高速道路継手構造に対する 路上・路下点検結果の相関性分析

水谷大二郎[1]・小濱健吾[2]・貝戸清之[3]・小林潔司[4]

[1]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail:d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]正会員　大阪大学特任研究員　工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail:k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[4]フェロー会員　京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)
E-mail:kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

高速道路継手構造に対して，路上点検，路下点検の 2 種類の方法により点検がなされている．しかし，路上点検には交通規制が伴い，点検データの蓄積が路下点検に比べ困難である．統計的劣化予測の発展により，路上点検データ，路下点検データを別個に用いてそれぞれの劣化速度を算出することが可能となったが，両点検データ間の関連性を調査した事例は蓄積されていない．そこで，本研究では，路下点検結果から路上点検結果を予測することを目的として，両点検データ間の相互依存性をコピュラ関数により表現する．具体的には，混合マルコフ劣化ハザードモデルで推計された路上，路下点検データそれぞれの異質性パラメータ間にコピュラ関数を当てはめたモデルを提案し，実データを用いてその有用性を検証する．

Key Words : *copula, hierarchical Bayesian estimation, mixed Markov deterioration hazard model*

1.　はじめに

社会基盤施設のアセットマネジメントの 1 分野として，目視点検データを用いた統計的劣化予測が，近年，急速に発展してきた．中でも，マルコフ劣化ハザードモデル[3)]の開発により，多段階レーティングデータを用いて健全度評価がなされた社会基盤施設の劣化予測精度が飛躍的に向上した．さらに，マルコフ劣化ハザードモデルを拡張させた，混合マルコフ劣化ハザードモデル[4)]の開発により，管理者側が実務に即して設定した評価単位毎のミクロな異質性評価が可能となった．また，混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計するための方法論として階層ベイズ推計を基にした方法論[5)]が提案され，現場での経験的知見を事前分布として推計に組み込む手法が確立された．しかし，このように経験的知見を活用可能な方法論が開発されたにも関わらず，従来，事前分布は恣意的に決定されていた．

本研究で取り扱う，高速道路伸縮継手装置では，路上点検，路下点検の 2 種類の点検がなされており，それぞれ異なる点検データベースとして点検結果が保存されている．路上，路下の 2 種類の点検は，点検項目こそ違うものの，同一の伸縮装置に対して行われているため，両点検データ間で依存性が存在する可能性が考えられる．そこで，本研究では，複数の点検データ間の依存性をコピュラ関数[1),2)]で評価し，さらに，コピュラ関数で評価された路上，路下点検データの相関性に応じて，路上点検データからの劣化予測の際に路下点検データの情報を，事前分布として組み込むことのできるモデルを提案する．

以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を述べる．**3.** でコピュラ関数，**4.** で混合マルコフ劣化ハザードモデルの概要を説明したのち，**5.** でコピュラ関数を用いた混合マルコフ劣化ハザードモデルの推計手法について詳述する．

2.　本研究の基本的な考え方

(1)　伸縮継手装置の路上・路下点検スキーム

伸縮継手装置に対する点検は路上点検と路下点検に分類できる．路上点検は車両の通行止めを伴う詳細な目視点検であり，一方，路下点検は橋脚天端から伸縮継手装置の状態を視認する定期的な目視点検である．路上点検は道路のリフレッシュ工事などの一斉通行止め期間を利用して実施される．一斉通行止めの対象となる路線は劣化がある程度進展していると考えられるが，点検対象となる伸縮継手装置の選定はランダムサンプリングであるとみなす．路下点検についても定期的に点検が実施されるため，伸縮継手装置の選定はランダ

ムサンプリングであるとみなすことができる．また，路上点検では亀裂，剥離，磨耗，段差，たたき点検，路下点検では異常音，漏水，ボルトの欠損およびゆるみ，と路上点検，路下点検で点検項目は異なるが，同一の伸縮継手装置を対象とした点検であるため，点検結果間に依存性があると考えられる．

(2) 統計的劣化予測手法

高速道路伸縮継手装置に対する目視点検の結果は，一般的に多段階の離散的な健全度として評価される．マルコフ劣化ハザードモデルでは，主な劣化要因を特性変数として内包させたハザード率によって，任意の健全度から次段階の健全度へ進展する劣化速度（期待寿命）を定義する．このハザード率を用いてマルコフ推移確率を算出することで期待劣化パスや健全度分布の推移を求めることが可能となる．さらに，マルコフ劣化ハザードモデルに対して，特性変数では表現しきれない要因（不可観測要因）の影響を各評価単位に対して１つのパラメータに集約し，確率変数で表現する．このパラメータを異質性パラメータと呼び，異質性の影響を考慮したマルコフ劣化ハザードモデルは混合マルコフ劣化ハザードモデルとして定義される．同モデルの混合ハザード率は，のハザード率と異質性パラメータの確率的コンボリューションにより表される．また，本研究では，参考文献 (5) に従い，混合マルコフ劣化ハザードモデルの推計に階層ベイズ推計を用いた．

(3) コピュラ関数

本研究では，路上・路下点検データから推計される２種類の異質性パラメータ間の依存性を２変量コピュラ関数 C[1),2)] を用いて表す．周辺分布関数 F^t，F^u を持つ，２種類の確率変数 X^t，X^u の連続な同時分布関数を $F(x^t, x^u)$ とすると，スクラーの定理[2)]より，

$$\begin{aligned}
&\Pr(X^t \le x^t, X^u \le x^u) \\
&= F(x^t, x^u) \qquad (1)\\
&= C(F^t(x^t), F^u(x^u))
\end{aligned}$$

を満たすコピュラ関数 C が一意に存在する．スクラーの定理から，コピュラ関数 C に周辺分布 F^t，F^u を適用することで生成される $C(F^t, F^u)$ は，周辺分布を区間 $[0, 1]$ とする同時分布関数であることがわかる．また，

- 任意の $u \in [0, 1]$ と任意の $v \in [0, 1]$ について，

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \qquad (2)$$

- 任意の $u \in [0, 1]$ と任意の $v \in [0, 1]$ について，

$$C(u, 1) = u \text{ かつ } C(1, v) = v \qquad (3)$$

- $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$，$u_1 \le u_2$，$v_1 \le v_2$ を全ての頂点が $[0, 1] \times [0, 1]$ に含まれる矩形領域とする．

このとき，任意の $V_C(B)$ について，

$$\begin{aligned}
&V_C(B) \\
&= C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \\
&\ge 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

の３つの性質を全て満たすような関数 C がコピュラ関数として定義される[6)]．

変量間の多様な依存関係の表現を目的として，過去に，様々な種類のコピュラ関数が提案されてきた．本研究では，経済学の分野での使用実績が十分にあり，乱数発生方法が知られているなど実務的にも扱いやすい，アルキメディアン・コピュラ[1)]の中から，ガンベル・コピュラ，クレイトン・コピュラの２種類のコピュラ関数を候補とし，最も AIC の低いコピュラを採用する．

周辺分布関数をそれぞれ $F^T(t) = u$，$F^D(d) = v$ の２変量とした場合の，コピュラ関数を以下に示す．

a) ガンベル・コピュラ

ガンベル・コピュラのコピュラ関数は次式で表される．

$$C(u, v) = \exp(-((-\ln u)^a + (-\ln v)^a)^{1/a}) \qquad (5)$$

$$(1 \le a)$$

ここで，a が１のとき２変量間が無相関であり，値が大きいほど２変量間の正の依存度が強いことを表す．

b) クレイトン・コピュラ

クレイトン・コピュラのコピュラ関数は次式で表される．

$$C(u, v) = (u^{-a} + v^a - 1, 0)^{-1/a} \qquad (6)$$

$$(0 < a)$$

ここで，a が０に近づくほど２変量が無相関であり，値が大きいほど２変量間の依存度が高いことを表す．

3. コピュラ関数と混合マルコフ劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

カレンダー時刻 s_0 を初期時点とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \cdots$ を考え，離散的時間軸上の点を時点と呼び，カレンダー時刻と区別する．単位時間幅を１に基準化する．施設の健全性を I 個の健全度 i $(i = 1, \cdots, I)$ で表現する．i の値が大きくなるほど，劣化が進展している．時点 t における施設の健全度を状態変数 $h(t) = i$ $(i = 1, \cdots, I; t = 0, 1, \cdots)$ を用いて表現する．施設の劣化過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し，離散時間軸上の単位時間間隔における健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する．推移確率は，時点 t における健全度 $h(t) = i$ を与件とし，次の時点 $t+1$ における健全度 $h(t+1) = j (j \ge i)$ が生起する条件付確率

$$\mathrm{Prob}[h(t+1) = j | h(t) = i] = \pi_{ij} \qquad (7)$$

を用いて定義される．なお，微小時間での健全度の推移は1段階である．このようなマルコフ推移確率 (7) は所与の2つの時点 t，$t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり，当然のことながら，対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる．補修がない限り常に劣化が進行するので，$\pi_{ij}=0\ (i>j)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I}\pi_{ij}=1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{ij}\geq 0\ (i,j=1,\cdots,I)\\ \pi_{ij}=0\ (i>j\ の時)\\ \sum_{j=i}^{I}\pi_{ij}=1\end{array}\right\} \tag{8}$$

が成立しなければならない．健全度 I は，補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{II}=1$ が成立する．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴には依存しない．マルコフ連鎖モデルでは，健全度が $i-1$ から i に推移した時点に拘わらず，時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみに依存するという性質（マルコフ性）を満足する[7]．

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデル

混合マルコフ劣化ハザードモデル[5]の異質性パラメータの事前分布としてコピュラ関数を使用する．本研究では2種類の目視点検データに基づく個々の施設の劣化予測を目的としている．2種類の点検データを点検データ1，点検データ2と区別し，以降，異質性パラメータ，ハザード率，分散パラメータの添え字が1の場合は点検データ1のパラメータ，2の場合は点検データ2のパラメータを示すこととする．分析の対象とする社会基盤施設を K 個の施設グループ（評価単位）に分割する．さらに，施設グループ $k\ (k=1,\cdots,K)$ は，合計 L_k 個の施設で構成されている．施設グループ k に固有なハザード率の異質性を表すパラメータ $\varepsilon^{1,k}$，$\varepsilon^{2,k}$ を導入する．このとき，施設グループ k の施設 $l_k^s\ (l_k^s=1,\cdots,L_k^s;s=1,2)$ の健全度 $i\ (i=1,\cdots,I-1)$ のハザード率を，個別ハザード率

$$\lambda_i^{l_k^s}=\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}\varepsilon^{s,k} \tag{9}$$

$$(i=1,\cdots,I-1;k=1,\cdots,K;\quad l_k^s=1,\cdots,L_k^s;s=1,2)$$

を用いて表す．ここに，$\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}$ は施設グループ k の施設 l_k^s が有する健全度 i の点検データ s に関する平均的なハザード率（以下，標準ハザード率）である．なお，点検データ1，2では同じレーティング数 I 個の健全度評価がなされているものとする．異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ は，施設グループ k の標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり，$\varepsilon^{s,k}\geq 0$ が成立すると仮定する．異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ の値が大きくなるほど，当該施設グループ k に含まれる全ての施設の点検データ s での劣化速度が，標準ハザード率に対して大きいことを表す．式 (9) において，全ての健全度のハザード率に，同一の確率変数 $\varepsilon^{s,k}$ が含まれることに留意して欲しい．これにより，ある健全度において劣化速度が大きい場合，他の健全度の劣化速度も相対的に大きくなることを表すことができる．ここで，目視点検データ s の異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ が分布 $f(\varepsilon^{s,k}|\varepsilon^{\bar{s},k})$ から抽出された標本であると考える．なお，$\bar{s}$ は $s=1$ のとき $\bar{s}=2$ を，$s=2$ のとき $\bar{s}=1$ をとるダミー変数である．このとき，分布 $f(\varepsilon^{s,k}|\varepsilon^{\bar{s},k})$ は，

$$\begin{aligned}f(\varepsilon^{s,k}|\varepsilon^{\bar{s},k})&=\frac{f(\varepsilon^{s,k},\varepsilon^{\bar{s},k})}{f_{\bar{s}}(\varepsilon^{\bar{s},k})}\\&=c(F_s(\varepsilon^{s,k}),F_{\bar{s}}(\varepsilon^{\bar{s},k}))f_s(\varepsilon^{s,k})\end{aligned} \tag{10}$$

とコピュラ関数の確率密度関数 (5)，(6) を用いて表現できる．ここに，F_s は異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ の周辺分布関数，f_s は周辺分布関数 F_s の確率密度関数であり，本研究では周辺分布 F_s，f_s にガンマ分布

$$\begin{aligned}f_s(\varepsilon^{s,k})&=\bar{g}(\varepsilon^{s,k}|\phi^s)\\&=\frac{(\phi^s)^{\phi^s}}{\Gamma(\phi^s)}(\varepsilon^{s,k})^{\phi^s-1}\exp(-\phi^s\varepsilon^{s,k})\end{aligned} \tag{11}$$

を仮定する．なお，ガンマ分布 (11) は平均1，分散 $1/\phi^s$ をとる．

いま，施設グループ $k\ (k=1,\cdots,K)$ の異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ の値を $\bar{\varepsilon}^{s,k}$ に固定する．このとき，施設グループ k のある施設 l_k^s の健全度 i の寿命が $y_i^{l_k^s}$ 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{l_k^s})$ は，指数ハザード率 (9) を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{l_k^s})=\exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}\bar{\varepsilon}^{s,k}y_i^{l_k^s}) \tag{12}$$

と書き換えることができる．さらに，施設グループ k の施設 l_k^s の第1回目の点検時刻 $\tau_A^{l_k^s}$ において健全度が i と判定され，次の点検時刻 $\tau_B^{l_k^s}=\tau_A^{l_k^s}+z^{l_k^s}$ においても健全度が i と判定される確率 $\pi_{ii}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k})$ は，

$$\pi_{ii}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k})=\exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}\bar{\varepsilon}^{s,k}z^{l_k^s}) \tag{13}$$

となる．また，点検時刻 $\tau_A^{l_k^s}$ と $\tau_B^{l_k^s}=\tau_A^{l_k^s}+z^{l_k^s}$ の間で健全度が i から $j\ (>i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k})$ は，式 (9) より，

$$\begin{aligned}\pi_{ij}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k})&=\sum_{c=i}^{j}\prod_{m=i,\neq c}^{j-1}\frac{\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}}{\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}-\tilde{\lambda}_c^{l_k^s}}\exp(-\tilde{\lambda}_c^{l_k^s}\bar{\varepsilon}^{s,k}z^{l_k^s})\\&=\sum_{c=i}^{j}\psi_{ij}^c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s})\exp(-\tilde{\lambda}_c^{l_k^s}\bar{\varepsilon}^{s,k}z^{l_k^s})\end{aligned} \tag{14}$$

$$(i=1,\cdots,I-1;j=i+1,\cdots,I;k=1,\cdots,K)$$

と表すことができる[3]．ただし，$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s}=(\tilde{\lambda}_1^{l_k^s},\cdots,\tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k^s})$ である．また，$\psi_{ij}^c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s})$ は

$$\psi_{ij}^c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s})=\prod_{m=i,\neq c}^{j-1}\frac{\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}}{\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}-\tilde{\lambda}_c^{l_k^s}} \tag{15}$$

となり，標準ハザード率のみの関数で表される．また，$\pi_{iI}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k})$ に関しては，

$$\pi_{iI}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k}) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z^{l_k^s}|\bar{\varepsilon}^{s,k}) \tag{16}$$

と表すことができる．

(3) 目視点検データとハザード率

施設グループ $k(k=1,\cdots,K)$ に属する施設 l_k^s ($l_k^s = 1,\cdots,L_k^s; s=1,2$) に関して2回の目視点検が実施されたと考える．目視点検が実施されたカレンダー時刻を $(\tau_A^{l_k^s}, \tau_B^{l_k^s})$ と表す．ただし，$\tau_A^{l_k^s}$ は第1回の目視点検時刻であり，$\tau_B^{l_k^s}$ は第2回目の目視点検が実施されたカレンダー時刻である．施設グループ k に含まれる施設 l_k^s の点検サンプルには，第1回目の目視点検から第2回目の目視点検が実施された時刻までの期間長 $\bar{z}^{l_k^s}$ と，これら2回の目視点検で観測された施設の健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k^s})$, $\bar{h}(\tau_B^{l_k^s})$ に関する情報が記載されている．記号「$\bar{\ }$」は，実測値であることを意味している．点検時点における健全度に基づいて，ダミー変数 $\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}$ $(i=1,\cdots,I-1, j=i,\cdots,I; k=1,\cdots,K; l_k^s=1,\cdots,L_k^s; s=1,2)$ を

$$\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\tau_A^{l_k^s}) = i, \bar{h}(\tau_B^{l_k^s}) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{17}$$

と定義する．さらに，ダミー変数ベクトルを $\bar{\boldsymbol{\delta}}^{l_k^s} = (\bar{\delta}_{11}^{l_k^s},\cdots,\bar{\delta}_{I-1,I}^{l_k^s})$，施設の劣化速度に影響を及ぼす施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}^{l_k^s} = (\bar{x}_1^{l_k^s},\cdots,\bar{x}_{M^s}^{l_k^s})$ と表す．ただし，$\bar{x}_{m^s}^{l_k^s}$ $(m^s=1,\cdots,M^s)$ は施設グループ k，施設 l_k^s の点検サンプルの m^s 番目の説明変数に関する期間 $[\tau_A^{l_k^s}, \tau_B^{l_k^s})$ における観測値を表す．また，第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり，恒等的に $x_1^{l_k^s}=1$ である．施設グループ k に属する施設 l_k^s の点検サンプルが有する情報を $\boldsymbol{\xi}^{l_k^s} = (\bar{\boldsymbol{\delta}}^{l_k^s}, \bar{z}^{l_k^s}, \bar{\boldsymbol{x}}^{l_k^s})$ と表す．また，目視点検データ全体を $\boldsymbol{\Xi}$ と表す．

さらに，施設 l_k^s の点検サンプルの期間 $[\tau_A^{l_k^s}, \tau_B^{l_k^s})$ における劣化過程を個別ハザード率 $\lambda_i^{l_k^s} = \tilde{\lambda}_i^{l_k^s}\varepsilon^{s,k}$ $(i=1,\cdots,I-1)$ を用いて表現する．健全度 I はマルコフ連鎖の吸収状態であり，$\pi_{II}=1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_I^{l_k^s}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_I^{l_k^s}=0$ となる．社会基盤施設の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}$ $(i=1,\cdots,I-1; k=1,\cdots,K)$ は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え，標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k^s}$ を特性ベクトル $\boldsymbol{x}^{l_k^s}$ を用いて，

$$\tilde{\lambda}_i^{l_k^s} = \exp(\boldsymbol{x}^{l_k^s}\boldsymbol{\beta}_i^{s\prime}) \tag{18}$$

と表す．ただし，$\boldsymbol{\beta}_i^s = (\beta_{i,1}^s,\cdots,\beta_{i,M^s}^s)$ は未知パラメータ β_{i,m^s}^s $(m^s=1,\cdots,M^s)$ による行ベクトル，記号「$\prime$」は転置操作を表す．また，$x_1^{l_k^s}=1$ より，$\beta_{i,1}^s$ は定数項を表す．

4. 推計手法

(1) コピュラ関数と階層ベイズモデル

本研究では，点検データ1と点検データ2の2種類の混合マルコフ劣化ハザードモデルを取扱い，2つの混合マルコフ劣化ハザードモデルから推計された各施設グループ間の劣化速度の依存性をコピュラ関数を用いて表現する．具体的には，異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ $(s=1,2)$ の事前確率密度関数にコピュラ関数を用いて劣化速度の依存性を評価する．また，コピュラ関数の周辺分布関数としてガンマ分布を仮定する．このガンマ分布は，平均1，分散 $1/\phi^s$ のガンマ分布である．さらに，階層ベイズ推計では，異質性パラメータの分散パラメータ ϕ^s（ハイパーパラメータ）に関しても事前分布を設定する．事前分布を階層化したそれらのモデルは階層ベイズモデルと総称され，主にマーケティング分析などの分野で研究が進められている[8)]．本研究でも混合マルコフ劣化ハザードモデルを階層ベイズモデルを用いて推計することとする．

一般的なベイズ推計手法では，パラメータの事前分布と，観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて，パラメータの事後分布を推計する．本研究では，目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^s$ から混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計する際の事前確率密度関数に式(10)の条件付き確率密度関数を用いる．いま，尤度関数を $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)$ と表す．$\boldsymbol{\theta}^s = (\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^s, a)$ はパラメータベクトルを表す．a はコピュラ関数のパラメータである．ここで，$\boldsymbol{\theta}^s$ が確率変数で，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s)$ に従うと仮定する．目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^s$ が与件であるときに，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}^s$ の同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)$ はベイズの定理より，

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s) \tag{19}$$

と表現できる．いま，目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^{\bar{s}}$ から推計された混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\bar{s}}$ が与件であるとする．このとき，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s)$ を，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s) &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^s, a) \\ &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}^s)\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon}^s|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\bar{s}}, \phi^s, \bar{\phi}^{\bar{s}}, a)\boldsymbol{\pi}(\phi)\boldsymbol{\pi}(a) \\ &= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=1}^{K}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_i^s)\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,k}|\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k}, \phi^s, \bar{\phi}^{\bar{s}}, a)\boldsymbol{\pi}(\phi^s)\boldsymbol{\pi}(a)\end{aligned} \tag{20}$$

と展開する．ここで，異質性パラメータ $\varepsilon^{s,k}$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,k}|\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k}, \phi^s, \bar{\phi}^{\bar{s}}, a)$ として，式(10)で示した分布を用いることにより，目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^s$ の異質性パラメータ推計の際に目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^{\bar{s}}$ の持つ情報を事前情報として利用することが可能となる．混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータ ε^s の

確率分布とその確率分布に含まれるパラメータ ϕ^s の事前分布，コピュラ関数のパラメータ a の事前分布が階層構造になっている．階層ベイズ推計では，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}^s=(\boldsymbol{\beta}^s,\phi^s,\boldsymbol{\varepsilon}^s,a)$ の事前分布を設定し，各パラメータの条件付き事後確率密度関数を算出する．

(2) 事後分布の定式化

いま，パラメータ

$$\boldsymbol{\theta}^s=(\boldsymbol{\beta}_1^s,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{I-1}^s,\phi^s,\varepsilon^{s,1},\cdots,\varepsilon^{s,K},a) \tag{21}$$

を与件とする．このとき，目視点検データ $\boldsymbol{\Xi}^s$ が観測される同時生起確率（尤度）$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)$ は，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)\\
&=\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=i}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{l_k^s=1}^{L_k^s}\left\{\pi_{ij}(\bar{z}^{l_k^s},\bar{\boldsymbol{x}}^{l_k}|\boldsymbol{\beta}^s,\phi^s,\varepsilon^{s,k},a)\right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}}\\
&=\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=i}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{l_k^s=1}^{L_k^s}\\
&\qquad\left\{\sum_{m=i}^{j}\psi_{ij}^m(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s})\exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}\varepsilon^{s,k}\bar{z}^{l_k^s})\right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}}
\end{aligned} \tag{22}$$

と表される．ただし，$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s}=(\tilde{\lambda}_1^{l_k^s},\cdots,\tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k^s})$ である．

また，式 (20) の未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}^s=(\boldsymbol{\beta}^s,\phi^s,\boldsymbol{\varepsilon}^s,a)$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s)$ をそれぞれ以下のように設定する．まず，$\boldsymbol{\beta}_i^s$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_i^s)$ として多次元正規分布を用いる．すなわち，$\boldsymbol{\beta}_i^s\sim\mathcal{N}_{M^s}(\boldsymbol{\mu}_i^s,\boldsymbol{\Sigma}_i^s)$ である．ただし，$\mathcal{N}_{M^s}(\boldsymbol{\mu}_i^s,\boldsymbol{\Sigma}_i^s)$ は期待値ベクトルを $\boldsymbol{\mu}_i^s$，分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}_i^s$ とした M^s 次元正規分布である．$\varepsilon^{s,k}$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,k})$ は分布 (10) としてすでに与えられている．さらに，式 (10) の周辺分布として設定したガンマ分布の制御パラメータ ϕ^s の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\phi^s)$ としてガンマ分布 $h(\phi^s|\alpha_0^s,\gamma_0^s)$ を設定する．すなわち，$\phi^s\sim\mathcal{G}(\alpha_0^s,\gamma_0^s)$ である．また，コピュラ関数のパラメータ a の事前確率密度関数としてガンマ分布 $h(\phi^s|\alpha_0^c,\gamma_0^c)$ を設定する．すなわち，$a\sim\mathcal{G}(\alpha_0^c,\gamma_0^c)$ である．ただし，ガンベル・コピュラに関しては，パラメータに関して $a>1$ という制約条件があるため，$(a-1)\sim\mathcal{G}(\alpha_0^c,\gamma_0^c)$ とする．したがって，クレイトン・コピュラを用いたときの同時事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)$ を具体的に書き表すと，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)\\
&\propto\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^s|\boldsymbol{\Xi}^s)\\
&\quad\cdot\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{k=1}^{K}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_i^s)\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,k}|\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k},\phi^s,\bar{\phi}^{\bar{s}},a)\boldsymbol{\pi}(\phi^s)\boldsymbol{\pi}(a)\\
&=\prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=i}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{l_k^s=1}^{L_k^s}\\
&\quad\left\{\sum_{m=i}^{j}\psi_{ij}^m(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k^s})\exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}\varepsilon^{s,k}\bar{z}^{l_k^s})\right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}}\\
&\quad\cdot\prod_{i=1}^{I-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i^s-\boldsymbol{\mu}_i^s)(\boldsymbol{\Sigma}_i^s)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i^s-\boldsymbol{\mu}_i^s)'\right\}\\
&\quad\cdot\prod_{k=1}^{K}\left\{c(F_s(\varepsilon^{s,k}),F_{\bar{s}}(\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k}))\right.\\
&\quad\left.\frac{(\phi^s)^{\phi^s}}{\Gamma(\phi^s)}(\varepsilon^{s,k})^{\phi^s-1}\exp(-\phi^s\varepsilon^{s,k})\right\}\\
&\quad\cdot\frac{1}{(\gamma_0^s)^{\alpha_0^s}\Gamma(\alpha_0^s)}(\phi^s)^{\alpha_0^s-1}\exp\left(-\frac{\phi^s}{\gamma_0^s}\right)\\
&\quad\cdot\frac{1}{(\gamma_0^c)^{\alpha_0^c}\Gamma(\alpha_0^c)}a^{\alpha_0^c-1}\exp\left(-\frac{a}{\gamma_0^c}\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

のように定式化することができる．

(3) 同時事後確率密度関数の推計

未知パラメータを推計するためには式 (23) で表される同時事後確率密度関数を求める必要がある．しかしながら，上述したように，同時事後確率密度関数を解析的に求めることはもとより，同時事後確率密度関数から直接サンプリングすることも困難となっている．そこで本研究では代表的な MCMC 法の 1 つであるギブスサンプリングの考え方に基づき，各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて数値計算により式 (23) の同時事後確率密度関数を算出する．

はじめに混合マルコフ劣化ハザードモデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を算出する．未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\beta}^s$ から $\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s(e_1=1,\cdots,I-1)$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\beta}^{-s,e_1}$ と表すことにする．また，同様に未知パラメータの部分ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ から $\varepsilon^{s,e_2}(e_2=1,\cdots,K)$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}^{-s,e_2}$ と表す．このとき，式 (23) より，$\boldsymbol{\beta}^{-s,e_1}$，$\phi^s$，$\boldsymbol{\varepsilon}^s$，$a$ を既知とした時の $\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s$ の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s|\boldsymbol{\beta}^{-s,e_1},\phi^s,\boldsymbol{\varepsilon}^s,a,\boldsymbol{\Xi}^s)$ は，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s|\boldsymbol{\beta}^{-s,e_1},\phi,\boldsymbol{\varepsilon},a,\boldsymbol{\Xi})\\
&\propto\prod_{i=1}^{e_1}\prod_{j=e_1}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{l_k^s=1}^{L_k^s}\left\{\tilde{\lambda}_{e_1}^{l_k^s\,\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}-\bar{\delta}_{ie_1}^{l_k^s}}\sum_{m=i}^{j}\prod_{q=i}^{m-1}\frac{1}{\tilde{\lambda}_q^{l_k^s}-\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}}\right.\\
&\quad\left.\prod_{q=m}^{j-1}\frac{1}{\tilde{\lambda}_{q+1}^{l_k^s}-\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}}\exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k^s}\varepsilon^{s,k}\bar{z}^{l_k^s})\right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k^s}}\\
&\quad\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s-\boldsymbol{\mu}_{e_1}^s)(\boldsymbol{\Sigma}_{e_1}^s)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}^s-\boldsymbol{\mu}_{e_1}^s)'\right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

と表せる．ただし，$\bar{\delta}_{ie_1}^{l_k^s}$ は，点検データ s の点検サンプル k の事前健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k^s})=i$ とサンプリングする際の事前健全度 e_1 が一致した場合に 1 を，そうでない場合に 0 をとるダミー変数である．また，$\boldsymbol{\beta}^s$，ϕ^s，$\boldsymbol{\varepsilon}^{-s,e_2}$，

a を既知とした時の ε^{s,e_2} の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,e_2}|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^{-s,e_2}, a, \boldsymbol{\Xi}^s, \bar{\varepsilon}^{\bar{s}}, \bar{\phi}^{\bar{s}})$ は,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^{s,e_2}|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^{-s,e_2}, a, \boldsymbol{\Xi}^s, \bar{\varepsilon}^{\bar{s}}, \bar{\phi}^{\bar{s}}) \\
&\propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^{I} \prod_{l_{e_2}^s=1}^{L_{e_2}^s} \\
&\qquad \Big\{ \sum_{m=i}^{j} \psi_{ij}^m(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_{e_2}^s}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_{e_2}^s} \varepsilon^{s,e_2} \bar{z}^{l_{e_2}^s}) \Big\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_{e_2}^s}} \\
&\cdot c(F_s(\varepsilon^{s,e_2}), F_{\bar{s}}(\bar{\varepsilon}^{\bar{s},e_2})) \\
&\cdot (\varepsilon^{s,e_2})^{\phi^s - 1} \exp(-\phi^s \varepsilon^{s,e_2})
\end{aligned} \tag{25}
$$

と表せる．また，$\boldsymbol{\beta}^s$，$\boldsymbol{\varepsilon}^s$,，$a$ を既知とした時の ϕ^s の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\phi^s|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^{\bar{s}}, \boldsymbol{\varepsilon}^s, a, \boldsymbol{\Xi}^s)$ は,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(\phi^s|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^{\bar{s}}, \boldsymbol{\varepsilon}^s, a, \boldsymbol{\Xi}^s) \\
&\propto \prod_{k=1}^{K} \Big\{ c(F_s(\varepsilon^{s,k}), F_{\bar{s}}(\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k})) \\
&\qquad \frac{(\phi^s)^{\phi^s}}{\Gamma(\phi^s)} (\varepsilon^{s,k})^{\phi^s - 1} \exp(-\phi^s \varepsilon^{s,k}) \Big\} \\
&\cdot (\phi^s)^{\alpha_0^s - 1} \exp\left(-\frac{\phi^s}{\gamma_0^s}\right)
\end{aligned} \tag{26}
$$

と表すことができる．さらに，コピュラ関数のパラメータ a に関しても，$\boldsymbol{\beta}^s$，$\boldsymbol{\varepsilon}^s$，$\phi^s$ を既知としたときの a の条件付き事後確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(a|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^s, \boldsymbol{\Xi}^s, \bar{\varepsilon}^{\bar{s}}, \bar{\phi}^{\bar{s}})$ は,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(a|\boldsymbol{\beta}^s, \phi^s, \boldsymbol{\varepsilon}^s, \boldsymbol{\Xi}^s, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\bar{s}}, \bar{\phi}^{\bar{s}}) \\
&\propto \prod_{k=1}^{K} c(F_s(\varepsilon^{s,k}), F_{\bar{s}}(\bar{\varepsilon}^{\bar{s},k})) \cdot a^{\alpha_0^c - 1} \exp\left(-\frac{a}{\gamma_0^c}\right)
\end{aligned} \tag{27}
$$

と表すことができる．これらの条件付き確率密度関数を用いて式 (23) の同時事後確率密度関数を算出する．ただし，式 (24)〜(27) の条件付き事後確率密度関数から未知パラメータを直接サンプリングすることはできないため，MH 法[9]を用いて事後確率密度関数からの標本を獲得する．

5. おわりに

本研究では，伸縮継手装置の路上点検データから混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計する際，路下点検データの劣化特性をコピュラ関数を介して事前情報として考慮する手法を提案した．本研究で提案する手法は，伸縮継手装置の路上点検データなど，取得サンプル数の限られたデータから劣化過程を推計する際に有用な手法となる．

なお，講演会当日には実際の高速道路伸縮継手装置に対する目視点検データへの適用を通じて，本研究で提案する方法論の有用性を実証的に検証した事例を紹介する．

参考文献

1) 戸坂凡展，吉羽要直 : コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説，日本銀行金融研究所，金融研究，pp.115-162，2005.
2) Nelsen, R. B: An Introduction to Copulas, Springer, 1999.
3) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司 : 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82, 2005.
4) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司 : 劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
5) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大 : 混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計，土木学会論文集 D3，Vol.68，No.4，pp.255-271，2012.
6) 桑野将司，藤原章正，塚井誠人，張峻屹，岩本真由子 : コピュラを用いた自動車保有期間と走行距離の同時決定モデルの開発，土木学会論文集 D，Vol.66，pp.54-63，2010.
7) 森村英典，高橋幸雄 : マルコフ解析，日科技連，1979.
8) 阿部誠，近藤文代 : マーケティングの科学－ POS データの解析－，朝倉書店，2005.
9) 伊庭幸人 : 計算統計学のフロンティアー計算統計 II，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.

(2013．5．2 受付)

ANALYSIS OF CORRELATION OF INSPECTION RESULTS BETWEEN FROM ABOVE AND FROM BELOW

Daijiro MIZUTANI, Kengo OBAMA, Kiyoyuki KAITO and Kiyoshi KOBAYASHI