道路橋継手モニタリングデータへの ARMA-GARCH回帰モデルの適用

数実浩佑[1]・松岡弘大[2]・貝戸清之[3]・小林潔司[4]

[1]学生会員　大阪大学大学院　工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k.kazumi@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]学生会員　大阪大学大学院　工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[4]フェロー会員　京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町）
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

維持管理の効率化と定量化を目的として，センサーを用いた長期モニタリングの適用が進められている．一方で，得られたモニタリングデータから異常が発生した可能性のある時点や劣化の進行を抽出する方法論は十分に整備されていない．本研究では長期モニタリングにより取得した時系列データの統計的性質を利用した劣化予測手法を提案する．具体的には，時系列モデルの誤差項の分散の変動をトレンド付きの ARMA 過程で表現した ARMA-GARCH 回帰モデルにより表現するとともに，推計した ARMA-GARCH 回帰モデルを利用して詳細点検を実施する次期を予測する方法論を構築する．さらに，高速道路の継手構造を対象とした長期モニタリングデータへの適用を通じて，本手法の有効性を検証する．

Key Words : *ARMA-GARCH regression model, long term monitering data, joint structure, time series analysis*

1. はじめに

現在のアセットマネジメントは，目視点検データを中心とした方法論（Visual Inspection Data Based Asset Management）によって構築されている[1)]．そこでは，マルコフ連鎖モデルによる劣化予測[2),3)]や，マルコフ決定モデルを援用したライフサイクル費用最小化に基づく最適補修戦略の決定[1),4)]など，各要素技術の有機的な体系化がなされており，アセットマネジメントの実用化に大きく貢献している．一方で，1）常時監視による損傷・劣化の早期検知，2）力学的性能の定量的評価に基づく安全･安心の確保といった実務的要請の極めて高いニーズに対しては，目視点検の限界が指摘されている．目視点検データに基づくアセットマネジメントを第一世代と呼ぶならば，第二世代ではこれらの課題に対する解決策の一つとして，モニタリングデータに基づくアセットマネジメント（Monitoring Data Based Asset Management，あるいは Performance Based Asset Management）の開発が必要である．

モニタリングに着目した第二世代のアセットマネジメントにおける大きな課題の一つは，長期間蓄積したモニタリングデータに基づいて，点検業務の効率化などを達成するための方法論の開発である．長期間蓄積したモニタリングデータは，既往のアセットマネジメントで利用してきた多段階レーティングデータとは異なり，連続値の物理量である．また，観測する物理量は気温や天気など構造物性能とは関係のない因子の影響を受けることも多い．モニタリングデータに基づき維持管理の意思決定を行うためには，モニタリングデータから構造物の劣化や異常に起因した特徴を抽出するモデルの構築と，構築したモデルを用いた劣化予測が不可欠となる．しかしながら，モニタリングにより構造物の情報を長期的に計測している事例は散見されるものの，モニタリングデータに基づく異常発生時点の抽出や劣化予測を行う方法論は十分に整備されていない．

本研究では，1）長期間蓄積したモニタリングデータを時系列データと考え，時系列モデルにより，モニタリングデータに介在する多くの影響因子を分離するとともに，構造物の異常や劣化と関連性の高い特徴量を抽出する方法論を提案する．なお，本研究では長期モニタリングの対象構造物を高速道路のジョイント部材に具体化し，その長期モニタリングデータへの適用を通じて提案手法の有効性を実証的に示す．そのうえで，2）時系列モデルによるモニタリングデータの今後の予測結果と，閾値を利用することで，詳細な点検が必要となる時期を予測する方法論を構築する．具体的には，1）の時系列モデルとして，回帰モデルの誤差項の分散の変動を確定

トレンド付きの ARMA（Autoregressive Moving Average）過程で表現した ARMA-GARCH（Generalized Autoregressive conditional heteroskedasticity model）回帰モデル，およびその推計手法を提案し，モニタリングデータの統計的特徴を明らかにするとともに，それらの特徴を踏まえた予測を可能にする．また，2）について，1）のモデルを利用して今後のモニタリングデータの予測を行うとともに，実際に交換が必要となったジョイント部材のモニタリングデータに基づいて閾値を算出し，予測値が閾値を超えるような詳細な点検が必要となる時期を予測する方法論を提案する．以上により，第二世代のアセットマネジメントにおいてモニタリングデータから点検時期を決定する方法論を構築する．

一方で，土木構造物の長期モニタリングにおいては，構造物の劣化を直接観測できる場合は少なく，多くの場合，構造物の劣化に対応すると考えられる物理量を観測している．このことから，モニタリングで取得する物理量と構造物の劣化進展や異常を関連付けることも重要となる．そこで，本研究では上述した長期モニタリングデータに基づく劣化予測手法の構築とともに，対象とした高速道路のジョイント部材における長期モニタリングデータと劣化進行状況との関連性についても検討を加える．具体的には，モニタリング開始時とその1年後に，路上規制を伴う，たたき・目視点検を実施し，詳細な状態を把握した．また，モニタリング中に一部のジョイント部材で取換えを実施し，補修必要時の状態と新規供用時の状態を把握した．これらの点検情報と本研究で提案した方法論により明らかとしたモニタリングデータの統計的特徴の関連性を分析し，ジョイント部材の損傷の種類や程度を定量的に評価するモニタリングシステムの実現可能性について検討する．

以下，**2.** で本章の基本的な立場を説明したうえで，**3.** で ARMA-GARCH 回帰モデルについて，**4.** でその推計手法について述べる．

2. 本研究の基本的な立場

(1) 維持管理におけるモニタリング

社会基盤構造物の状態を，計測データにより客観的，定量的に把握するとともに，劣化や異常を早期に検知するために，モニタリング技術の開発が数多く試みられている．特に，社会基盤構造物の振動に着目したモニタリングは，物理特性との関係把握が容易なことも相まって，計測技術と計測データの分析技術が古くから継続的に改良されてきた．近年では，その限界が指摘されている目視点検を補完する方法として，大きな注目を集めている．振動モニタリングについては，その目的から大きく2つに大別することができる．1）一回もしくは数回の詳細な計測から構造物の安全性や性能を把握する，2）長期に渡る計測データに見られる特徴から構造物の劣化や異常を検知する，という2つである．前者は比較的大規模で詳細な計測を実施するとともに，計測データから逆解析により構造性能を推計する．後者は長期間継続することを目的とした，比較的簡素な計測を実施するとともに，長期間蓄積した計測データの相対比較を通じて劣化や異常を検知する．本研究で対象とするモニタリングシステムの目的は後者である．維持管理における後者のモニタリングの目的は，構造物や部材の性能を長期間計測し，その計測情報の相対的変動から構造物の異常や性能低下（劣化）を把握することで，パフォーマンスベースで安全・安心を確保するとともに，構造物の状態に基づいて詳細点検や補修の決定を行うことで維持管理業務の効率化を図ることにある．このような目的を果たすためには，長期的にデータを取り続けることが可能なモニタリングシステムの開発と，取得したモニタリングデータから維持管理の意思決定を行う方法論の開発が重要な課題である．長期モニタリングが継続可能なモニタリングシステムについてはすでに検討を行い，その有効性を確認している．本研究では，取得したモニタリングデータに基づいて維持管理の意思決定を行う方法論として，統計的時系列モデルによる分析・予測手法の開発を行うとともに，高速道路のジョイント部材の劣化の種類や進行量の定量的評価に関する検討を加える．

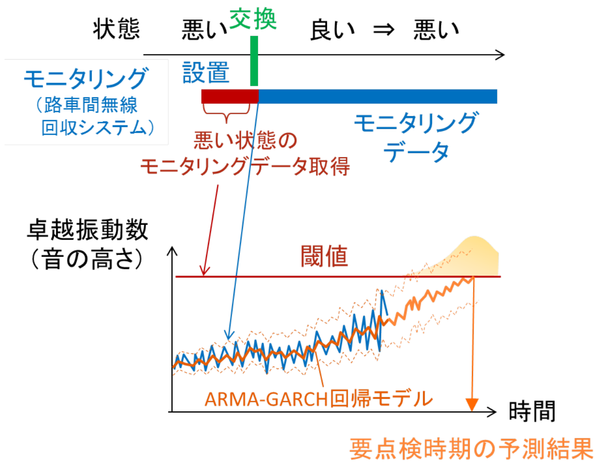
(2) モニタリングデータと統計モデル

土木分野において構造物から振動やひずみなどの物理量を長期的に計測するモニタリングシステムは，研究開発，および実構造物への適用事例が散見される．しかしながら，長期的に蓄積された定量的なモニタリングデータから継時的変化や異常を検出する方法論の構築は，国内においてほとんど進展していないのが現状である．

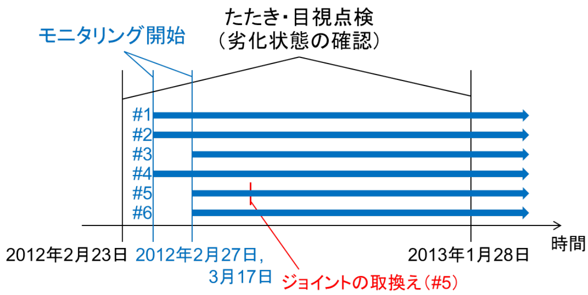
一方で，海外においては長期のモニタリングデータの分析手法は，構造的手法と統計的手法に分類され，系統的に整理されている．Fritzen[5)]は，モニタリングデータの分析手法として提案された多くの構造的手法を総括し，実験室など環境を整えた状況においては構造物の損傷を精度よく抽出できるとしている．さらに，Friswell and Mottershead[6)]は，実環境への応用においては，数値解析モデルをモニタリングデータに合わせて更新することが有望な手法であると指摘している．統計的手法を用いてモニタリングデータを分析した事例として，Kiremidjian[7)]の事例が存在する．Kiremidjian はパターン認識の知見を用いることで，観測データにおける特

殊な変動の抽出を試みている．その他にもコントロールチャート[8),9)]やクラスタリングアルゴリズム[10)]を利用した様々な手法について，損傷検出の可能性が検討されている．しかしながら，統計的手法の有効性は，その多くが実験室など損傷や外乱が制御された環境での検証に留まっている．数々の提案手法の実務的価値を検証するには，供用下にある実構造物での検証が必要不可欠であるが，実構造物では実験室と比較して未知な外乱も多く存在する．すなわち，未知の外乱や環境に依存した日々の変動と構造物の性能に依存した変動を分類する方法論の構築が重要な課題となる[11)]．これに対して，Chu and Durango-Cohen[12),13)]は舗装の性能を評価するために時系列モデルの状態空間情報の利用を試みている．さらに Chen らは，施設の特性に依存せず適用可能なモニタリングデータの分析手法として単変量の回帰分析と ARIMA（Autoregressive Integrated Moving Average）-GARCH モデル，コントロールチャートを利用した方法論を提案している．

Chen らが指摘しているように，モニタリングデータを統計的に分析する場合には，計量経済分野で蓄積されてきた知見を援用することが有効である．計量経済分野においては，株価や為替の変動予測，変化点検出を目的として，蓄積された定量的な長期計測データを分析するための時系列モデルの開発が進んでいる．代表的なモデルとして，Engle[14)]が提案した時系列の誤差項の分散が時間的に変動することを許容した ARCH（Autoregressive conditional heteroskedasticity）モデルがある．ARCH モデルは，Bollerslev[15)]により GARCH（generalized ARCH）モデルへと拡張され，誤差項の時間的変動特性に着目した分析の基礎となっている．特に近年では金融工学やファイナンス工学の著しい進展とともに，計算機性能の向上と MCMC（Markov Chain Monte Carlo）法の発展[16),17)]により，ARCH モデルは高度に非線形かつ非定常なモデルへと拡張されている[18)]．代表的なものとして，時系列の期待値の変動を ARMA モデルや ARIMA モデルで，誤差項の分散の変動を ARCH モデルや GARCH モデルで表現した ARMA-GARCH モデル[19)]，もしくは，外生変数に対する回帰モデルの誤差項が ARMA-GARCH 過程に従う ARMA-GARCH 回帰モデルなどが提案されている[20)]．さらに，MCMC 法によりすべてのパラメータを一括して推計することも可能となっている[21)]．一方で，本研究で対象とする構造物の長期モニタリングにおいては，構造物の劣化といった時間的に不可逆な現象がトレンドとして含まれると考えられる．しかしながら，たとえば，劣化の進展とともに，モニタリングデータのばらつきが大きくなっていくような現象は，上述の時系列モデルを用いても正しく評価することはできない．本研究では，モニタリングデータに基づき構造物の劣化を捉えるために，ARMA-GARCH 回帰モデルの GARCH 部分に時間トレンドを導入したモデルを提案し，**3.** で定式化を行うとともに，**4.** で MCMC 法による未知パラメータの一括推計法について説明する．これにより，モニタリングデータの背後に存在する統計的特徴を踏まえたうえで，将来予測が可能となる．



図–1 提案する方法論の概要



図–2 モニタリングと劣化状態の把握

(3) 対象構造物と要点検時期の予測

2.(2) で述べたように，本研究ではモニタリングデータを ARMA-GARCH モデルにより表現することで，モニタリングデータの統計的特徴を把握する．一方で，このような統計的特徴のみでは，構造物の状態に基づいた点検時期の決定はできない．本研究では補修や補強，交換が必要な状態におけるモニタリングデータを把握し，それらを ARMA-GARCH モデルによる予測結果の閾値として利用することで，点検が必要となる時期を予測する方法論を提案する．方法論の概要を**図–1** に示す．

対象とした高速道路のゴムジョイントは劣化が進展することで，車両通過時の「音」が変化することが経験的に知られている．そこで，本研究ではモニタリン

グデータの中でも車両通過時の卓越振動数に着目することとし，たたき・目視点検との比較により卓越振動数の時間的変化や着目すべき振動数帯を明らかにする．これにより，劣化の進行や発生を監視するためにみるべきモニタリング指標を選定するが，選定されたモニタリング指標がどの程度の値になった場合に，詳細な点検を要するのかは定かでない．そこで，取換えを実施するゴムジョイントを一つ選定し，実際の維持管理業務で対処が必要となるようなジョイントの劣化状態におけるモニタリングデータを獲得した．これにより，詳細な点検が必要となるかを判断するための閾値を明らかとする．なお，ゴムジョイントの車両通過時の卓越振動数は状態が同一であっても対象とするジョイント個々で異なる場合も存在する．そこで，閾値の決定に関してより多くの情報を得るために，ゴムジョイントの取換えを実施する別の箇所で，取換え前後のモニタリングデータを取得している．

一方で，モニタリングにより構造物の劣化の種類や程度をより精緻に把握し，それらに基づいて点検の時期を予測するといった，さらに高度な実務的要請も存在する．本研究では，特に高速道路のジョイント部材に対象を具体化し，モニタリングに合わせて実施した目視点検結果との比較分析を行うことで，モニタリングデータの統計的特徴と劣化状態の関係を明らかにする．具体的には，6 つのジョイントを対象として，**図–2** に示す手順でデータの取得を行った．対象としたゴムジョイントの代表的な劣化事象として，段差や摩耗，剥離や亀裂が存在するが，本研究では，主にゴムジョイント本体の劣化事象に着目することとし，ゴムジョイント本体と取付け部や後打ち材の段差がほとんど存在しない箇所を選定している．ゴムジョイントの摩耗，剥離，亀裂などは路上規制を伴うたたき・目視点検により把握することが可能である．モニタリングを開始する直前の 2012 年 2 月 23 日に対象箇所のたたき・目視点検を実施することで，各ジョイントで異なる劣化状態や箇所を把握している．そのうえで，6 機の無線モニタリングシステムを 2012 年 27 日と 3 月 17 日に設置し，長期モニタリングデータの取得を行った．さらに，モニタリングを開始してから約 1 年となる 2013 年 1 月 28 日に，再度，当該箇所のたたき・目視点検を実施することで，前回の状態からの劣化の進行や新たな劣化の発生具合を把握した．このようにモニタリングと並行して実施した，たたき・目視点検情報と ARMA-GARCH 回帰モデルで分析したモニタリングデータの統計的特徴を比較することで，ゴムジョイントの損傷種類および進行量が ARMA-GARCH 回帰モデルのどの部分と対応しているのかについて，少ないサンプル数における限られたケースではあるが分析を加える．

3. ARMA-GARCH 回帰モデル

(1) 対象モデル

本研究では長期モニタリングにより得られた単変量時系列データ $y(t)$ $(t = 1, \cdots, T)$ を表現するために，ARMA(p, q)-GARCH(r, s) 回帰モデルの GARCH 部分に確定トレンドを導入した以下のモデルを利用する．

$$y(t) = \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\gamma} + u(t) \tag{1}$$

$$u(t) = \frac{\boldsymbol{\Theta}(L)}{\boldsymbol{\Phi}(L)}\varepsilon(t) \tag{2}$$

$$\sigma(t)^2 = a + bt + \sum_{j=1}^{r}\alpha_j\varepsilon(t-j)^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma(t-j)^2 \tag{3}$$

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma(t)^2) \tag{4}$$

$$(t = 1, \cdots, T)$$

なお,

$$\boldsymbol{\Phi}(L) = 1 - \sum_{j=1}^{p}\phi_j L^j \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(L) = 1 + \sum_{j=1}^{q}\theta_j L^j \tag{5b}$$

であり，L はバックシフト・オペレータを表す．また，$\boldsymbol{x}(t)$ は k 次元説明変数列ベクトル，$\boldsymbol{\gamma}$ は k 次元回帰係数行ベクトル，ϕ は AR(p) 過程の係数，θ は MA(q) 過程の係数，α と β は GARCH(r, s) 過程の係数をそれぞれ表す．式 (4) は $\varepsilon(t)$ が平均 0，分散 $\sigma^2(t)$ の正規分布に従うことを意味する．経済分析においては，説明変数である $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)]$ として，定数項とタイムトレンド項からなる $\boldsymbol{x}(t) = [1, t]$ のみが利用される．一方で，本研究ではこれらの定数項とタイムトレンド項に加えて降雨や気温など環境因子の影響についても分析するために，それらの情報も $\boldsymbol{x}$ に含めて推計を実施する．これにより，モニタリングデータの変動の中で構造物の劣化とは異なる変動を分離する．さらに，回帰成分では表現できないモニタリングデータの変動の中でも，短期的な変動については式 (2) の ARMA 過程で表現する．これにより，構造物の劣化のような長期的かつ時間進行に対して非可逆的な変動を，タイムトレンドとして評価する．

さらに，本研究では，誤差項 $\varepsilon(t)^2$ の分散 $\sigma(t)^2$ の変動についても，式 (3) で示した，GARCH(r, s) 過程にタイムトレンド項を加えた形でモデル化している．これにより，分散 $\sigma(t)^2$ の時間経過に伴う変動も期待値と同様に，短期的な変動を GARCH(r, s) 過程として分離したうえで，長期的な変動をタイムトレンドとして評価する．なお，GARCH 過程に対しては，誤差項の分散 $\sigma(t)^2$ が常に正であるために，$a > 0$,$\alpha_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, r)$, $b \geq 0$,$\beta_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, s)$ の仮定を設ける．

一方で，AR 係数に対して通常設定される定常性と

反転可能性の制約は設けず推計値から検定することとした．ARMA-GARCH 回帰モデルの定常性と反転可能性の検定は，$\mathbf{\Theta}(L)$ の根がすべて単位円よりも大きい場合，$u(t)$ は定常過程となる．したがって，$u(t)$ が定常であるという帰無仮説は，

$$\begin{aligned} H_0:&\quad |\xi| < 1 \\ H_1:&\quad |\xi| \geq 1 \end{aligned} \tag{6}$$

により検定できる．ここで，ξ は $\mathbf{\Theta}(L) = 0$ の根の逆数の最大の絶対値である．本モデルの推計に MCMC 法を利用することで，ξ の事後分布に基づき式 (6) を検定できる．時系列が単位根を有する場合，ランダムウォーク過程となり，長期予測における精度確保が困難となる．

4. モデルの推計

(1) ベイズ推計法

ARMA-GARCH 回帰モデルの推計法については，最尤推計法と比較して，特に GARCH 過程の推計精度の点で MCMC 法を利用したベイズ推計法が優れていることが指摘されている[21]．また，ξ の事後分布を利用して単位根の存在を判定できるために，非定常性と非反転性を許容した推計が可能である．本研究でも MCMC 法を利用したベイズ推計を採用する．表記を簡潔にするために，観測時系列を $\boldsymbol{Y} = [y(1), \cdots, y(T)]'$，説明変数を $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}(1)', \cdots, \boldsymbol{x}(T)']'$ と表す．なお，$'$ は転置を表す．

いま，すべての未知パラメータの集合を $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ と表す．なお，$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \cdots, \gamma_k]$，$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \cdots, \phi_p]$，$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \cdots, \theta_q]$，$\boldsymbol{\alpha} = [a, b, \alpha_1, \cdots, \alpha_r]$，$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \cdots, \beta_s]$ である．このとき，観測時系列と説明変数を既知とした未知パラメータ集合の同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ はベイズの定理

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}) \tag{7}$$

を通じて，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta})$ と尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\vartheta})$ により表すことができる．

(2) 尤度関数と事前確率密度関数

ARMA-GARCH 回帰モデルの尤度関数は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\vartheta}) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \exp\left(-\frac{\hat{\varepsilon}(t)^2}{2\sigma(t)^2}\right) \tag{8}$$

と定義される．なお，

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(t) &= y(t) - \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\gamma} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{p}\phi_j \left\{y(t-j) - \boldsymbol{x}(t-j)\boldsymbol{\gamma}\right\} - \sum_{j=1}^{q}\theta_j \hat{\varepsilon}(t-j) \\ &\qquad (t = 1, \cdots, T) \end{aligned} \tag{9}$$

である．また，$\hat{\varepsilon}(0) = y(0)$，$y(t) = 0\ (t < 0)$，$\boldsymbol{x}(t) = 0 (t \leq 0)$ とする．

つぎに，事前確率密度関数を

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}) = \\ &\mathcal{N}(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0}) \\ &\quad \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}) \end{aligned} \tag{10}$$

と設定する．なお，左下添え字 0 はハイパーパラメータを表す．以上から，同時事後確率密度関数は式 (7) に式 (8) と式 (10) を代入することで定式化される．しかしながら，式 (8) と式 (10) により表される同時事後確率密度関数は非常に複雑であり，解析的に解を求めることができない．これに対して，数値計算により同時事後確率密度関数を求める方法として，MH（Metropolis-Hastings）法を基本としたマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション法が Nakatsuma[21] により提案されている．さらに，霍見・ラドチェンコ[22] は Nakatsuma の方法を修正するとともに，MCMC 法に基づく単位根検定法を提案している．本研究では霍見・ラドチェンコ[22] の推計手法を踏襲しながら，GARCH 過程に加えたタイムトレンド項に対応可能な MCMC 方を以下に示す．

(3) 同時事後確率密度関数の推計

ARMA-GARCH 回帰モデルの同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ を求めるために，条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリングを用いる．ここでは未知パラメータ集合 $\boldsymbol{\vartheta}$ を回帰係数ブロック $\boldsymbol{\gamma}$，AR 係数ブロック $\boldsymbol{\phi}$，MA 係数ブロック $\boldsymbol{\theta}$，ARCH ブロック $\boldsymbol{\alpha}$，GARCH ブロック $\boldsymbol{\beta}$ の 5 つのブロックに分割し，他のブロックのパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数に基づくランダムサンプリングの繰り返しにより同時事後確率密度関数を算出する．

以下に具体的な推計手順を示す．

ステップ 1 事前分布のパラメータ値 $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}, \boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0}, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}$ を任意に設定する．本研究では無条件事前分布に近くなるよう分散共分散のパラメータ値を大きく設定することとする．また，未知パラメータ $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ の初期値 $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(0)}, \boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\beta}^{(0)}]$ を任意に設定する．初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れる．また，定常状態に収束した後のサンプリングとは無関係である．

ステップ 2-1 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-2 サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\phi}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-3　サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)},\boldsymbol{\beta}^{(i-1)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-4　サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\theta}^{(i)},\boldsymbol{\beta}^{(i-1)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 2-5　サンプリング回数 i の未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\theta}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ からランダムサンプリングする．

ステップ 3　十分大きな $\underline{i}$ に対して $n>\underline{i}$ ならば $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)}=(\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\theta}^{(i)},\boldsymbol{\alpha}^{(i)},\boldsymbol{\beta}^{(i)})$ を記録する．

ステップ 4　$n=\bar{i}$ ならば計算を終了する．$n<\bar{i}$ ならば $i=i+1$ とし**ステップ 2** へ戻る．

十分大きな $\underline{i}$ に対して，このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば，ギブスサンプリングによる $\boldsymbol{\vartheta}(i=\underline{i}+1,\underline{i}+2,\cdots,\bar{i})$ のサンプリングは式 (7) に示した同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\vartheta}|\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ からのサンプリングと等しくなる．したがって，ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\boldsymbol{\vartheta}(i=\underline{i}+1,\underline{i}+2,\cdots,\bar{i})$ を用いて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\vartheta}=[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる．ただし，**ステップ 2** で利用する条件付き事後確率密度関数からは直接にランダムサンプリングすることができない．

(4)　条件付き事後確率密度関数からのサンプリング

条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングできない場合であっても，ランダムウォーク MH 法を利用することで条件付き事後確率からの標本を得ることができる．また，ARMA-GARCH 回帰モデルのランダムウォーク MH 法に関しては効率的サンプリングを可能とする提案分布が考案されている[22]．

いま，未知パラメータ集合 $\boldsymbol{\vartheta}$ を 2 つのグループに分割する．第一グループは $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}$，第二グループは $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ である．それぞれのグループの未知パラメータについて，異なる提案分布を用いる．

第一グループ $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}$ についての提案分布は，ARMA-GARCH モデル

$$y(t)=\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\gamma}+\sum_{j=1}^{p}\phi_j\left\{y(t-j)-\boldsymbol{x}(t-j)\boldsymbol{\gamma}\right\}$$
$$+\varepsilon(t)+\sum_{j=1}^{q}\theta_j\varepsilon(t-j)$$
$$\varepsilon(t)\sim\mathcal{N}(0,\sigma(t)^2) \tag{11}$$

に基づく．なお，このとき，条件付き分散 $\sigma(t)^2\quad(t=1,\cdots,T)$ は既知であり固定されていると仮定する．式 (11) を利用することで，多少の修正を加えた Chib and Greenberg[23]による MCMC 法に基づき，第一グループの未知パラメータのサンプルを提案分布から発生させることができる．

第二グループについての提案分布は，GARCH モデルを近似した

$$\varepsilon(t)^2=a+bt+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j+\beta_j)\varepsilon(t-j)^2$$
$$+w(t)-\sum_{j=1}^{s}\beta_j w(t-j)$$
$$w(t)\sim\mathcal{N}(0,2\sigma(t)^4) \tag{12}$$

に基づく．ここで，

$$l=\max\{r,s\} \tag{13}$$

であり，$j>r$ のとき $\alpha_j=0$，$j>s$ のとき $\beta_j=0$ である．モデル (12) は GARCH モデルの良く知られた特性を利用することにより導くことができる．Bollerslev[15]が示したように，GARCH(r,s) モデル (3) は $\varepsilon(t)^2(t=1,\cdots,T)$ の ARMA(l,s) 過程として，

$$\varepsilon(t)^2=a+bt+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j+\beta_j)\varepsilon(t-j)^2$$
$$+\tilde{w}(t)-\sum_{j=1}^{s}\beta_j\tilde{w}(t-j) \tag{14}$$

と表現される．ここで，$\tilde{w}(t)=\varepsilon(t)^2-\sigma(t)^2$ である．$\tilde{w}(t)$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t)&=\varepsilon(t)^2-\sigma(t)^2\\&=\sigma(t)^2\left(\frac{\varepsilon(t)^2}{\sigma(t)^2}-1\right)\\&=\sigma(t)^2\left(\chi^2(1)-1\right)\end{aligned} \tag{15}$$

の関係から，条件付き期待値が 0，条件付き分散が $2\sigma(t)^4$ となる．これを踏まえ，$\tilde{w}$ を $\mathcal{N}(0,2\sigma(t)^4)$ に従う確率変数 $w(t)$ として近似することで，式 (12) を得ることができる．

実際にランダムウォーク MH 法により条件付き事後確率密度関数を算出する場合には，以上に示した式 (11), (12) をさらにパラメータごとに変形することで，効率的なサンプリングを実現できる[22]．以下に効率的サンプリングを可能とする各ブロックの提案分布とサンプリング手順をそれぞれ示す．

a)　回帰係数 $\boldsymbol{\gamma}$

ランダムウォーク MH 法により回帰係数 $\boldsymbol{\gamma}$ の標本を得るための提案分布を導出するために，式 (11) を以下のように書き直す．

$$y^{\gamma}(t)=\boldsymbol{x}^{\gamma}(t)\boldsymbol{\gamma}+\varepsilon(t) \tag{16a}$$

$$y^{\gamma}(t)=y(t)-\sum_{j=1}^{p}\phi_j y(t-j)-\sum_{j=1}^{q}\theta_j y^{\gamma}(t-j) \tag{16b}$$

$$\boldsymbol{x}^{\gamma}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\sum_{j=1}^{p}\phi_j \boldsymbol{x}(t-j)-\sum_{j=1}^{q}\theta_j \boldsymbol{x}^{\gamma}(t-j) \tag{16c}$$

$$\varepsilon(t)\sim\mathcal{N}(0,\sigma(t)^2)$$

なお，$y(t)=y^{\gamma}(t)=0$ $(t\leq 0)$，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^{\gamma}(t)=0$ $(t\leq 0)$ である．これにより，式 (8) が,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\vartheta})=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}\exp\left\{-\frac{(y^{\gamma}(t)-\boldsymbol{x}^{\gamma}(t)\boldsymbol{\gamma})^2}{2\sigma(t)^2}\right\} \tag{17}$$

として表現できる．すなわち，ランダムウォーク MH 法において,

$$\boldsymbol{\gamma}^{(*)}\sim\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(i-1)},\boldsymbol{\Sigma}_{\gamma}^{(i)}\right) \tag{18}$$

として i 回目の標本の候補を抽出可能であることを示している．ここで,

$$\Sigma_{\gamma}^{(i)}=\left\{\boldsymbol{X}_{\gamma}^{\prime(i-1)}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\gamma}^{(i-1)}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_{\gamma}^{(i-1)}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0}^{-1}\right\}^{-1} \tag{19a}$$

$$\boldsymbol{X}_{\gamma}^{(i-1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{\gamma}(T)\end{bmatrix} \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\gamma}^{(i-1)}=\begin{bmatrix}\sigma(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma(T)^{2(i-1)}\end{bmatrix} \tag{19c}$$

である．また，$\sigma(t)^{2(i-1)}$ は，$\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}$ と $\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ を用いた式 (9)，および $\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}$ と $\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}$ を用いた式 (3) により算出される．

抽出された標本の候補を用いて,

$$\boldsymbol{p}_{\gamma}=\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\gamma}^{(i)}|\gamma_0,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\gamma}^{(i-1)},\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\gamma}^{(i-1)}|\gamma_0,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\gamma}_0})} \tag{20}$$

を計算する．なお，$\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{(i-1)}=[\boldsymbol{\phi}^{(i-1)},\boldsymbol{\theta}^{(i-1)},\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)},\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である．式 (18) により発生させた回帰係数の候補 $\boldsymbol{\gamma}^{(*)}$ は，確率

$$\lambda_{\gamma}=\min\left\{\boldsymbol{p}_{\gamma},1\right\} \tag{21}$$

に従って受容し，$\boldsymbol{\gamma}^{(i)}=\boldsymbol{\gamma}^{(*)}$ とする．また，棄却された場合には $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}=\boldsymbol{\gamma}^{(i-1)}$ とする．

b) AR 係数 $\boldsymbol{\phi}$

ランダムウォーク MH 法により AR 係数 $\boldsymbol{\phi}$ の標本を得るための提案分布を導出するために，式 (11) を以下のように書き直す.

$$y^{\phi}(t)=\boldsymbol{x}^{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}^{'}+\varepsilon(t) \tag{22a}$$

$$y^{\phi}(t)=y(t)-\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\gamma}-\sum_{j=1}^{q}\theta_j y^{\phi}(t-j) \tag{22b}$$

$$\boldsymbol{x}^{\phi}(t)=\left[y^{\phi}(t-1).\cdots,y^{\phi}(t-p)\right] \tag{22c}$$

$$\varepsilon(t)\sim\mathcal{N}(0,\sigma(t)^2)$$

なお，$y(t)=y^{\phi}(t)=0$ $(t\leq 0)$ である．これにより，式 (8) は,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\vartheta})=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}\exp\left\{-\frac{(y^{\phi}(t)-\boldsymbol{x}^{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}^{'})^2}{2\sigma(t)^2}\right\} \tag{23}$$

として表現でき，回帰係数と同様にランダムウォーク MH 法において,

$$\boldsymbol{\phi}^{(*)}\sim\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\phi}^{(i-1)},\boldsymbol{\Sigma}_{\phi}^{(i)}\right) \tag{24}$$

として i 回目の標本の候補を抽出可能であることを示している．ここで,

$$\Sigma_{\phi}^{(i)}=\left\{\boldsymbol{X}_{\phi}^{\prime(i-1)}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\phi}^{(i-1)}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_{\phi}^{(i-1)}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0}^{-1}\right\}^{-1} \tag{25a}$$

$$\boldsymbol{X}_{\phi}^{(i-1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\phi}(1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{\phi}(T)\end{bmatrix} \tag{25b}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\phi}^{(i-1)}=\begin{bmatrix}\sigma(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma(T)^{2(i-1)}\end{bmatrix} \tag{25c}$$

である．また，$\sigma(t)^{2(i-1)}$ は回帰係数の場合と同様に算出される．

抽出された標本の候補を用いて,

$$\boldsymbol{p}_{\phi}=\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\phi}^{(i)},\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\phi}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}^{(i)}|\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\phi}^{(i-1)},\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\phi}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}|\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\phi}_0})} \tag{26}$$

を計算する．なお，$\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\phi}}^{(i-1)}=[\boldsymbol{\gamma}^{(i)},\boldsymbol{\theta}^{(i-1)},\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)},\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である．式 (24) により発生させた AR 係数の候補 $\boldsymbol{\phi}^{(*)}$ は，確率

$$\lambda_{\phi}=\min\left\{\boldsymbol{p}_{\phi},1\right\} \tag{27}$$

に従って受容し，$\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{\phi}^{(*)}$ とする．また，棄却された場合には $\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{\phi}^{(i-1)}$ とする．

c) MA 係数 $\boldsymbol{\theta}$

ランダムウォーク MH 法により MA 係数 $\boldsymbol{\theta}$ の標本を得るための提案分布を導出するために，式 (11) を以下のように書き直す.

$$y^{\theta}(t)=\hat{\varepsilon}^{\theta}(t)-\boldsymbol{x}^{\theta}(t)\boldsymbol{\theta}^{'} \tag{28a}$$

$$\hat{\varepsilon}^{\theta}(t)=y(t)-\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\gamma}-\sum_{j=1}^{p}\phi_j\{y(t-j)-\boldsymbol{x}(t-j)\boldsymbol{\gamma}\} \tag{28b}$$

$$\boldsymbol{x}^{\theta}(t)=\left[y^{\theta}(t-1),\cdots,y^{\theta}(t-q)\right] \tag{28c}$$

なお，$y(t)=y^{\theta}(t)=0$ $(t\leq 0)$ である．これにより，式 (8) は,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\vartheta})=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}\exp\left\{-\frac{(\hat{\varepsilon}^{\theta}(t)+\boldsymbol{x}^{\theta}(t)\boldsymbol{\theta}^{'})^2}{2\sigma(t)^2}\right\} \tag{29}$$

として表現できる．このとき，式 (29) は近似尤度であることに留意されたい．このとき，ランダムウォーク MH 法において，

$$\boldsymbol{\theta}^{(*)} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{\theta}^{(i)}\right) \tag{30}$$

として i 回目の標本の候補を抽出可能であることを示している．ここで，

$$\Sigma_{\theta}^{(i)} = \left\{\boldsymbol{X}_{\theta}^{'(i-1)}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\theta}^{(i-1)}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_{\theta}{}^{(i-1)}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{-1}\right\}^{-1} \tag{31a}$$

$$\boldsymbol{X}_{\theta}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\theta}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{\theta}(T) \end{bmatrix} \tag{31b}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\theta}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \sigma(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \tag{31c}$$

である．また，$\sigma(t)^{2(i-1)}$ は回帰係数，AR 係数の場合と同様に算出される．

抽出された標本の候補を用いて，

$$\boldsymbol{p}_{\theta} = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_0})} \tag{32}$$

を計算する．なお，$\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である．式 (30) により発生させた MA 係数の候補 $\boldsymbol{\theta}^{(*)}$ は，確率

$$\lambda_{\theta} = \min\{\boldsymbol{p}_{\theta}, 1\} \tag{33}$$

に従って受容し，$\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \boldsymbol{\theta}^{(*)}$ とする．また，棄却された場合には $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$ とする．

d)　ARCH 係数 $\boldsymbol{\alpha}$

ランダムウォーク MH 法により ARCH 係数 $\boldsymbol{\alpha}$ の標本を得るための提案分布を導出するために，式 (12) を AR 係数の場合と同様に以下のように書き直す．

$$\varepsilon^{\alpha}(t)^2 = \boldsymbol{x}^{\alpha}(t)\boldsymbol{\alpha}^{'} + w(t) \tag{34a}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t)^2 = \varepsilon(t)^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t-j)^2 \tag{34b}$$

$$\tau_1^{\alpha}(t) = 1 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tau_1^{\alpha}(t-j) \tag{34c}$$

$$\tau_2^{\alpha}(t) = t + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tau_2^{\alpha}(t-j) \tag{34d}$$

$$\varepsilon^{\alpha}(t)^2 = \tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t)^2 - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t-j)^2 \tag{34e}$$

$$\boldsymbol{x}^{\alpha}(t) = [\tau_1^{\alpha}(t), \tau_2^{\alpha}(t), \tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t-1), \cdots, \tilde{\varepsilon}^{\alpha}(t-r)] \tag{34f}$$

$$w(t) \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma(t)^4)$$

なお，$\varepsilon(t) = \varepsilon^{\alpha}(t) = 0\ (t \leq 0)$ である．これにより，式 (12) の下で ε が発生する条件付き確率密度は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\vartheta}) =$$

$$\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma(t)^4)}}\exp\left\{-\frac{(\varepsilon^{\alpha}(t)^2 - \boldsymbol{x}^{\alpha}(t)\boldsymbol{\alpha}^{'})^2}{2(2\sigma(t)^4)}\right\} \tag{35}$$

として表現でき，ランダムウォーク MH 法において，

$$\boldsymbol{\alpha}^{(*)} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha}^{(i)}\right) \tag{36}$$

として i 回目の標本の候補を抽出可能であることを示している．ここで，

$$\Sigma_{\alpha}^{(i)} = \left\{\boldsymbol{X}_{\alpha}^{'(i-1)}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha}^{(i-1)}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_{\alpha}{}^{(i-1)}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1}\right\}^{-1} \tag{37a}$$

$$\boldsymbol{X}_{\alpha}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\alpha}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{\alpha}(T) \end{bmatrix} \tag{37b}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \sigma(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \tag{37c}$$

である．また，$\sigma(t)^{2(i-1)}$ は他のパラメータの場合と同様に算出される．

抽出された標本の候補を用いて，

$$\boldsymbol{p}_{\alpha} = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\alpha}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}|\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\alpha}}^{(i-1)})\cdot\mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}|\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_0})} \tag{38}$$

を計算する．なお，$\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\alpha}}^{(i-1)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}]$ である．式 (36) により発生させた ARCH 係数の候補 $\boldsymbol{\alpha}^{(*)}$ は，確率

$$\lambda_{\alpha} = \min\{\boldsymbol{p}_{\alpha}, 1\} \tag{39}$$

に従って受容し，$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}^{(*)}$ とする．また，棄却された場合には $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}$ とする．

e)　GARCH 係数 $\boldsymbol{\beta}$

ランダムウォーク MH 法により GARCH 係数 $\boldsymbol{\beta}$ の標本を得るための提案分布を導出するために，式 (12) を MA 係数の場合と同様に以下のように書き直す．

$$\varepsilon^{\beta}(t)^2 = \iota^{\beta}(t) - \boldsymbol{x}^{\beta}(t)\boldsymbol{\beta}^{'} \tag{40a}$$

$$\iota^{\beta}(t) = \varepsilon(t)^2 - a - bt - \sum_{j=1}^{l}(\alpha_j + \beta_j)\varepsilon(t-j)^2 \tag{40b}$$

$$\boldsymbol{x}^{\beta}(t) = -\left[\varepsilon^{\beta}(t-1)^2, \cdots, \varepsilon^{\beta}(t-s)^2\right] \tag{40c}$$

なお，$\varepsilon(t) = \varepsilon^{\beta}(t) = 0\ (t \leq 0)$ である．これにより，式 (12) の下で ε が発生する条件付き確率密度は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\vartheta}) =$$

$$\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma(t)^4)}}\exp\left\{-\frac{(\iota^{\beta}(t) - \boldsymbol{x}^{\beta}(t)\boldsymbol{\beta}^{'})^2}{2(2\sigma(t)^4)}\right\} \tag{41}$$

として表現できる．このとき，式 (41) は式 (29) と同様に近似尤度であることに留意されたい．このとき，ランダムウォーク MH 法において，

$$\boldsymbol{\beta}^{(*)} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta}^{(i)}\right) \tag{42}$$

として i 回目の標本の候補を抽出可能であることを示している．ここで，

$$\Sigma_\beta^{(i)} = \left\{ \boldsymbol{X}_\beta'^{(i-1)} \left(\boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i-1)} \right)^{-1} \boldsymbol{X}_\beta{}^{(i-1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0}^{-1} \right\}^{-1} \tag{43a}$$

$$\boldsymbol{X}_\beta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^\beta(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^\beta(T) \end{bmatrix} \tag{43b}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\beta^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \sigma(1)^{2(i-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma(T)^{2(i-1)} \end{bmatrix} \tag{43c}$$

である．また，$\sigma(t)^{2(i-1)}$ は他のパラメータの場合と同様に算出される．

抽出された標本の候補を用いて，

$$\boldsymbol{p}_\beta = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\beta}}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}^{(i)}|\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0})}{\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}, \boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\beta}}^{(i-1)}) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}|\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_0})} \tag{44}$$

を計算する．なお，$\boldsymbol{\vartheta}_{-\boldsymbol{\beta}}^{(i-1)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}]$ である．式 (42) により発生させた GARCH 係数の候補 $\boldsymbol{\beta}^{(*)}$ は，確率

$$\lambda_\beta = \min\{\boldsymbol{p}_\beta, 1\} \tag{45}$$

に従って受容し，$\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \boldsymbol{\beta}^{(*)}$ とする．また，棄却された場合には $\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}$ とする．

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ に関する推計値を決定することができる．いま，MCMC 法により得られた標本を $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} = [\boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \boldsymbol{\phi}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \boldsymbol{\beta}^{(i)}] = [\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}, \cdots, \vartheta_K^{(i)}]$ と表すこととする．このうち，最初の $\underline{i}$ 個を事後分布への収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．その上で，パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{i}+1, \cdots, \bar{i}\}$ と定義する．このとき，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の同時確率分布関数 $G(\boldsymbol{\theta})$ は

$$G(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\#(\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M})}{\bar{i} - \underline{i}} \tag{46}$$

と表すことができる．ただし，$\#(\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\theta}, i \in \mathcal{M})$ は論理式 $\boldsymbol{\vartheta}^{(i)} \leq \boldsymbol{\vartheta}, i \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である．また，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\vartheta})$ は，

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta}) = (\tilde{\zeta}(\vartheta_1), \cdots, \tilde{\zeta}(\vartheta_K))' \tag{47a}$$

$$= \Big(\sum_{i=\underline{i}+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_1^{(i)}}{\bar{i} - \underline{i}}, \cdots, \sum_{i=\underline{i}+1}^{\bar{i}} \frac{\vartheta_K^{(i)}}{\bar{i} - \underline{i}} \Big)' \tag{47b}$$

と表される．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ $\boldsymbol{\vartheta}$ の信用区間を定義できる．$100(1-2\kappa)\%$ 信用区間は，標本順序統計量 $(\underline{\vartheta}_k^\kappa, \overline{\vartheta}_k^\kappa)$ $(k = 1, \cdots, K)$

$$\underline{\vartheta}_k^\kappa = \arg\max_{\vartheta_k^*} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \leq \vartheta_k^*, i \in \mathcal{M})}{\bar{i} - \underline{i}} \leq \kappa \right\} \tag{48a}$$

$$\overline{\vartheta}_k^\kappa = \arg\min_{\vartheta_k^{**}} \left\{ \frac{\#(\vartheta_k^{(i)} \geq \vartheta_k^{**}, i \in \mathcal{M})}{\bar{i} - \underline{i}} \leq \kappa \right\} \tag{48b}$$

を用いて $\underline{\vartheta}_k^\kappa < \theta_k < \overline{\vartheta}_k^\kappa$ と定義できる．

MCMC 法では，初期パラメータ値 $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない．発生させた $\bar{i}$ 個のサンプルが不変分布からの標本であるか否かは Geweke 検定により判断することができる[24)-26)]．ここで，ϑ の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\theta_k}| \leq z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\theta_k}| > z_{\psi/2} \end{cases} \tag{49}$$

と設定する．ただし，$z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である．有意水準 $\psi\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合，$z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$ を満足する値として定義できる．ただし，$\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である．

5. おわりに

本研究では，長期モニタリングデータに基づく異常発生時点の抽出や劣化予測を行う方法論の構築を目的として，時系列モデルの誤差項の分散の変動をトレンド付きの ARMA 過程で表現した ARMA-GARCH 回帰モデル，およびその推計手法を提案した．なお，講演会当日には，高速道路のジョイント部材における長期モニタリングデータへの適用を通して，本研究の有効性を実証的に検証した事例を紹介する．

参考文献

1) 小林潔司：分権的ライフサイクル費用評価と集計的効率性，土木学会論文集，No.793/IV-68，pp.59-71，2005.
2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.
3) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
4) 貝戸清之，保田敬一，小林潔司，大和田慶：平均費用法に基づいた橋梁部材の最適補修戦略，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.83-96，2005.
5) Fritzen, C.-P.: Vibration-based structural health monitoring – concepts and applications, *Key Engineering Materials*, Vol.3, No.20, pp.293-294, 2005.

6) Friswell, M., Mottershead, J.: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1995.
7) Kiremidjian: *Statistical Pattern Recognition*, Willy, West Sussex, United Kingdom, 2009.
8) Sohn, H., Fugate, M., Farrar, C.: Damage diagnosis using statistical process control, *Paper prepared for Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, United Kingdom, 2000.
9) Fugate, M., Sohn, H., Farrar, C.: Vibration-based damage detection using statistical process control, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.15, No.4, pp.707-721, 2001.
10) Nair, K., Kiremidjian, A.: Time series based structural damage detection algorithm using Gaussian Mixture Modeling, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.291, pp.285-293, 2007.
11) Sohn, H., Farrar, C., Hemez, F., Czarnecki, J.: A review of structural health monitoring literature 1996-2001, *Journal of Structural Engineering*, Technical Report LA-UR-02-2095, Los Alamos National Laboratory, 2002.
12) Chu, C.-Y., Durango-Cohen, P.: Estimation of infrastructure performance models using state-space specifications of time series models, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.15, No.1, pp.174-188, 2007.
13) Chu, C.-Y., Durango-Cohen, P.: Estimation of dynamic performance models for transportation infrastructure using panel data, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.1, pp.57-81, 2008.
14) Engle, R. F.: Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, Vol.50, pp.987-1008, 1982
15) Bollerslev, T.: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307-327, 1986.
16) Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E.:Equations of state calculations by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics*, Vol.21, pp.1087-1092, 1953.
17) Hastings, W. K.: Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, Vol.57, pp.97-109, 1970.
18) Kleibergen, F., Van Dijk, H.K.: Non-stationarity in GARCH models: A Batesian analysis, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.8, pp.S41-S61, 1993.
19) Engle, R.: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics, *Journal of Economic Perspectives*, Vol.15, No.4, pp.157-168, 2001.
20) 和合肇：ベイズ計量経済分析，東洋経済出版社，2005.
21) Nakatsuma, T.: Bayesian analysis of ARMA-GARCH models: A Markov chain sampling approach, *Journal of Econometrics*, Vol.95, pp.57-69, 2000.
22) 霍見浩喜，ラドチェンコ: アジア金融危機後の外国為替間の関係（単位根，共和分，VAR），ベイズ計量経済分析，第 3 章，pp.101-126, 2005.
23) Chib, S. and Greenberg, E: Bayesian inference in regression models with ARMA(p, q) errors, *Journal of Econometrics*, Vol.64, pp.183-206, 1994.
24) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
25) Chib, S.: Marginal Likelihood from Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321,1995.
26) Newey, W. K. and West, K. D.: A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Coisistent Covariance Matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708,1987.

(2013．5．6 受付)