることを利用すると, 最適化問題 (9) は, 次の N_1 のみの関数で表すことができる:

$$\max_{N_1} P(N_1) = P_1(N_1) - P_2(N_1), \quad (12a)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq N_1 \leq N. \quad (12b)$$

⁶ ここではボトルネックに待ち行列が生じない状況 (i.e., $\mu > N$) は考えない.

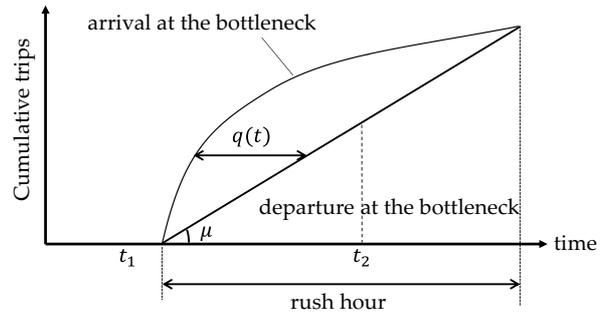


図-3-a Pattern 1

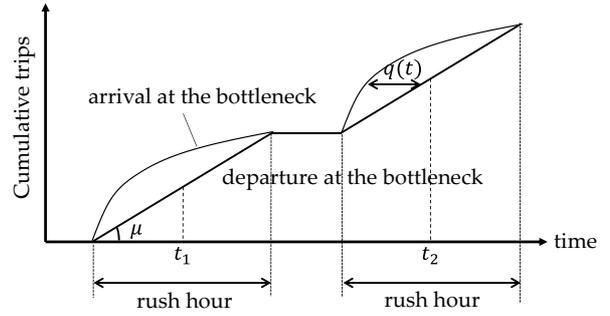


図-3-b Pattern 2.1

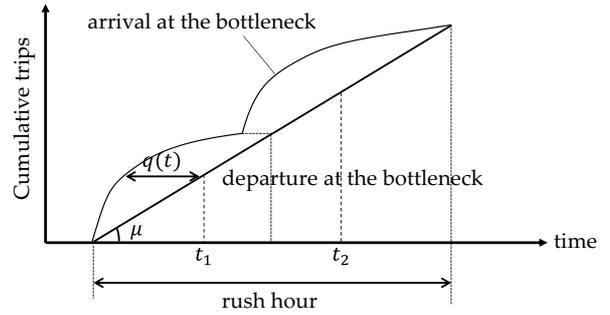


図-3-c Pattern 2.2

図-3 均衡状態となりうる始業時刻・出発時刻パターン

ここで, $P_1(N_1), P_2(N_2)$ は, 各々, 次のように与えられる:

$$P_1(N_1) = \alpha \left\{ \frac{HN^2}{2} - \tau N_1(N - N_1) \right\}, \quad (13a)$$

$$P_2(N_1) = \begin{cases} \frac{\beta N}{12\mu^2} \{N^2 - 3N_1(N - N_1)\} & \text{if } 2\mu\tau > N, \\ \frac{\beta N^3}{12\mu^2} - \frac{\beta\tau}{N} \left(\frac{N}{\mu} - \tau \right) N_1(N - N_1) & \text{if } 2\mu\tau \leq N. \end{cases} \quad (13b)$$

ここで注目すべきは, 目的関数 $P(N_1)$ が N_1 の 2 次関数となることである. したがって, $P(N_1)$ が凸関数となるならば $N_1 = 0, N$, すなわち, Pattern 1 が安定均衡状態となり, 凹関数であれば $N_1 = N/2$, すなわち, Pattern 2.1 または Pattern 2.2 が安定均衡状態となる. そこで, 次に, 目的関数の形状を $\partial^2 P(N_1)/\partial N_1^2$

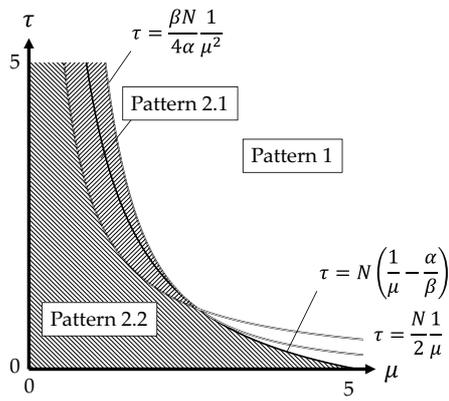


図-4 安定均衡状態とパラメータの関係

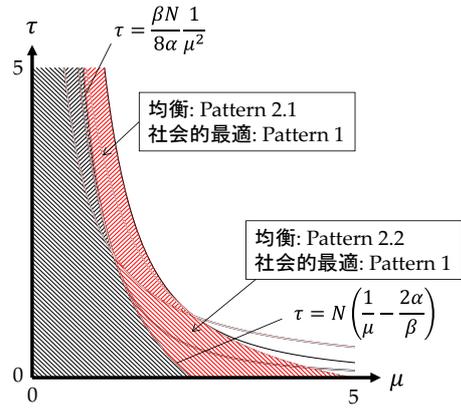


図-5 社会的最適状態と均衡状態の比較

で確認しよう:

$$\frac{\partial^2 P(N_1)}{\partial N_1^2} = \begin{cases} 2 \left(\alpha\tau - \frac{\beta N}{4\mu^2} \right) & \text{if } 2\mu\tau > N \\ 2\tau \left\{ \alpha - \frac{\beta}{N} \left(\frac{N}{\mu} - \tau \right) \right\} & \text{if } 2\mu\tau \leq N \end{cases} \quad (14)$$

この結果を用いると、次の命題が得られる:

命題 4.1 $T = 2$ とした場合の安定均衡状態における始業時刻・出発時刻パターンは唯一に定まる。安定均衡パターンとパラメータ $\alpha, \beta, \mu, \tau, N$ との関係は次の通り⁷

Pattern 1:

$$\tau > \frac{\beta N}{4\alpha \mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (15)$$

Pattern 2.1:

$$\tau < \frac{\beta N}{4\alpha \mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > \frac{N}{2} \frac{1}{\mu} \quad (16)$$

Pattern 2.2:

$$\tau < N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad \text{and} \quad \tau \leq \frac{N}{2} \frac{1}{\mu} \quad (17)$$

以上で示した、安定均衡状態とパラメータとの関係を示したのが、図-4である。なお、この図では、 $\alpha = 1.0, \beta = 5, N = 5$ と設定した。この結果から明らかなように、 τ, μ が小さいほど、 t_1, t_2 の始業時刻に均等に労働者が出勤する時差出勤が安定均衡状態として実現しやすいことがわかる。

5. 社会的最適状態

本稿で考えているモデルには外部性が存在するため、均衡状態と社会的最適状態は必ずしも一致しない。そ

⁷ パラメータが $\tau = \frac{\beta N}{4\alpha \mu^2}$ and $\tau > \frac{N}{2} \frac{1}{\mu}$ を満たすか、または $\tau = N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right)$ and $\tau \leq \frac{N}{2} \frac{1}{\mu}$ となる状況では、目的関数 P が一定値となる。したがって、任意の状態 $N_1 \in [0, N]$ は無差別であり、リャプノフの意味で安定均衡状態であると言える。(ただし、局所的な漸近安定均衡状態は存在しない。)

ここで、本章では、均衡状態と社会的最適状態を比較するために、次の社会厚生最大化問題を考える:

$$\max_{\{n_i(t)\}, \{N_i\}} SW = \sum_k N_k w_k - \sum_k \int n_k(t) c_i(t) dt, \quad (18a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k n_k(t) \leq \mu, \quad (18b)$$

$$\int n_i(t) dt = N_i, \quad (18c)$$

$$\sum_k N_k = N, \quad (18d)$$

$$n_i(t) \geq 0, \quad (18e)$$

$$N_i \geq 0. \quad (18f)$$

社会的最適状態では、ボトルネック渋滞が完全に解消される⁸ことを考えると、目的関数 SW は、次のように表現される:

$$SW = 2P_1(\{N_i\}) - P_2(\{n_i(t)\}). \quad (19)$$

SW と最適化問題 (9) の目的関数 P との違いは、第 1 項が 2 倍になっている点のみである。これは、社会的最適状態は均衡状態より始業時間が集中する傾向にあることを意味している。したがって、渋滞が完全に解消できる状況下では、時差出勤制度は必ずしも望ましいものではないといえる。より具体的には、時差出勤制度を容易に導入できる状況下では、社会的最適状態は始業時間が集中している状況であるにもかかわらず、始業時間が分散した時差出勤が実現化した状態が安定均衡状態となる状況が生じ得る。これを具体的に確認するために、前節で示した図-4 と同じ設定下での、社会的最適状態と均衡状態を比較しよう。この結果は、図-5 に示すとおりである。この図の赤色部分が、社会的最適状態と均衡状態の出発・始業時刻パターンが異なり、時差出勤が社会厚生に悪影響を与える範囲である。

⁸ 詳細については、Vickrey¹²⁾, Hendrickson and Kocur²⁶⁾, Arnott et al.^{13,27,28)}などを参照。

次に、混雑料金の導入が困難であり、渋滞を解消できない状況 (second best) を考えよう。このとき、社会厚生 SW と最適化問題 (9) の目的関数 P の値は、

$$SW - P = (1/2)P_1(\{N_i\}) - \sum_k \int n_k(t)q(t)dt \quad (20)$$

だけ異なるため、この場合も次善最適状態と均衡状態は乖離する。そして、 $SW - P$ の符号が正であれば、次善最適状態は均衡状態より始業時刻が集中し、負であれば、始業時刻は分散する傾向にあることがわかる。そこで、渋滞を解消できない状況においても、図-4 と同じ設定下で、次善最適状態と均衡状態を比較する。 $T = 2$ のとき、始業時刻 t_1, t_2 の労働者の通勤費用 $c_i(t)$ は、

$$c_i(t) = \frac{\beta}{4\mu^2} N_i^2 \quad \forall t \quad (21)$$

で与えられることから、社会厚生 SW は次のように表される:

$$SW(N_1) = 2P_1(N_1) - \hat{P}_2(N_1) \quad (22a)$$

$$\hat{P}_2(N_1) = \begin{cases} \frac{\beta N}{4\mu^2} \{N^2 - 3N_1(N - N_1)\} & \text{if } 2\mu\tau > N, \\ \frac{\beta N^3}{4\mu^2} - \frac{2\beta\tau}{N} \left(\frac{N}{\mu} - \frac{\tau}{2}\right) N_1(N - N_1) & \text{if } 2\mu\tau \leq N. \end{cases} \quad (22b)$$

この状況下での社会厚生 SW は、 P と同様、2 次関数で表されることから、 SW が凸関数であれば Pattern 1, 凹関数であれば Pattern 2.1 または Pattern 2.2 が次善最適状態である。ここで、 $\partial^2 SW / \partial N_1^2$ は、

$$\frac{\partial^2 SW(N_1)}{\partial N_1^2} = 2 \frac{\partial^2 P_1(N_1)}{\partial N_1^2} - \frac{\partial^2 \hat{P}_2(N_1)}{\partial N_1^2} \quad (23a)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{P}_2(N_1)}{\partial N_1^2} = \begin{cases} \frac{3\beta N}{2\mu^2} & \text{if } 2\mu\tau > N \\ \frac{4\tau\beta}{N} \left(\frac{N}{\mu} - \frac{\tau}{2}\right) & \text{if } 2\mu\tau \leq N \end{cases} \quad (23b)$$

であり、かつ $\partial^2 \hat{P}_2(N_1) / \partial N_1^2 > 2\{\partial^2 P_2(N_1) / \partial N_1^2\}$ であるため、 $T = 2$ の場合は必ず次善最適状態は均衡状態より始業時刻が分散する傾向にあることがわかる。なお、各々のパターンが次善最適状態となる条件は以下で与えられる:

Pattern 1:

$$\tau > \frac{3\beta N}{8\alpha \mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > 2N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad (24)$$

Pattern 2.1:

$$\tau < \frac{3\beta N}{8\alpha \mu^2} \quad \text{and} \quad \tau > \frac{N}{2\mu}, \quad (25)$$

Pattern 2.2:

$$\tau < 2N \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \tau \leq \frac{N}{2\mu}. \quad (26)$$

この結果を用い、次善最適状態と均衡状態を比較した結果は、図-6 に示すとおりである。この図の赤色で示

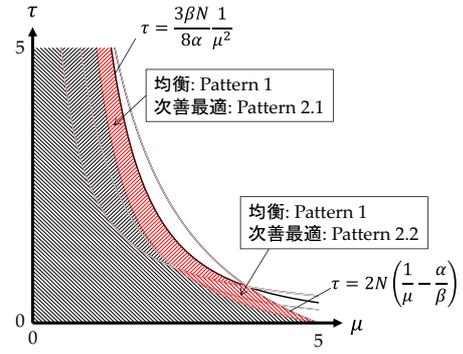


図-6 次善最適状態と均衡状態の比較

した部分は、先に示した、次善最適状態が均衡状態と異なる範囲である。この結果は、渋滞の解消が困難な状況では、多くのケースで時差出勤制度が社会的に望ましい結果をもたらすことを示唆している。

6. おわりに

本研究では、出発・始業時刻同時均衡モデルを構築し、その均衡状態の特性を明らかにした。より具体的には、モデルがポテンシャル・ゲームに属することを示したうえで、その特性を利用して、均衡状態の一意性・安定性を検証した。その結果、モデルの均衡状態は一般に一意ではなく複数存在すること、また設定可能な始業時刻が2種類のみの場合には、安定均衡状態が一意に決定されることを証明した。さらに、社会的最適状態や(渋滞を解消することができない状況下での)次善最適状態と均衡状態との違いを明らかにした。

付録 I 補題 3.1 の証明

最適化問題 (9) の第 1 項 $P_1(\{N_i\})$ と第 2 項 $P_2(\{n_i(t)\})$ の形状を示す。 $P_2(\{n_i(t)\})$ は、その Hessian 行列が零行列であることから、容易に線形関数であることがわかる。

$P_1(\{N_i\})$ とその Hessian 行列 $D^2 P_1(\{N_i\})$ は $N \equiv [N_1, N_2, \dots, N_T]^T$ を用いると、次のように表される:

$$P_1(\{N_i\}) = \alpha N^T \Phi N, \quad (I.1a)$$

$$D^2 P_1(\{N_i\}) = \alpha \Phi. \quad (I.1b)$$

ここで、 Φ は i, j 要素が $H - |i - j|\tau$ の Toeplitz 行列であり、全ての要素が 1 の行列 E を用いて次のように与えられる:

$$\Phi = HE - \tau C, \quad (I.2a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & T-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & T-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & T-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T-1 & T-2 & T-3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.2b})$$

この行列 Φ の逆行列 Φ^{-1} は

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \gamma & -0.5 & & & \epsilon \\ -0.5 & 1 & -0.5 & & \mathbf{O} \\ & -0.5 & 1 & -0.5 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{O} & -0.5 & 1 & -0.5 \\ \epsilon & & & & -0.5 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{I.3a})$$

$$\gamma = \epsilon + 0.5, \quad (\text{I.3b})$$

$$\epsilon = \frac{\tau}{2\{2H - (T-1)\tau\}}. \quad (\text{I.3c})$$

で表される。そのため、Gershgorin の定理 (例えば, Strang²⁹⁾, 伊理³⁰⁾ 参照) より, その任意の固有値 $\lambda_{\Phi^{-1}}$ は次の範囲に存在する:

$$0 \leq \lambda_{\Phi^{-1}} \leq \max\{1 + 2\epsilon, 2\}. \quad (\text{I.4})$$

この結果から, $D^2 P_1(\{N_i\})$ の固有値が全て非負であり, かつ $P_1(\{N_i\})$ は半正定値であることがわかる。したがって, $P_1(\{N_i\})$ は凸関数である。

参考文献

- 1) Wilson, P. W.: Wage Variation Resulting from Work Hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 24, No. 1, pp. 9–26, 1988.
- 2) Henderson, J. V.: The Economics of Staggered Work Hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 9, No. 3, pp. 349–364, 1981.
- 3) 佐藤慎太郎, 赤松隆: 企業と家計の相互作用を考慮した始業・出発時刻均衡モデル, 土木計画学研究・論文集, Vol. 23, No. 4, pp. 903–910, 2006.
- 4) 小林潔司, 奥村誠, 永野光三: 鉄道交通における出発時刻分布に関する研究, 土木計画学研究・論文集, Vol. 14, pp. 895–906, 1997.
- 5) 奥村誠, 永野光三, 小林潔司: 始業時刻の設定が鉄道通勤交通に及ぼす影響に関する研究, 土木計画学研究・論文集, Vol. 15, pp. 831–840, 1998.
- 6) 奥村誠, 小林潔司, 田中成興: 鉄道時差出勤の社会的便益と導入インセンティブに関する分析, 応用地域学研究, Vol. 4, pp. 63–75, 1999.
- 7) 吉村充功, 奥村誠: ダイナミカルシステム論による鉄道時差出勤パターンの分析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 17, pp. 879–884, 2000a.
- 8) Mun, S.-i. and Yonekawa, M.: Flexitime, Traffic Congestion and Urban Productivity, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 40, No. 3, pp. 329–358, 2006.
- 9) 吉村充功, 奥村誠: 鉄道通勤における「スーパーフレックス」制度の経済評価, 都市計画論文集, Vol. 35, pp. 1075–1080, 2000b.
- 10) Yoshimura, M. and Okumura, M.: Optimal Commuting and Work Start Time Distribution under

- Flexible Work Hours System on Motor Commuting, *Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 3, No. 2, pp. 455–469, 2001.
- 11) 吉村充功, 奥村誠, 松本寛史: フレックスタイム制度下における最適ピークロードプライシング, 土木計画学研究・論文集, Vol. 19, No. 4, pp. 823–830, 2002.
- 12) Vickrey, W. S.: Congestion Theory and Transport Investment, *The American Economic Review*, Vol. 59, No. 2, pp. 251–260, 1969.
- 13) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: Economics of a Bottleneck, *Journal of Urban Economics*, Vol. 27, No. 1, pp. 111–130, 1990.
- 14) Daganzo, C. F.: The Uniqueness of a Time-dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *Transportation Science*, Vol. 19, No. 1, pp. 29–37, 1985.
- 15) Kuwahara, M.: Equilibrium Queueing Patterns at a Two-Tandem Bottleneck during the Morning Peak, *Transportation Science*, Vol. 24, No. 3, pp. 217–229, 1990.
- 16) 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫: 出発時刻問題の均衡状態に関する数理的分析, 土木学会論文集, Vol. 779, No. IV-66, pp. 105–118, 2005.
- 17) Monderer, D. and Shapley, L. S.: Potential Games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 14, No. 1, pp. 124–143, 1996.
- 18) Weibull, J. W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1995.
- 19) Fudenberg, D. and Levine, D. K.: *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, 1998.
- 20) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 21) Sandholm, W. H.: Potential Games with Continuous Player Sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, pp. 81–108, 2001.
- 22) Sandholm, W. H.: Excess Payoff Dynamics and Other Well-behaved Evolutionary Dynamics, *Journal of Economic Theory*, Vol. 124, No. 2, pp. 149–170, 2005.
- 23) Oyama, D.: History Versus Expectations in Economic Geography Reconsidered, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 2, pp. 394–408, 2009a.
- 24) Oyama, D.: Agglomeration Under Forward-looking Expectations: Potentials and Global Stability, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, No. 6, pp. 696–713, 2009b.
- 25) Fujishima, S.: Evolutionary Implementation of Optimal City Size Distributions, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 43, No. 2, pp. 404–410, 2013.
- 26) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, *Transportation Science*, Vol. 15, No. 1, pp. 62–77, 1981.
- 27) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: A Structural Model of Peak-Period Congestion: A Traffic Bottleneck with Elastic Demand, *The American Economic Review*, Vol. 83, No. 1, pp. 161–179, 1993.
- 28) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: The Welfare Effects of Congestion Tolls with Heterogeneous Commuters, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 28, No. 2, pp. 139–161, 1994.
- 29) Strang, G.: *Linear Algebra and Its Applications*, Thomson Brooks/Cole, 4th edition, 2006.
- 30) 伊理正夫: 一般線形台数, 岩波書店, 2003.