空間経済システムにおける 経済集積のパターン形成メカニズム

高山 雄貴[1]

[1]正会員　愛媛大学　助教　大学院理工学研究科（〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番）
E-mail: takayama@cee.ehime-u.ac.jp

空間経済学分野では，社会基盤整備などの都市・地域政策の長期的経済効果を予測・評価する際の基盤となりうる，経済活動の空間的集積メカニズムに関する経済理論が膨大に蓄積されてきた．しかし，これらの理論の土木計画学分野への応用を考える場合，モデルの非凸性という解析上の困難に起因した，重要な課題・限界がいくつか残されている．本稿では，これらの空間経済学分野の課題を整理した上で，従来の解析上の困難を解消するために行った著者らの研究を紹介する．最後に今後の研究課題を議論する．

Key Words : *spatial economics, agglomeration, stability, bifurcation*

1.　はじめに

(1)　背景

わが国では，国土面積のわずか 3% の人口集中地区 (Densely Inhabited District: DID) に 66% 以上の人口が集中している (国勢調査, 2005)．個別の都市圏[1]を見ても，**図–1** に示すように，非常に狭い面積に人口・経済活動が集中していることが分かる．さらに，この傾向は世界各国でも見られ，その人口集中は，年々進展していることが確認されている (**表–1**)．では，このような経済活動の空間的集中は，どこで，なぜ起こるのだろうか？ この疑問に対する説明は，古くから様々な分野 (e.g., 地理学，経済学，土木工学，建築学，社会学) において試みられてきた．

経済学分野では，扱う空間スケール毎に，都市経済学，地域経済学，国際貿易理論といった専門分野で，経済活動の空間的集積現象を扱う研究がなされてきた．さらに，1990 年代には，Krugman[3)]の先駆的研究を始めとして構築された新経済地理学 (New Economic Geography: NEG) により，様々な空間スケールにおける集積現象の説明に用いることのできる統一的な分析枠組みが提示されている[2]．最近では，これらの専門分野を含んだ地理的空間における包括的な経済理論・実証研究を目指す経済分野を総称して，空間経済学[3]と呼ばれるようになっている．

この空間経済学分野で研究されている経済活動の空間的集中を説明する経済理論は，社会基盤整備や地域政策の長期的経済的効果を予測・評価する際の基盤となりうるものである．それゆえ，土木計画学分野においても，その研究蓄積が重要な課題とされてきた (e.g., 小林[14)], 上田・松葉[15)])．特に，経済のグローバル化に伴う都市間競争の激化，東京一極集中の進展，都市の郊外化が見られる近年の経済社会状況は，その必要性を一層増大させている．

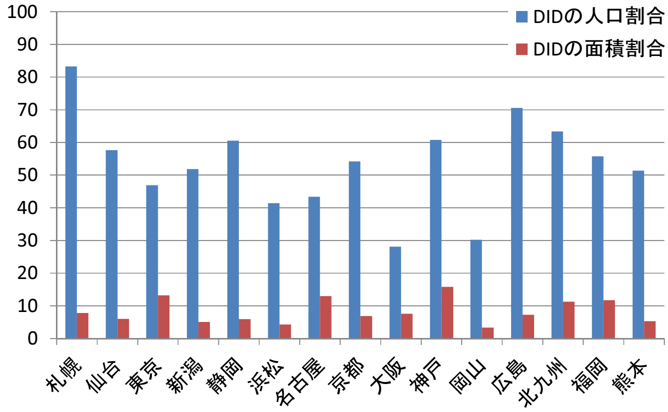
このような問題意識のもとに，土木計画分野では，都市経済学・NEG 分野の枠組みを応用して，社会基盤整備が国土・地域構造に与える長期的な影響を計量化する試みがなされてきた (e.g., 上田・松葉[15)], 小林・奥村[16)], Mun[17)], 奥村ら[18)])．これに並行して，広域的な社会・経済的影響を及ぼす地域政策の評価法に関する研究も蓄積されてきた．その結果，SCGE (Spatial Computable General Equilibrium) モデルや CUE (Computable Urban Economics) モデルなどの計量モデルにより，社会基盤整備のもたらす広域的な経済便益を定量的に評価できるまでになっている[19)]．

しかし，空間経済学分野の理論の計量モデルへの応用は，これまで思うように進んでいない．具体的には，従来の SCGE モデルの殆どが，“集積の経済” の働かない，完全競争市場を想定している．さらに，生産要素 (e.g., 労働) の都市間移動がないとの前提に立った短期的視野の分析に留まっている．CUE モデルは，SCGE モデルとは異なり，人口移動を考慮したモデルの枠組みとなっている[20)]ものの，それらの研究の殆どが，Alonso[21)]型

[1] ここでいう都市圏とは，金本・徳岡[1)]が定義した大都市雇用圏 (Metropolitan Employment Area: MEA) である．

[2] NEG の詳細は，Fujita et al.[4)], Baldwin et al.[5)], Combes et al.[6)], Brakman[7)]等の教科書を参照．

[3] 空間経済学の歴史や包括的なレビューは，例えば，McCann[8)], Fujita and Thisse[9)], Henderson and Thisse[10)], Fujita[11)], 藤田[12)], 佐藤ら[13)]を参照．



図–1 国内主要都市圏の DID の人口・面積割合 (国勢調査, 2005)

表–1 世界の都市化率 (%): United Nations[2)]

	1950 年	1960 年	1970 年	1980 年	1990 年	2000 年	2005 年
World	29.1	32.9	36.0	39.1	43.0	46.6	48.6
Japan	34.9	43.1	53.2	59.6	63.1	65.2	66.0
U.S.A.	64.2	70.0	73.6	73.7	75.3	79.1	80.8
Western Europe	63.8	67.9	71.4	72.7	74.0	75.3	76.1
Brazil	36.2	44.9	55.8	67.4	74.8	81.2	87.6
Russian Federation	44.2	53.8	62.5	69.8	73.4	73.4	72.9
India	17.0	17.9	19.8	23.1	25.5	27.7	28.7
China	13.0	16.0	17.4	19.6	27.4	35.8	40.4
Korea	21.4	27.7	40.7	56.7	73.8	79.6	80.8

の立地均衡理論を応用するのみに留まっている．すなわち，経済活動が空間的に集積する，もしくは集積している状況 (i.e., CBD の数・位置) を先験的に仮定している．したがって，本来明らかにしたい，経済活動の空間的集中が “どこで” 起こるのかを説明することができない．

これらの課題の克服には，既存のモデルに集積の経済を導入することが不可欠である．より具体的には，Starrett[22)]の空間不可能性定理[4]が示唆した，経済活動の空間的集積を表現するために少なくとも一つは採用しなければならない 3 種類の仮定:

仮定 1. 空間は一様ではない[5]

仮定 2. 生産ないし消費において，(技術的な) 外部性[6]が存在している

仮定 3. 市場は不完全競争的である

のうち，仮定 2, 3 を採用した枠組みを構築する必要がある．実際，最近では，これらの仮定により集積の経済を導入した SCGE, CUE モデルに関する研究が国内でも進められつつある[26),27)]．

しかし，集積の経済を含むモデル (以降，集積経済モデル) の一般的特性 (e.g., 均衡解の一意性・安定性，創発する集積パターン) は，次章で示すように，理論的に殆ど解明されていない．その根本的原因は，集積経済モデルの非凸性に起因した解析上の困難にある．より具体的には，集積経済モデルには，複数の均衡解が存在する上，パラメータの変化に対して均衡解の特性 (個数・安定性) が不連続に変化する “均衡解の分岐現象” が発生する．したがって，均衡解の特性を知るためには，一般的には非常に困難な，均衡解の分岐メカニズムの解明が必須となる．本稿では，この理論的困難を解決するために著者らが行った研究を簡潔に紹介し，今後の研究課題を議論する．

[4] “空間不可能性定理” という用語は，Fujita[23)]により初めて用いられたものである．その詳細は，例えば，Fujita and Thisse[9)] 参照．

[5] “空間が一様ではない” という仮定は，選好の立地依存や比較優位 (e.g., 資源や技術の不均等な分布) といった，first nature (Cronon[24)]) が存在する状況を設定することに対応する．

[6] 外部性は，ここで挙げた技術的外部性と (仮定 3 に対応する) 金銭的外部性の 2 つに分類される (Scitovsky[25)])．技術的外部性は市場を介さずに波及する相互作用の効果，金銭的外部性は市場を介して波及する相互作用の効果を表す．

本稿の構成は以下の通りである．まず，第 2 章では，都市経済学・新経済地理学分野で蓄積されてきた，集積の経済を含む理論の課題を指摘する．次に，第 3, 4 章では，従来理論の課題を根本的に解決するために著者らが行った研究を紹介する．第 3 章では，一次元空間・単一種類の立地主体を扱う集積経済モデルの均衡解の分岐メカニズムを解明できる，新たな分析手法を説明する．第 4 章では，その分析手法の簡単な拡張・応用により，二次元空間・複数種類の立地主体を扱うモデルの特性を知ることができることを示す．第 5 章では，本稿の内容をまとめたうえで，今後の課題を述べる．

2. 従来研究と本研究の位置付け

本章では，集積の経済を扱う理論のうち，土木計画学分野で多く取り上げられる，都市内や都市間といった空間スケールを扱う理論 (i.e., 都市経済学, 新経済地理学) のこれまでの成果と課題を整理する．その上で，本稿で説明する著者らの研究内容の特徴や位置づけを示す．

(1) 都市経済学

都市経済学分野で集積の経済を考慮した代表的理論は，Solow and Vickrey[28), Beckmann[29)を先駆とした都心形成メカニズムに関するものである．その理論では，経済行動主体間の市場外での相互作用 (i.e., 空間不可能性定理の仮定 2) により，都心形成現象を説明している．これらの研究では，経済行動主体が，単一種類 (e.g., Beckmann[29), O'Hara[30), Borukhov and Hochman[31), Tabuchi[32), Mossay and Picard[33))，複数種類 (e.g., Ogawa and Fujita[34), Fujita and Ogawa[35), Imai[36), Berliant et al.[37), Lucas and Rossi-Hansberg[38)) である場合のモデルが構築されている．さらに，上記の他に，市場の不完全性 (i.e., 空間不可能性定理の仮定 3) を導入することで都心形成現象を説明した研究も幾つか存在する (e.g., Fujita[39))．そして，その各々の状況において実現する立地 (都心) パターンが明らかにされている[7]．

しかし，以上で述べた従来研究は，均衡解の一意性・安定性が確認されていないという問題を抱えている．具体的には，Mossay and Picard[33)を除く，経済行動主体が単一種類の研究では，均衡解が一意であると仮定し，立地パターンが対称となる場合のみを分析しているに過ぎず，実際に均衡解が一意であるか否かは明らかにされていない．さらに，複数の均衡解の存在が確認されている従来研究 (経済行動主体が単一種類の Mossay and Picard[33)と，複数種類の研究) では，それらの均衡解が安定的であるか否かは，全く議論されていない．集積の経済を含むモデルには一般に複数の安定・不安定均衡解が存在することを考えると，従来研究で示された均衡立地パターンは意味を持たない不安定的な均衡解であり，さらに，それ以外にも非対称な均衡立地パターンが存在する可能性は否定できない．しかし，分析上の困難に起因して，その安定性は全く確認されていない．

さらに，従来研究では，複数の都心が形成される明確なメカニズムが明らかにされていない．近年まで，複数の都心が内生的に創発する可能性 (i.e., 中心市街地が縮小し，郊外に新たな都心が形成される空洞化現象) が示されていたのは，Fujita and Ogawa[35)，Fujita[39)などの異なった種類の経済主体が土地市場で競合する場合のみであった．したがって，都市経済学分野では，「複数都心創発のためには，複数種類の立地主体 (e.g., 消費者と企業) が土地市場で競合する必要がある」と考えられてきたようである．しかしながら，複数種類の立地主体が土地市場で競合すること ("Competition of Multiple types of Agents in Land Markets" (CMA)) は，複数都心創発のための必要条件でも十分条件でもない．CMA が複数都心創発のための十分条件ではないことは，Ogawa and Fujita[34)と Fujita and Ogawa[35)の結果を比較すれば明らかである: 両者ともに CMA 条件下で生じる均衡立地パターンを扱っているが，前者では単一都心パターンが唯一解であり，後者でのみ複数都心パターンが現れる．また，最近，Mossay and Picard[33)により明らかにされたように，単一種類の立地主体しか存在しないモデルであっても複数都心パターンは均衡解となり得る[8]．すなわち，CMA は，複数都心が創発するための必要条件でもない．したがって，複数都心が創発するメカニズムは，これまで不明確なままである．

(2) 新経済地理学

NEG 分野では，Dixit and Stiglitz[48)型の独占的競争 (i.e., 空間不可能性定理の仮定 3) に基づく一般均衡の枠組みにより，経済活動の集積現象を説明する理論が構築されている．この理論は，都市間の輸送費用減少に伴う人口集積現象のメカニズムを説明できるという

[7] ここで挙げたのは，都心形成モデルに関する代表的な研究のみである．これらの他にも，Anas et al.[40), Fujita and Thisse[41), Mori[42), Fujita[11)などの包括的レビューで挙げられているように，Kanemoto[43)，Ota and Fujita[44)，Henderson and Slade[45)，Berliant and Wang[46)などの数多くのモデル・バリエーションが存在する．ただし，これらの研究においても均衡解の安定性が議論されていないなど，本文中で指摘した課題は残されたままとなっている．

[8] Mossay and Picard[33)では，複数都心パターンの安定性が確認されていないことに注意が必要である．実際，本稿で紹介するアプローチを利用した高山・赤松[47)で明らかにされているように，Mossay and Picard の枠組みでは複数都心パターンは安定均衡解とはなりえない．

特徴を持つ．そのため，これまでに膨大なモデル・バリエーションと研究蓄積を生んできた．

しかし，NEG 勃興期の研究を除く大半の研究は，2 都市システムを対象とした解析に終始している．これは，NEG モデルの分析の際に不可欠となる，均衡解の安定性・分岐挙動の解析が非常に困難であることに起因している．実際，2 以上の都市をもつモデルを扱った研究は，その必要性が多く叫ばれてきた[49),50),51),52)]にもかかわらず，非常にわずかにしか存在しない．さらに，その少ない多都市モデルを扱った研究においても，次のような問題・限界が残されている:

- 限定的な数値計算例を提示するのみに留まっている[53),54),55),56),54)]．
- 輸送費用の低下に伴い発生する，労働者が各都市に均等に分散した均衡状態 (分散均衡状態) からの最初の分岐現象しか示すことができない[57),58),59)]．
- 都市間の輸送費用が同一である (i.e., 距離の概念がない) という特殊なケースに分析が限られている[60),61)]．

すなわち，殆どの研究において，多都市 NEG モデルの均衡解の大域的な分岐特性は示されていない．

これまでに多都市 NEG モデルの枠組みで，均衡解の分岐挙動 (集積・分散パターン) の一般的規則性を議論しているのは，Tabuchi and Thisse[62)]と Ikeda et al.[63),64),65),66)]のみである．Tabuchi and Thisse は，Ikeda et al.[64)]とほぼ並行して独立に，輸送費用の低下とともに人口集積の周期倍分岐パターン (i.e., 多段階の分岐により都市数が半減・都市間距離が倍化しながら集積が進展する経路) が存在しうることを示している．さらに，複数種類の産業が存在する場合に階層構造が創発することを数値計算例で示している．しかし，ここで示されている安定性解析は，Tabuchi and Thisse のモデルに特化した機械的な展開がなされているのみであり，その他のモデルに適用できる一般的なものではない．したがって，NEG モデルで創発する集積・分散パターンの一般的規則性までは，明らかにすることができない．一方，Ikeda et al.[63),64),65),66)]は，群論的分岐理論[67),68)]を活用し，1 次元・2 次元空間において Krugman[3)], Forslid and Ottaviano[69)]モデルで創発し得る集積パターンを特定化している．さらに，計算分岐理論[70)]に基づく数値計算法により，その集積パターンの安定性を具体的に確認している．この Ikeda et al. により提示された，群論的分岐理論と計算分岐理論に基づく手法は，幅広い集積経済モデルに共通して適用できる，非常に強力なものである．ただし，均衡解 (集積・分散パターン) の安定性の具体的確認は数値計算に頼らざるを得ないという点に，その手法の限界がある．

(3) 本研究の特徴

本研究の大きな特徴の一つは，集積経済を扱う様々なモデルで創発する空間的集積・分散パターンやその安定性を統一的・解析的に理解するための汎用性の高い分析法を提示している点にある．その分析法は，次の 3 つの鍵概念: A) 空間割引行列，B) 離散フーリエ変換，C) 競技場経済で特徴づけられる．以下では，3 つの概念の意味を追いながら，本研究のアプローチを概観する．

A) の “空間割引行列” は，集積経済モデルで働く重力法則を系統的に表現するための基本的部品である．集積経済モデルでは，移動主体間の相互作用 (e.g., 財の交易，face to face コミュニケーション) により，集積力 (引力)・分散力 (斥力) が生じる．そして，これらの力は，地点間の交通・輸送費用等の影響を受けて減衰しながら，空間的に spillover する．その spillover 効果の距離減衰性 (空間的割引) は，集積経済モデルでは，一般に重力法則により表現され，モデルで創発する立地主体の空間的集積・分散パターンに決定的な影響を与える．したがって，空間割引行列により集積経済モデルで働く重力法則を表現できれば，創発する空間的集積・分散パターンを容易に把握できる．実際，次章で明らかにされるように，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の特性 (固有値)，および，$\boldsymbol{D}$ と対象モデルの効用関数 Jacobi 行列の関係さえ明らかにすれば，モデルで創発しうる空間的な集積・分散パターンを完全に把握できる．

B) の “離散 Fourier 変換 (DFT)” は，モデルで創発する集積・分散パターン解析の強力な道具である．集積・分散パターンの創発可能性を判定するためには，一般に，均衡条件を満たす複数の集積・分散パターンのうち，安定的に実現可能な解を抽出する必要がある．この安定性を判定するためには，均衡解への調整ダイナミクスを定義し，その Jacobi 行列の固有値を知る必要がある．殆どの集積経済モデルでは，この Jacobi 行列の固有値は，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の固有値の簡単な関数となる．したがって，$\boldsymbol{D}$ の固有値さえ得られれば，モデルが本質的特性を，非常に一般的に把握することができる．その固有値解析は，一般には非常に困難であるものの，次に説明する “競技場経済” の条件と DFT を組み合せることにより，極めて単純に行うことができるようになる．

C) の “競技場経済” は，円周上に多数の立地点を均等に並べるという理想化 (単純化) された空間条件である．集積経済モデルの挙動特性は，Starrett[22)]の空間不可能性定理で示唆されるように，モデル自体が持つ本質的特性 (外部性の性質) とモデルの置かれた空間的境界条件 (空間の非一様性) の両者に依存する．実際，モデル自体は同一であっても，境界条件の設定を変えれ

ば，表面上の均衡立地パターンは，一見，全く異なった挙動を示しうる．にも関わらず，集積経済モデルを分析した従来研究では，この 2 つを必ずしも明確に峻別しないまま分析している場合が多い．それに対して，競技場経済は，境界条件の影響を取り除き，モデル自体の持つ本質的特性を純粋な形で見ることができる．したって，競技場経済は，空間的な集積・分散メカニズムを扱った様々なモデルの挙動特性を統一的に比較し，モデル間の関係を理解するための理想的な “Testbed”(モデルの基本特性を試験するための “標準環境”) である．

さらに，競技場経済では，様々な空間経済モデルの分析が著しく容易になる．この条件下では，空間経済モデルの最重要部品である空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ が “巡回行列” となる．その結果，$\boldsymbol{D}$ の固有値は，その行ベクトルの DFT として解析的かつ容易に得られる．しかも，DFT 行列の各行 (固有ベクトル) のパターンは，各都市への集積パターンと 1 対 1 対応している．そのため，各固有値を見るだけで，どの集積パターンが，どのような条件下で卓越するかを，極めて簡単に知ることができる．なお，競技場経済の数学的に本質的な点は，空間的条件の設定が “周期境界” となっていることである．このことから，上記の特性は，1 次元空間に限られるものではなく，本稿の第 4 章で示されるように “周期境界条件” であれば，2 次元空間でも成立する．

本研究のもう一つの特徴は，上述した分析法により，集積経済モデルの一般特性を解析的に明らかにしている点にある．そして，この成果により，本章 (1), (2) 節で挙げた課題を根本的に解決することに成功している．より具体的には，赤松ら[71), Akamatsu et al.[72),73)]では，代表的な NEG モデルである，Pflüger[74)], Forslid and Ottaviano[69)], Helpman[75)]の 2 都市モデルを多都市システムの枠組みに拡張し，その分岐挙動の一般的規則性を調べている．そして，Pflüger, Forslid and Ottaviano によるモデルでは周期倍分岐による集積進展が起こること，Helpman モデルでは分散均衡状態と一極集中しか表現しえないことを明らかにしている．さらに，高山・赤松[47)]では，地代による (i.e., 空間的な spillover 効果のない) 分散力が働く Beckmann[29)]型の標準的な都心形成モデル (SI モデル) と，空間競争による (i.e., 空間的な spillover 効果が働く) 分散力が働く都心形成モデル (SISC モデル) を対比的に分析している．そして，SISC モデルでのみ複数都心パターンが安定均衡状態として創発することを示すことで，立地主体が単一種類の都心形成モデルにおいて，複数都心が創発する本質的要因を明らかにしている．すなわち，立地主体間の市場外での相互作用による集積力が働く都心形成モデルでは，空間的な spillover 効果のある分散力の存在が，複数都心創発の重要な鍵となることを示している．

さらに，高山・赤松[76),77)]では，Christaller[78)], Lösch[79)]の中心地理論で示された，“六角形状の市場圏”，“階層的な産業立地構造[9]” が形成されるメカニズムを明らかにすることに成功している．中心地理論は，経済活動の空間分布の規則性を取り扱った代表的理論である．この理論は，古くからその直観的な説得力が認められる[80)]一方で，ミクロ経済学的基礎の欠如が問題視されてきた[81),11)]．高山・赤松は，ミクロ経済学的基礎を持つ都市経済学・NEG 分野の一次元空間・単一種類の立地主体のモデルを，二次元空間・複数種類の立地主体の枠組みに拡張し，創発する集積・分散パターンの一般特性を解析的に示している．そして，次の点を明らかにしている: 一次元空間で周期倍分岐型の集積進展が起こるモデルでは，二次元空間上で六角形状の市場圏が形成される; 複数種類の立地主体間の非対称な相互作用や移住コストの存在が，産業立地構造を階層化させる．

本稿ではこれらの特徴を持つ研究成果のうち，集積経済モデルの分析法に焦点を当てる．まず，第 3 章では一次元空間・単一種類の立地主体の枠組みを対象とした基本的な分析手法を紹介する．そして，第 4 章では二次元空間・複数種類の立地主体の枠組みに適用可能な分析法を，具体的なモデル分析を通じて説明する．

3. 集積経済モデルの分岐解析手法: 一次元空間・立地主体が単一種類のケース

本章では，一次元空間・立地主体が単一種類のケースを扱う集積経済モデルにおいて，創発する集積・分散パターンの一般的規則性を解析的に示すための手法を紹介する．そのために，(1) 節では標準的な集積経済モデルの概要を説明する．(2) 節では，モデル上で仮定する空間構造 (競技場経済) を示した上で，(3) 節で集積経済モデルの分岐メカニズムの理解の鍵となる “純集積力” の特性を明らかにする．最後に，(4) 節では，Pflüger[82)]を具体例として，分岐挙動の規則性を解析的に明らかにする．

(1) モデル

基本的な集積経済モデルとして，総数 N の単一種類の立地主体 (e.g., 労働者，企業) が K 箇所の地点から立地する場所を選ぶ状況を考える．立地主体は，自らの効用 (または利潤) v_i を最大化する地点 $i \in \{0, 1, \cdots, K-1\}$ を選択する．この各地点の効用は，扱いたい現象やモデル・バリエーションに応じて様々な表現が存在するものの，基本的には “各地点の立地主体の立地者数 n_i” と地

[9] 階層的な産業立地構造とは，規模の大きい都市は規模の小さい都市より多くの産業を有し，かつ，小都市に存在する産業集合が大都市の産業集合の部分集合となる構造である．

点間の相互作用の減衰効果を表す“空間割引項 d_{ij}” により表現できる．例えば，Beckmann 型の標準的な都心形成モデル (SI モデル) や Pflüger の Core-Periphery モデル (Pf モデル) では，各地点の効用関数 $\boldsymbol{v} = [v_i]$ は，立地主体の空間分布 $\boldsymbol{n} \equiv [n_i]$, 空間割引行列 $\boldsymbol{D} = [d_{ij}]$ の関数となる[10]:

$$\text{[SI]} \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{n} - \mu \ln[\boldsymbol{n}], \tag{1}$$

$$\text{[Pf]} \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{n}) = \ln[\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{n}] + \mu \boldsymbol{D}\{\mathrm{diag}[\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{n}]\}^{-1}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1}). \tag{2}$$

ここで，μ はモデル・パラメータであり，上付き添え字 $\top$ は転置を表す．また，$\boldsymbol{1}$ は全ての要素が 1 のベクトル，$\mathrm{diag}[\boldsymbol{a}]$ は対角要素が $\boldsymbol{a}$ の対角行列である．

立地均衡状態は，全ての立地主体が立地変更するインセンティブをもたない状態として定義する．すなわち，次の条件を満足する状態 $\boldsymbol{n}^* = [n_i^*]$ が立地均衡状態である:

$$\begin{cases} n_i^* \{v^* - v_i(\boldsymbol{n}^*)\} = 0, \\ n_i^* \geq 0, \quad v_i(\boldsymbol{n}^*) - \bar{v}^* \geq 0, \end{cases} \tag{3a}$$

$$\sum_j n_j^* = N. \tag{3b}$$

ここで，条件 (3a) は立地主体の立地選択に関する無裁定条件，条件 (3b) は立地主体数の保存則である．

前章でも指摘したように，集積の経済を含むモデルには，一般に均衡状態が複数存在する．したがって，均衡選択のために，均衡解周りの安定性を調べる必要がある[11]．さらに，この安定性は，モデル・パラメータの変化に伴い不連続に切り替わる．この現象は，数学的には分岐現象と呼ばれ，集積経済モデルでは，その分岐現象により多様な集積パターンが創発する．したがって，集積経済モデルで創発する集積パターンの特性を調べるには，均衡解の安定性と分岐挙動を明らかにしなければならない．

この均衡状態の安定性や分岐挙動を調べるには，立地主体の空間分布が均衡状態へ到達するまでの調整ダイナミクスをモデル化する必要がある．ここでは，その調整ダイナミクスとして，数理生態学，進化ゲーム理論などでもよく知られている，replicator dynamics を考える[12]:

$$\dot{n}_i = F_i(\boldsymbol{n}) \equiv n_i \{v_i(\boldsymbol{n}) - \bar{v}(\boldsymbol{n})\}. \tag{4}$$

ここで，$\bar{v}(\boldsymbol{n}) \equiv \sum_j (n_j/N) v_j(\boldsymbol{n})$ は各地点の効用水準の加重平均である．このとき，均衡状態 $\boldsymbol{n}^*$ の安定性は，動的システム理論で良く知られているように，調整ダイナミクスの右辺 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*) = [F_i(\boldsymbol{n}^*)]$ の Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*) = [\partial F_i(\boldsymbol{n}^*)/\partial n_j]$ の固有値により調べることができる[13]．より具体的には，$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*)$ の固有値の実部が全て負であれば安定であり，そうでなければ不安定である．そして，この固有値の符号 (安定性) が切り替わる際に分岐現象が発生し，符号変化した固有値に対応した固有ベクトル方向に新たな均衡解が創発する．

この $\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*)$ の固有値 g_k・固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ の具体的な解析は，一般的には非常に複雑で，数値計算に頼らない限りほぼ不可能である．そのため，従来の都市経済学分野では，均衡解の安定性が全く確認されておらず，NEG 分野では 2 都市モデルの解析に終始している．本稿では，(2) 節で定義する，円周上に地点が均等に並ぶ空間の下では，その解析が著しく容易になることを説明する．この場合，$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*)$ の固有値 g_k・固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ は離散 Fourier 変換により容易に得られ，さらに g_k は空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の固有値の簡単な関数で表されることが，(3) 節で明らかにされる．そして，(4) 節において，Pf モデルを例に，得られた固有値・固有ベクトルを用いて，モデル・パラメータの変化に伴い創発する集積・分散パターンの進展過程が示される．

(2) 空間の設定: 競技場経済

円周上に番号 $i = 0, 1, \cdots, K-1$ の順に K 箇所の地点を均等に配置する (**図–2**)．隣接している地点間の距離を 1 とし，隣接していない地点 i, j 間の距離は最短経路距離 $m(i,j)$:

$$m(i,j) = \min\{|i-j|, K - |i-j|\} \tag{5}$$

で定義する．また，空間割引項 d_{ij} は地点間距離に応じて，次のように表されると仮定する:

$$d_{ij} \equiv r^{m(i,j)}. \tag{6}$$

ここで，r は隣接する地点間の輸送の自由度を表すパラメータ (e.g., 値が大きいほど交通・輸送費用が小さいことを表すパラメータ) である．

このような空間構造は，新経済地理学分野などで “競技場経済” と呼ばれている．この空間構造は，全ての地点が均質になるという特徴がある．それゆえ，競技場経済の下では，空間不可能性定理の仮定 1 (i.e., 空間の非一様性) の影響が完全に排除される．その結果，様々な集積経済モデルが持つ特性 (e.g., 集積の経済・不経済の空間的 spillover 効果とその距離減衰性) が創発する集積・分散パターンに与える影響を，直接的にとらえることができる．

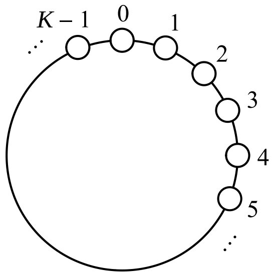
---

[10] ここでは分析手法の理解を優先するために，効用関数のパラメータを実際のモデルより簡略化して表現している．ただし，モデルの本質的性質は全く変化しない．

[11] 新経済地理学分野では，集積経済モデルの均衡解の局所安定性を調べた研究の他に，大域的安定性を調べた研究も存在する．その内容・結果は，例えば，Baldwin[83]), Ottaviano[84]), 織田澤・赤松[85]), Oyama[86),61)] などを参照．

[12] この他のダイナミクスであっても，n_i に関して微分可能であれば，以降で示すアプローチを適用することができる．その具体的な内容は，例えば，perturbed best response dynamics を採用した赤松ら[71])，Akamatsu et al.[72)] 参照．

[13] 動的システム理論に関する詳しい内容は，例えば，Hirsch and Smale[87]), Luenberger[88]), Hale and Koçak[89)] 参照．



図–2 競技場経済

さらに，競技場経済の下では，空間割引行列 $\boldsymbol{D} \equiv [d_{ij}]$ は巡回行列[14]となる．この巡回行列は，その固有値・固有ベクトルを離散 Fourier 変換により解析的に，かつ容易に得ることができることが知られている．具体的には，$\boldsymbol{D}$ は離散 Fourier 変換行列:

$$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{K-1}]^\top, \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{z}_k = [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \cdots, \omega^{(K-1)k}]^\top, \tag{7b}$$

$$\omega \equiv \exp[\,\mathrm{i}(2\pi/K)] \qquad (\text{i.e. } \omega^K = 1), \tag{7c}$$

による相似変換を施すことで対角化される

$$\boldsymbol{Z}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{\lambda}]. \tag{8}$$

ここで，$\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$，$\boldsymbol{Z}^*$ は $\boldsymbol{Z}$ の共役転置行列 ($\boldsymbol{Z}$ の逆行列) である．また，固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ は，行列 $\boldsymbol{D}$ の第 1 行ベクトル $\boldsymbol{d}_0$ の離散 Fourier 変換によって，容易に得ることができる:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{d}_0^\top. \tag{9}$$

さらに，式 (8) から明らかなように，第 k 固有ベクトルは，離散 Fourier 変換行列 $\boldsymbol{Z}$ の第 k 行ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ により与えられる．

(3) 純集積力

集積経済モデル均衡解の安定性や分岐現象の有無は，調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ の固有値 $\boldsymbol{g}$ によって判定できる．以下では，Pf モデルを例として，この $\boldsymbol{g}$ が空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の固有値の簡単な関数として得られることを示そう．ここでは，集積経済モデルが持つ本質的特性を調べるために，立地主体が円周上の各地点に $n = N/K$ ずつ均等に分散した分布 $\bar{\boldsymbol{n}} = n\boldsymbol{1}$ (i.e., 全ての地点の条件が均質となる状況) を考える．

このとき，調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})$ が巡回行列となることを具体的に確認する．立地主体の空間分布が $\bar{\boldsymbol{n}}$ である場合，Pf モデルの $\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})$ は次のように表すことができる:

$$\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}}) = n\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{K}\boldsymbol{E}\right)\nabla\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}}) - \frac{\bar{v}(\bar{\boldsymbol{n}})}{K}\boldsymbol{E}, \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}}) = \bar{v}(\bar{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{1}, \tag{10b}$$

$$\nabla\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}}) = n^{-1}\left[b(\boldsymbol{D}/d) - a(\boldsymbol{D}/d)^2\right]. \tag{10c}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，$\boldsymbol{E}$ は全ての要素が 1 の行列，d は $\boldsymbol{D}$ の行和である．また，$a \equiv 1 + n^{-1}, b \equiv 1 + \mu$. この効用関数の Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}})$ の式 (10c) 右辺に現れる行列 $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{D}^2$ は巡回行列であるから，この行列は巡回行列である．さらに，$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$ も巡回行列であるため，それらの和・積で表される，調整ダイナミクスの Jacobi 行列も巡回行列であることがわかる．

Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})$ の固有値 $\boldsymbol{g}$ は，$\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{h}})$ が巡回行列であるため，離散 Fourier 変換により，容易にその固有値・固有ベクトルを得ることができる．具体的には，その固有値 $\boldsymbol{g}$ は，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ を行和 d で基準化した行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値 f_k の簡単な二次関数となる:

$$g_k = \begin{cases} -\bar{v}(\bar{\boldsymbol{n}}) < 0 & k = 0, \\ bf_k - a(f_k)^2 & k = 1, 2, \cdots, K-1, \end{cases} \tag{11a}$$

$$f_k \equiv \lambda_k/d. \tag{11b}$$

また，第 k 固有ベクトルは，離散 Fourier 変換行列の第 k 行ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ で与えられる．

調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値 g_k は，分散均衡状態から第 k 集積パターン (第 k 固有ベクトル) $\boldsymbol{z}_k$ 方向へ導く “純集積力 (net agglomeration force)” を表している．ここで，純集積力とは，集積状態で発生する “集積効果” から “分散効果” を差し引いた効果である．この意味は，間接効用関数の Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}})$ の第 k 固有値 e_k が表す意味を確認すると理解しやすい．この $\nabla\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{n}})$ の第 k 固有値 e_k は，その定義から次のように表される:

$$e_k z_{ki} = \sum_j \frac{\partial v_i(\bar{\boldsymbol{n}})}{\partial h_j} z_{kj}. \tag{12}$$

上式から明らかなように，e_k は分散均衡状態 $\bar{\boldsymbol{n}}$ から立地パターンが固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k = [z_{ki}]$ 方向に変化した場合に，移動した立地主体が享受する効用の増分を表している．したがって，e_k の定数倍で表される $g_k(= ne_k)$ が正であれば立地主体は $\boldsymbol{z}_k$ 方向に集積し，負であれば立地主体は集積せず，分散状態 $\bar{\boldsymbol{n}}$ が安定的となる．

ここで注意すべきは，集積効果は f_k の 1 次関数であるのに対して，分散効果は f_k の二次関数となっている点である．この相違により，2 つの力は，f_k の変化に対して大きく異なる反応を示す．さらに，f_k は，空間割引項のパラメータ (e.g., 交通・輸送費用の大きさを表すパラメータ) に応じて，集積パターン $\boldsymbol{z}_k$ ごとに異なった値をとる．そのため，各集積パターンの純集積力と分散状態の安定性は，パラメータのレベルに応じ

[14] 巡回行列とは，第 m 行が第 $m-1$ 行の要素の並びを右側に巡回的に 1 つずらした形となる行列である．その特性の詳細は，例えば，Davis[90]), Horn and Johnson[91]), 伊理[92]), Gray[93])を参照．

て，複雑に変化 (i.e. 均衡解が分岐) する．そこで，次節では，本節で得られた純集積力を用いて，パラメータが変化した場合に起こる均衡解の分岐挙動を明らかにしてゆく．

(4) 集積・分散パターンの進展過程

集積経済モデルで創発する集積・分散パターンの進展過程を，これまでに得られた純集積力を用いて明らかにする．本節では，その方法・手順を分かりやすく示すために地点数が $K=4$ の Pf モデルを解析する．

a) 解析の準備: 空間割引行列の固有値・固有ベクトル

4 地点モデルの空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ を行和で基準化した行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値 $\boldsymbol{f}$ は，以下の通りとなる:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{Z}\boldsymbol{d}_0^\top/d \\ &= \frac{1}{d}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i}\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ r\\ r^2\\ r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ c(r)\\ c(r)^2\\ c(r)\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{13a}$$

$$c(r) \equiv \frac{1-r}{1+r} < 1. \tag{13b}$$

また，第 k 固有ベクトルは，離散 Fourier 変換行列 $\boldsymbol{Z}$ の第 k 行ベクトルである．

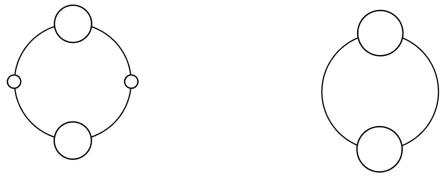
この固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ は，前節で示したように，均衡解の分岐により創発する立地主体の集積パターン (均衡解) を表現している．その具体的な集積パターンは，その要素の配列パターン (i.e. 1 が現れる周期) によって確認できる．例えば，2 要素毎に 1 と -1 が交互に現れる $\boldsymbol{z}_2$ は，一つ飛びの 2 地点に集積するパターンを表している (**図–3-c**); 同様に，$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_3=[1,0,-1,0]^\top$ は 1 地点に立地主体が集中するパターン (**図–3-b**)，全要素が 1 の $\boldsymbol{z}_0$ は，均等に分散した状態 (**図–3-a**) に対応する．

b) 集積・分散パターンの進展過程の解析

まず，分散均衡状態 $\bar{\boldsymbol{n}}$ が唯一の均衡状態となる，r が十分小さい (e.g., 交通・輸送費用が十分大きい) 状況を考える．そして，この状態から r を増加 (交通・輸送費用を減少) させた場合に発生する分岐挙動を調べよう．均衡解の分岐は，純集積力 g_k $(k=1,2,3)$ の符号が変化する (i.e., 均衡解の安定性が変化する) 際に発生するため，$g_k=0$ となる f_k:

$$f_+^* = \frac{b}{a} > 0, \quad f_-^* = 0 \tag{14}$$

は，分岐が発生する f_k の臨界値を意味している．そして，この臨界値 (14) と f_k の関係から，分散均衡状態の安定性が確認できる．第 (1) 節で示したように，均衡状態は，全ての k について純集積力が負 $(g_k<0\ \forall k)$ であれば安定，そうでなければ $(g_k>0\ \exists k)$ 不安定である．



図–4-a $\boldsymbol{h}=\bar{\boldsymbol{h}}+\delta\boldsymbol{z}_2$ **図–4-b** 2 極集中パターン

図–4 分散均衡状態からの分岐により創発する集積パターン

したがって，分散均衡状態の安定性は，以下の 2 つの状態毎に決定される．

$$\begin{aligned}&\text{Case a)}\ f_k > f_+^* \quad \forall k && \Leftrightarrow \quad g_k<0 \quad \forall k\\ &\text{Case b)}\ f_-^* < f_k \le f_+^* \quad \exists k && \Leftrightarrow \quad g_k>0 \quad \exists k\end{aligned}$$

すなわち，分散均衡状態は，Case a) において安定，b) では不安定となり，何らかの集積パターンが創発する．ここで，$f_k\in(0,1]$ であることから，臨界値 $f_-^*=0$ は分岐の発生に影響しない．そこで，以降では，2 種類の分岐臨界値のうち，f_+^* のみについて分析する．

パラメータ r を増加させた場合に生じる均衡解の分岐の特性を，f_k の分岐臨界値 (14) を利用することで明らかにする．そのために，まず，固有値 $f_k(\cdot)$ を r の関数と考え，その逆関数を $r_k(\cdot)$ と書く:

$$r_+^* = r_k(f_+^*) \ \Leftrightarrow\ f_+^* = f_k(r^*). \tag{15}$$

ここで，$f_k(\cdot)$ $(k=1,2,3)$ は r の単調減少関数であるから，その逆関数 $r_k(\cdot)$ も f_k の単調減少関数である．

初期状態では，r が十分小さく，$r<r_k(f_+^*)\ \forall k\neq 0$ が成立しているとしよう．逆関数 (15) の定義から，この条件は，Case a) の条件と等価であるため，分散状態が安定的である．r が徐々に増加 (輸送費用が低下) すると，ある k^* に対して，$r\ge r_{k^*}(f_+^*)$ が成立する．この条件は，Case b) と同じ条件を表現しているため，分散パターンが不安定化することがわかる．ここで，最初に $r\ge r_{k^*}(f_+^*)$ を満たす k^* は，

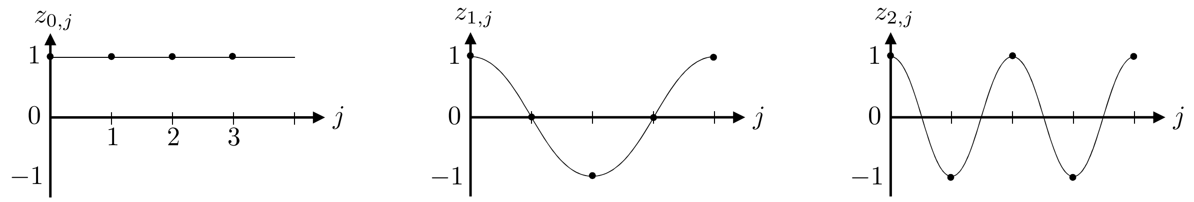
$$k^* = \arg.\min_k\{f_k(r)\} = 2 \tag{16}$$

である．従って，r が臨界値:

$$r_+^* \equiv \max_k\{r_k(f_+^*)\} = r_2(f_+^*) = \frac{1-\sqrt{f_+^*}}{1+\sqrt{f_+^*}} \tag{17}$$

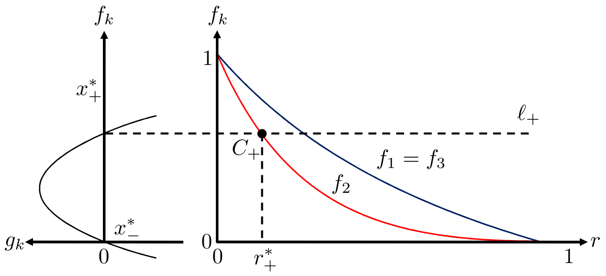
となったときに $\boldsymbol{z}_2$ に対応した集積パターン $\boldsymbol{h}=\bar{\boldsymbol{h}}+\delta\boldsymbol{z}_2$ (**図–4-a**) が創発する．r が r_+^* からさらに増加すると，δ が急激に増加し，**図–4-b** に示す 2 極集中パターン $\bar{\boldsymbol{n}}_{(2)}=[2n,0,2n,0]^\top$ となる．

なお，以上で示した分岐臨界値を得るための手順は，**図–5** によっても説明できる．r を徐々に上げてゆく場合，分散状態から集積状態への分岐は，ある r に対応した $\boldsymbol{f}$ のうちいずれかの固有値が最初に f_+^* 以下の値をとる点で発生する．すなわち，臨界値 f_+^* に対応した水平な直線 l_+ と f_2 の交点 C_+ で発生する．これは，直線 l_+ 上で r が最大値をとる固有値であるから，逆関数

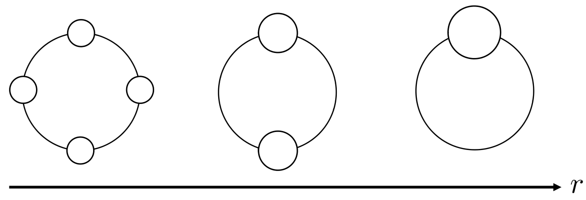


図–3-a $\boldsymbol{z}_0 = [1,1,1,1]^\top$ **図–3-b** $\boldsymbol{z}_1 = [1,0,-1,0]^\top$ **図–3-c** $\boldsymbol{z}_2 = [1,-1,1,-1]^\top$

図–3 固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ の配列パターン



図–5 g_k と r の関係



図–6 周期倍分岐型の集積進展過程 ($K=4$)

$r_k(\cdot)$ を用いて r の臨界値を表現すれば，式 (17) のように書ける．

この 2 極集中パターン $\bar{\boldsymbol{n}}_{(2)}$ から r をさらに増加させると，さらなる分岐が発生する．このとき，どのようなパターンへ分岐するかを具体的に知るためには，この集積状態における調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}}_{(2)})$ の固有値･固有ベクトルを求める必要がある．しかし，多くの場合，その具体的な計算をすることなく，どのような分岐が起こるかを容易に予想できる．ここで，“2 極集中” 状態 (**図–4-b**) は，2 箇所の地点から成る空間システムに立地主体が均等に分布した状態とほぼ同じ[15]とみなせることに注意しよう．これは，4 地点の空間システムにおける本節の議論と全く同様の方法で，2 極集中状態で最初に生じる分岐を把握できることを意味している．より具体的には，2 地点の空間システムにおける空間割引行列の最小固有値を持つ固有ベクトル方向への分岐が最初に発生する．そして，立地主体が 1 箇所にのみ立地する 1 極集中パターンとなる．従って，Pf モデルでは，r の増加に伴い，“空間的周期倍分岐” が発生すると結論できる．すなわち，2 極集中 → 1 極集中と立地主体が立地する地点数が半減しながら集積が進行することがわかる (**図–6**)．

本章で解析対象とした Pf モデルに限らず，空間的な経済集積現象を扱った多くの集積経済モデルは，均衡解の分岐現象をともなう．しかし，従来研究では，その分岐 (空間的な集積・分散パターンの創発) 特性は，標準的な解析手法の欠如から，十分には理解されていない．本章で紹介したアプローチは，立地主体の種類が単一であり，間接効用関数の Jacobi 行列が空間割引行列と立地主体の空間分布により表現される Pf モデル以外の集積経済モデル[16]に対して，そのまま応用できる．その具体例は，新経済地理学分野の Forslid and Ottaviano[69)] と Helpman[75)] のモデルの特性を調べた Akamatsu and Takayama[73)]，都市経済学分野の Beckmann[29)] 型 Social Interaction モデルの特性を調べた高山・赤松[47)] である．ただし，このアプローチは，二次元空間や複数種類の立地主体を考えた集積経済モデルには直接適用できない．そこで，次章では，本章で説明した分析手法を拡張することで，その課題を解決した研究[76),77)] を紹介する．

4. 分岐解析手法の拡張: 二次元空間・複数種類の立地主体

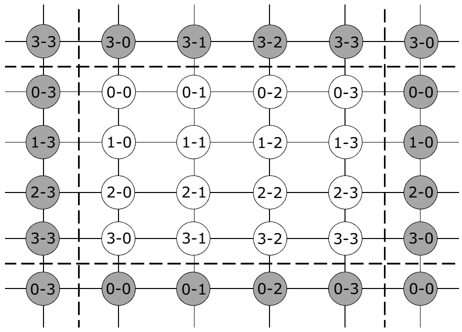
本節では，前章で示した集積経済モデルの分析手法の簡単な応用･拡張により，二次元空間や立地主体が複数種類存在するモデルの分岐挙動が解析可能となることを示す．そして，従来困難とされてきた，中心地理論[78),79)] と空間経済学の理論との対応が，直接的に確認可能となることを示す．

(1) 二次元空間モデルに適用可能な分析手法への拡張

本節では，高山・赤松[76)] により提示された，二次元空間上の集積・分散パターンを解析する手法を説明する．その具体的な方法を明かににするために，本節で

[15] この議論では，立地主体がいない地点の影響を完全に無視していることに注意が必要である．実際，ここで扱っている Pf モデルでは，その影響を完全に無視できない．この点を考慮した厳密な証明については，紙面の制約もあるため，Akamatsu et al.[72)] 参照．また，地点数 K によっては，集積地点数の半減が不可能な場合もあり，一般には，周期倍分岐過程が崩れた複雑な分岐経路もある．その例については，池田ら[63)], Ikeda et al.[64)] を参照．

[16] 都市や立地点間の距離に依存した集積パターンが創発する集積経済モデルの多くは，この条件を満足する．



図–7 長方格子 4×4 地点の周期構造

は，前章と同じ Pf モデルを解析する．ここで注意が必要なのは，前章との違いはモデルの空間構造のみであり，その他の枠組みが全く同じであるということである．すなわち，純集積力 $g_k(f_k)$ の関数形 (11a) は，前章と全く同一となり，空間割引行列の性質のみが異なる．そこで，以降では，二次元空間での空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の特性を調べたのち，純集積力 (11a) を用いて創発する集積パターンの進展過程を示す.

a) 空間構造の設定: 長方形格子 4×4 地点

二次元平面を長方形で分割し，その各頂点上に 4×4 の地点が存在する**図–7** に示すような空間構造を考える．その i 行 j 列に位置する地点を地点 i-j と表記する．各地点の非対称性を排除するために，二次元空間の境界条件として周期境界条件を使用する．この仮定は，広大に広がる空間の一部を切り取った状況を近似していると考えることができる．

前章までに定義したベクトルは，$4i+j$ 番目の要素が地点 i-j に関する要素となるように並べる．より具体的には，ベクトルの要素は，順に地点 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 1-0, $\cdots$,3-3 の変数を表す.

この空間経済システムにおける，2 地点 i-$j, \hat{i}$-$\hat{j}$ 間の距離 $c(i\text{-}j, \hat{i}\text{-}\hat{j})$ は，マンハッタン距離で定義する．具体的には，左右に隣接する地点間の距離を 1，上下に隣接する地点間の距離を κ とし，次のように表す:

$$c(i\text{-}j, \hat{i}\text{-}\hat{j}) \equiv \kappa m(i, \hat{i}) + m(j, \hat{j}), \tag{18a}$$

$$m(i, \hat{i}) \equiv \min(|i - \hat{i}|, 4 - |i - \hat{i}|). \tag{18b}$$

このとき，Pf モデルの地点間の輸送・交通に関する条件を表す空間割引項 $d_{i\text{-}j,\hat{i}\text{-}\hat{j}}$ は，

$$d_{i\text{-}j,\hat{i}\text{-}\hat{j}} = r^{c(i\text{-}j,\hat{i}\text{-}\hat{j})} \tag{19}$$

と表される．この $d_{i\text{-}j,\hat{i}\text{-}\hat{j}}$ の定義から，空間割引行列は，

$$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_{[v]} \otimes \boldsymbol{D}_{[h]} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} & r_v^2\boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} \\ \hdashline r_v\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} & r_v^2\boldsymbol{D} \\ \hdashline r_v^2\boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} \\ \hdashline r_v\boldsymbol{D} & r_v^2\boldsymbol{D} & r_v\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D} \end{array}\right], \tag{20a}$$

$$\boldsymbol{D}_{[h]} \equiv \mathrm{circ}[1, r_v, r_v^2, r_v], \tag{20b}$$

$$\boldsymbol{D}_{[h]} \equiv \mathrm{circ}[1, r, r^2, r]. \tag{20c}$$

で与えられる．ここで，$\otimes$ はクロネッカー積，$\mathrm{circ}[1, r]$ は第一行が $[1, r]$ の巡回行列を表し，$r_v \equiv r^\kappa$ である.

この空間割引行列 (20) は，その各ブロックの部分行列が巡回行列の順に並び (i.e., block circulant)，かつ，そのブロック行列自体が巡回行列 (i.e., circulant blocks) となる．このような性質を持つ行列は，Block Circulant with Circulant Blocks(以降，BCCB) と呼ばれ，二次元離散 Fourier 変換行列 $\hat{\boldsymbol{Z}}$

$$\hat{\boldsymbol{Z}} \equiv \boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z} \tag{21}$$

による相似変換を施すことで対角化できることが知られている (Davis[90])．ここで，$\boldsymbol{Z}$ は，$K = 4$ とした場合の式 (7) で表される離散 Fourier 変換行列である.

本稿で考える，長方形格子の 4×4 地点モデルの空間割引行列 $\boldsymbol{D}/d$ の第 $4k + l$ 固有値 f_{4k+l} は，二次元離散 Fourier 変換により，次の通り与えられる:

$$f_{4k+l} = f_{[v],k} f_{[h],l}. \tag{22}$$

ここで，$f_{[v],k}, f_{[h],k}$ は，各々，$\boldsymbol{D}_{[v]}, \boldsymbol{D}_{[h]}$ を行和で正規化した行列の第 k 固有値である．これらの固有値 $\boldsymbol{f}_{[v]}, \boldsymbol{f}_{[h]}$ は，前章と同じ方法により，次のように与えられる:

$$\boldsymbol{f}_{[v]} = [1, c(r_v), c(r_v)^2, c(r_v)]^\top, \tag{23}$$

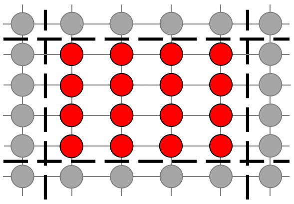
$$\boldsymbol{f}_{[h]} = [1, c(r), c(r)^2, c(r)]^\top. \tag{24}$$

また，第 $4k + l$ 固有ベクトル $(k, l = 0, 1, 2, 3)$ は，二次元離散 Fourier 変換行列の第 $4k + l$ 行ベクトル $\boldsymbol{z}_{4k+l}$ によって与えられる．この固有ベクトル $\boldsymbol{z}_{4k+l}$ によって表現される，均衡解の分岐により創発する集積パターンは，**図–8** で示す，12 通りに分類できる.

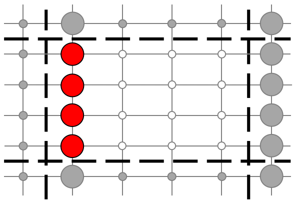
b) 集積・分散パターンの進展過程の解析

次に，二次元空間上で創発する集積・分散パターンの進展過程を調べる．まず，各地点に立地主体が $n \equiv n/16$ ずつ均等に分散した状態 $\bar{\boldsymbol{n}}$ (分散均衡状態) を初期の状態とする.

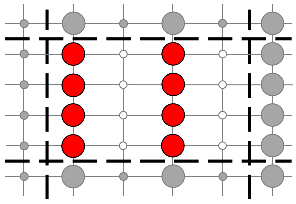
前章で示した解析より，このとき，r の増加 (交通・輸送費用の減少) に伴い，均衡解が分岐する f_k の臨界値は，式 (14) で与えられる．そして，$f_{4k+l} \leq f_+^*$ となる k, l が存在する場合，分散均衡状態が不安定的となり，その分岐方向は $\boldsymbol{z}_{4k+l}$ で与えられる．最初に $f_{4k+l} \leq f_+^*$ が成立する k^*, l^* は，明らかに f_{4k+l} を最小化する k, l



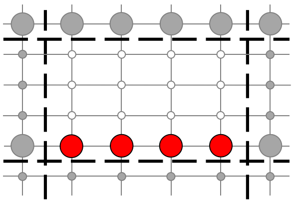
図–8-a 第 0 固有ベクトル



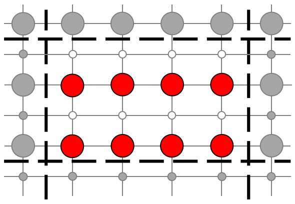
図–8-b 第 1, 3 固有ベクトル



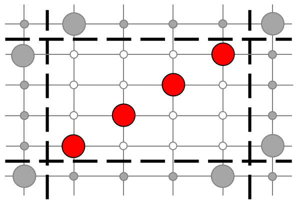
図–8-c 第 2 固有ベクトル



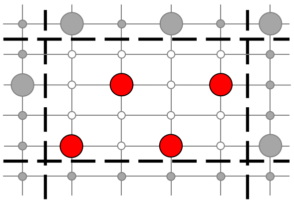
図–8-d 第 4, 12 固有ベクトル



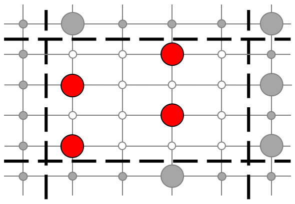
図–8-e 第 8 固有ベクトル



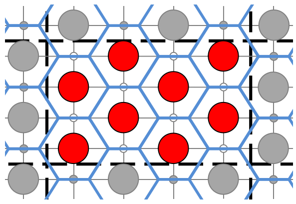
図–8-f 第 5, 7, 13, 15 固有ベクトル



図–8-g 第 6, 14 固有ベクトル

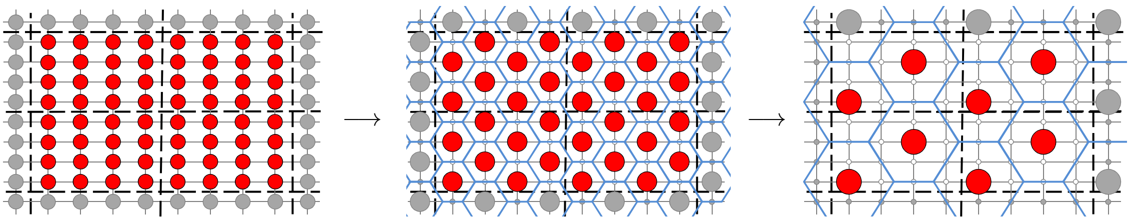


図–8-h 第 9, 11 固有ベクトル



図–8-i 第 10 固有ベクトル

図–8 二次元空間での固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ の配列パターン



図–9 r の増加に伴う集積パターンの進展過程

であるため，

$$4k^* + l^* = \arg\min_{k,l} f_{4k+l} = 10. \tag{25}$$

したがって，r が条件 $f_{10}(r_+^*) = f_+^*$ を満たす臨界値 r_+^* に達した時，第 10 固有ベクトルに対応した集積パターン (**図–8-i**) が創発する．

長方形格子において第 10 固有ベクトルが表す集積パターンは，**図–8-i** で示すように，立地主体が集積した地点をボロノイ分割すると，六角形状になる．このパターンは，中心地理論[78),79)]で提示されている，中心地の市場圏が六角形状となる集積パターンと対応している．したがって，二次元空間 Pf モデルでは，中心地理論と整合的な集積パターンが創発することがわかる．

図–8-i で表される集積パターンが創発したのち，さらに r が増加 (交通・輸送費用が減少) する場合に創発する集積パターンの進展過程は，上記の解析手順と殆ど同じ方法で解析できる (その解析の詳細は，高山・赤松[76)]参照)．その結果，得られる集積パターンの進展過程は，**図–9** に示すとおりである．この結果から明らかなように，二次元空間における Pf モデルは，r の増加に伴い，六角形状の市場圏を維持しながら，徐々に集積が進展していく．

(2) 複数種類の移動主体が存在するモデルに適用可能な分析手法への拡張

本節では，複数種類の立地主体が存在する集積経済モデル[77)]で創発する集積パターンを解析する手法を説明する．そのために，まず最初に高山・赤松[77)]モデルの概要を説明した上で，前節と同様，前章で示した分析手法の鍵概念 (空間割引行列，離散 Fourier 変換，競技場経済) の応用により，モデルの特性を容易に明らかにすることができることを示す．

a) モデル

本節で扱うモデルでは，2 種類の経済行動主体 (e.g., 労働者・企業) が存在する，$K = 4$ の競技場経済システムを考える．その各々の種類の主体を，主体 $0, 1$ と

呼ぼう．主体 $a \in \{0,1\}$ は，自らの効用 (または利潤) $v_i^{(a)}$ を最大化する地点 $i \in \{0,1,2,3\}$ に立地する．その効用関数 $\boldsymbol{v}^{(a)} = [v_i^{(a)}]$ は，前章と同様，主体 0, 1 の立地分布 $\boldsymbol{n}^{(0)} = [n_i^{(0)}], \boldsymbol{n}^{(1)} = [n_i^{(1)}]$ と空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ により表現できる[17]:

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = \boldsymbol{D}^\top\{\mathrm{diag}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}^{(0)}]\}\boldsymbol{1} + \mu^{(0)}\{\ln[\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}^{(0)}] + \ln[\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}^{(1)}]\}, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{D}^\top\{\mathrm{diag}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}^{(1)}]\}\boldsymbol{1} + \mu^{(1)}\ln[\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}^{(1)}]. \tag{26b}$$

ここで，$\mu^{(a)}$ $(a = 0, 1)$ はモデル・パラメータである．

この効用関数 (26) で表現されているように，主体 0 の効用関数は，主体 1 の空間分布 $\boldsymbol{n}^{(1)}$ に影響を受ける一方で，主体 1 の効用関数は，主体 0 の空間分布 $\boldsymbol{n}^{(0)}$ に依存しない．すなわち，主体 0 は主体 1 との間に非対称な相互作用が存在する．本節では，このような主体間の非対称な相互作用が存在する集積経済モデルで創発する集積パターンを示す.

立地均衡状態は，全ての立地主体が自ら立地する地点を変更するインセンティブがない状態として定義する．すなわち，各々，総数 $N^{(0)}, N^{(1)}$ の主体 0, 1 共に，条件 (3) を満足する状態 $\boldsymbol{n}^{(0)*}$, $\boldsymbol{n}^{(1)*}$ が立地均衡状態である．ただし，このモデルには，条件 (3) を満たす複数の均衡状態が存在する．そこで，その局所安定性を調べるために，主体 0, 1 の立地パターンが均衡状態に達するまでの調整ダイナミクスを，前章と同様，次のように定義する:

$$\dot{n}_i^{(a)} = F_i^{(a)}(\boldsymbol{n}^{(0)}, \boldsymbol{n}^{(1)}) \equiv n_i^{(a)}\left\{v_i^{(a)} - \bar{v}^{(a)}\right\}. \tag{27}$$

ここで，$\bar{v}^{(a)} \equiv \sum_j (n_j^{(a)}/N^{(a)}) v_j^{(a)}$ は各地点の効用水準の加重平均である．そして，均衡状態 $\boldsymbol{n}^{(0)*}$, $\boldsymbol{n}^{(1)*}$ の局所安定性を，調整ダイナミクスの右辺 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^{(0)*}, \boldsymbol{n}^{(1)*}) = [\cdots, F_i^{(0)}, \cdots, F_i^{(1)}, \cdots]$ の Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^{(0)*}, \boldsymbol{n}^{(1)*})$ の固有値により確認する.

b) 純集積力

集積パターンが創発する分岐メカニズムを調べる準備として，立地主体が各地点に均等 (i.e., $n_i^{(t)} = N^{(t)}/4 \equiv n^{(t)}$) に分布した分散均衡状態を考える．このとき，主体 $a \in \{0,1\}$ の効用関数 $\boldsymbol{v}^{(a)}$ とその Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}^{(a)} = \bar{v}^{(a)}\boldsymbol{1}, \tag{28a}$$

$$\nabla\boldsymbol{v} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{v}^{(0,0)} & \boldsymbol{v}^{(0,1)} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{v}^{(1,1)} \end{array}\right], \tag{28b}$$

$$\boldsymbol{v}^{(a,a)} = -\left(\frac{\boldsymbol{D}}{n^{(a)}d}\right)^2 + \mu^{(a)}\left(\frac{\boldsymbol{D}}{n^{(a)}d}\right), \tag{28c}$$

$$\boldsymbol{v}^{(0,1)} = \mu^{(0)}\left(\frac{\boldsymbol{D}}{n^{(a)}d}\right). \tag{28d}$$

で与えられる．$\boldsymbol{v}^{(a,a)}$ は巡回行列である $\boldsymbol{D}$ の和・積で表されることから，明らかに巡回行列である．したがって，調整ダイナミクスの Jacobi 行列:

$$\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{F}^{(0,0)} & \boldsymbol{F}^{(0,1)} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{(1,1)} \end{array}\right], \tag{29a}$$

$$\boldsymbol{F}^{(a,a)} = n^{(a)}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{4}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v}^{(a,a)} - \frac{\bar{v}^{(a)}(\bar{\boldsymbol{n}})}{4}\boldsymbol{E}, \tag{29b}$$

$$\boldsymbol{F}^{(0,1)} = n^{(0)}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{4}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v}^{(0,1)}, \tag{29c}$$

の各ブロックの部分行列 $\boldsymbol{F}^{(a,b)}$ も巡回行列であることが分かる.

$\boldsymbol{F}^{(a,b)}$ が全て巡回行列であるため，$\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})$ に 4×4 の DFT 行列 $\boldsymbol{Z}$ を対角ブロックに持つ行列 $\tilde{\boldsymbol{Z}} \equiv \mathrm{diag}[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}]$ による相似変換を施すと，各ブロックの部分行列 $\boldsymbol{F}^{(a,b)}$ を対角化できる:

$$\tilde{\boldsymbol{Z}}^*\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})\tilde{\boldsymbol{Z}} = \left[\begin{array}{c:c} \mathrm{diag}[\boldsymbol{\lambda}^{(0,0)}] & \mathrm{diag}[\boldsymbol{\lambda}^{(0,1)}] \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \mathrm{diag}[\boldsymbol{\lambda}^{(1,1)}] \end{array}\right]. \tag{30}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{Z}}^*$ は $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ の共役転置行列，$\boldsymbol{\lambda}^{(a,b)}$ は部分行列 $\boldsymbol{F}^{(a,b)}$ の固有値である.

この行列 (30) が上三角行列であることを利用すると，$\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{n}})$ の固有値と固有ベクトルが容易に得られる．具体的には，固有値は，空間割引行列 $\boldsymbol{D}/d$ の第 k 固有値 f_k の 2 次関数で与えられる:

$$g_{4a+k} = f_k\left[\mu^{(a)} - \{n^{(a)}\}^{-1}f_k\right]. \tag{31}$$

さらに，第 $4a+k$ 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{4a+k}$ は,

$$\boldsymbol{v}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_k \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{4+k} = \begin{bmatrix} c_k\boldsymbol{z}_k \\ \boldsymbol{z}_k \end{bmatrix} \tag{32}$$

である．ここで，$\boldsymbol{z}_k$ は DFT 行列 $\boldsymbol{Z}$ の第 k 列ベクトル，$c_k \equiv \lambda_k^{(0,1)}/(\lambda_k^{(1,1)} - \lambda_k^{(0,0)}) > 0$，$\lambda_k^{(a,b)}$ は $\boldsymbol{v}^{(a,b)}$ の第 k 固有値である.

均衡解の分岐挙動を調べる前に，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{4a+k}$ で表される立地パターンを整理しておこう．まず，$a = 0$ の場合，産業 0 の企業のみが $\boldsymbol{z}_k$ 方向に集積する．これは，明らかに**図–10-a** で表される立地パターンが階層化したもの (以降，階層パターン[18]) である．次に，$a = 1$ の場合，$c_k > 0$ であるため，両産業とも $\boldsymbol{z}_k$ 方向に集積する．これは，**図–10-b** で示した両産業が同時に同じ立地点に集積する立地パターン (以降，同時集積パターン) を表している.

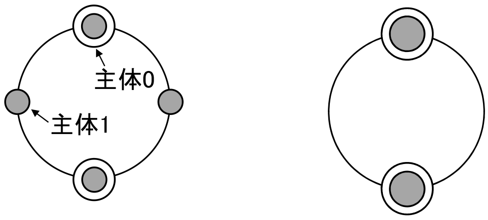
c) 集積・分散パターンの進展過程の解析

分散均衡状態から交通費用の減少に伴い発生する分岐挙動を調べよう．均衡解の分岐は，純集積力 g_{4a+k} の符号が変化する際に発生する．したがって，$g_{4a+k} = 0$ の解:

$$f_+^{(a)} = n^{(a)}\mu^{(a)}, \quad f_-^{(a)} = 0 \tag{33}$$

[17] 本節では，複数種類の立地主体を扱う集積経済モデルの分析手法に焦点を当てるため，高山・赤松[77]モデルの効用関数を簡略化して表現している.

[18] ここでの階層パターンとは，人口の多い地点に主体 0, 1 が立地し，人口の少ない地点には主体 1 のみが立地する状況を指す.



図–10-a 階層パターン　**図–10-b** 同時集積パターン

図–10 集積パターンの定義

は，分岐が発生する (g_{4t+i} の符号が変化する) f_k の臨界値を表している．以降では，得られた f_k の分岐臨界値 $f_{\pm}^{(a)}$ を利用することで，r を増加 (交通・輸送費用を減少) させた場合の分岐挙動を明らかにする．ここで，$f_k \in (0,1]$ であることから，臨界値 $f_{-}^{(a)} = 0$ は分岐の発生に影響しない．そこで，以降では，分岐臨界値のうち，$f_{+}^{(a)}$ のみについて議論する．

まず，初期状態では，r が十分大きく (交通・輸送費用が十分高く)，$f_k > f_{+}^{(a)} \quad \forall k \neq 0$ が成立しているとしよう．g_{4a+k} は，式 (31) で与えられるため，この条件は，$g_{4a+k} < 0\ \forall a, k$，すなわち，分散均衡状態が安定であることを意味している．

次に，r が徐々に増加 (i.e., 交通・輸送費用が減少) する状況を考えよう．r が増加すると，f_k が減少，$f_{+}^{(a)}$ が増加するため，ある a, k について，$f_k \leq f_{+}^{(a)} \quad \exists a, k$, が成立する．これは，$g_{4a+k} \geq 0\ \exists a, k$，すなわち分散均衡状態 $\bar{\boldsymbol{n}}$ が不安定化することを意味している．ここで，最初に $f_k \leq f_{+}^{(a)}$ となる a, k は，明らかに $f_{+}^{(a)}$ が最大となる a と f_k が最小となる k である．式 (33) より，$f_{+}^{(a)}$ が最大となる a は，$\mu^{(a)}, N^{(a)}$ が大きい a である．また，f_k が最小となる k は,

$$\arg\min_{k} f_k = 2 \tag{34}$$

である．したがって，$f_2 = f_{+}^{(a)}$ を最初に満たす $r = r_{+}^{*}$ において，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{4a+2}$ に対応した集積パターンが安定均衡状態となる．すなわち，$f_{+}^{(0)} > f_{+}^{(0)}$ の場合，産業 0 のみが 2 極集中方向に集積するパターン (**図–10-a**)，$f_{+}^{(0)} \leq f_{+}^{(0)}$ の場合，産業 0, 1 ともに 2 極集中方向に集積するパターン (**図–10-b**) が創発する．

さらに r を増加させると，主体が各々，均等分散，2 極集中，1 極集中する状況を組み合せた複雑な集積パターンが創発する (各々の集積パターンの創発条件等は，高山・赤松[77]参照)．その中でも特徴的な集積パターンが，**図–10-a** に代表される階層的な立地パターンである．その結果から，非対称な相互作用は，多くの実証研究[94),95),96)] により確認されている，階層的な産業立地構造を形成させる一つの要因であることがわかる．

5. おわりに

本稿では，従来の空間経済学分野の理論を土木計画学分野に応用可能なものにするために行った著者らの研究を紹介した．これまで，経済活動の空間的集積現象を扱う空間経済学分野では，モデルの非凸性に伴う解析上の困難に起因した，土木計画学への応用上の課題・限界が残されてきた．具体的には，都市経済学分野では均衡状態の安定性が全く確認されておらず，新経済地理学分野では殆どの研究が (空間が縮退した) 2 都市モデルの分析に終始していた．そこで，著者らは，この解析上の困難を根本的に解決することのできる，空間割引行列，離散フーリエ変換，競技場経済の 3 つの鍵概念を組合わせた分析手法を提案した．このアプローチは，1)“空間周期パターン” (i.e., 調整ダイナミクスの固有ベクトル $\boldsymbol{z}_k$)，及び，2) ある立地パターン $\boldsymbol{n}$ から空間周期パターン $\boldsymbol{z}_k$ に状態を誘く “純集積力の強度”(i.e., $\boldsymbol{z}_k$ に対応する固有値 g_k)，の 2 つの概念に基づいている．前者は，任意の立地パターンを分解表現するための独立な成分であり，1 極集中，2 極集中，均等分散といった基本的な立地パターンに相当する．後者は，立地パターン $\boldsymbol{n}$ を周期パターン $\boldsymbol{z}_k$ 方向に (微小量) 変化させたときに，移動する主体が享受する効用の増分である．したがって，ある立地パターン $\boldsymbol{n}$ において，純集積力 g_k が正となる (“支配的となる”) 周期パターン $\boldsymbol{z}_k$ が存在すれば，$\boldsymbol{n}$ は安定的な均衡状態ではなく，$\boldsymbol{z}_k$ 方向に変化する．また，純集積力 g_k は構造パラメータ (e.g., 輸送費用) の関数であり，支配的な空間周期 $\boldsymbol{z}_k$(i.e., 安定的な立地パターン) は，構造パラメータの値に応じて変化 (分岐) する．上述の 3 つの鍵概念を用いた分析手法は，この $g_k, \boldsymbol{z}_k$ を解析的に導出することで，集積経済モデルで創発する立地パターンの一般的規則の把握を容易にするものである．本稿では，この集積経済モデルの分析手法・手順を，特定のモデルの解析を通じて紹介した．

さらに，この手法は，一次元空間・単一種類の立地主体を対象とした集積経済モデルに留まらず，従来，非常に困難だと考えられてきた[97),98)]，二次元空間・複数種類の立地主体を考えるモデルの解析にも適用できる．二次元空間上で複数種類の立地主体の立地パターンの規則性を扱う代表的理論は，中心地理論[78),79)]である．この理論は，財の生産拠点である都市の規模・空間的配置と輸送費用の関係を説明しており，市場圏が六角形状になるように都市が配置されることを示している．さらに，様々な産業の都市集積が同期することで，階層的な産業立地パターンが形成されることも示唆している．この理論は，その直観的な説得力が広く認められる一方で，古くからミクロ経済学的基礎の欠如が問

題となっていた．第 4 章で紹介した高山・赤松[76),77)]の成果は，その課題の一部を解決するものである．すなわち，ミクロ経済学的基礎を持つモデルにより，中心地理論[78),79)]で示された規則性 (六角形状の市場圏，階層的な産業構造) が創発するメカニズムを明らかにすることに成功している．

本稿で紹介した分析手法は，境界条件に依存しない，集積経済モデル固有の特性を解析的かつ統一的に明らかにすることができるという特徴を持つ．したがって，これらの研究から生み出される研究課題の一つとして，従来研究で構築されてきた多くの集積経済モデルを系統的に見直し，理論的に体系化してゆくことが挙げられる．その中でも，Fujita and Ogawa[35)], Fujita[39)]など，そのモデル構造の複雑さから，未だに均衡解の特性が殆ど明らかにされていないモデルの分析は，特に重要な課題である．さらに，各々，独立に発展してきた国際経済学・新経済地理学・都市経済学を統合し，従来研究の殆どが個別に扱ってきた "国家間-地域間-都市間-都市内" といった複数の空間スケールを同時に扱う[19]理論の構築も，重要な課題の一つである．

また，従来の空間経済学分野の理論を土木計画学へ応用する上で特に重要と考えられる研究課題は，次の 2 点である: 1) 境界条件 (e.g., 線分都市) が集積パターンに与える影響の解明，2) 現実の空間経済システムで観測される stylized facts (e.g., Zipf's law, Number-Average Size rule[96),105)]) と整合的な集積経済モデルの構築．これらの課題は，古くから認識されている一方で，研究蓄積は多くない．本稿で扱った分析以上の困難が予想されるものの，土木計画学分野への応用に向けて，これらの方向の理論の発展が大いに期待される．

謝辞：　招待講演という大変名誉な機会を与えていただいた土木計画学研究委員会に深く御礼申し上げます．論文奨励賞の受賞論文「空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発」は，本稿で紹介した東北大学の赤松隆教授との共同研究の成果の一部であります．赤松隆教授には，著者が学部生の頃から長きに渡り，終始丁寧にご教授いただきました．また，東北大学の池田清宏教授，曽道智教授，奥村誠教授，河野達仁准教授，京都大学の森知也教授，神戸大学の織田澤利守准教授をはじめ，多くの方々から様々な機会で貴重な意見・助言をいただきました．ここに記して感謝の意を表します．

[19] この方向の研究は，近年，Krugman and Elizondo[99)], Monfort and Nicolini[100)], Paluzie[101)], Alonso-Villlar[102)], Behrens et al.[103)], Zeng and Zhao[104)]などにより部分的に行われている．

参考文献

1) 金本良嗣, 徳岡一幸: 日本の都市圏設定基準, 応用地域学研究, Vol. 7, pp. 1–15, 2002.
2) United Nations: World Urbanization Prospects: The 2007 Revision, 2007.
3) Krugman, P. R.: Increasing Returns and Economic Geography, *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483–499, 1991.
4) Fujita, M., Krugman, P. R. and Venables, A. J.: *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, MIT Press, 1999.
5) Baldwin, R. E., Forslid, R., Martin, P., Ottaviano, G. I. P. and Robert-Nicoud, F.: *Economic Geography and Public Policy*, Princeton University Press, 2003.
6) Combes, P.-P., Mayer, T. and Thisse, J.-F.: *Economic Geography: The Integration of Regions and Nations*, Princeton University Press, 2008.
7) Brakman, S., Garretsen, H. and van Marrewijk, C.: *The New Introduction to Geographical Economics*, Cambridge University Press, 2009.
8) McCann, P.: *Urban and Regional Economics*, Oxford University Press, 2001.
9) Fujita, M. and Thisse, J.-F.: *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Regional Growth*, Cambridge University Press, 2002.
10) Henderson, J. V. and Thisse, J.-F.: *Handbook of Regional and Urban Economics*, Elsevier, 4 edition, 2004.
11) Fujita, M.: The Evolution of Spatial Economics: From Thünen to the New Economic Geography, *Japanese Economic Review*, Vol. 61, No. 1, pp. 1–32, 2010.
12) 藤田昌久: 空間経済学の発展: チューネンからクルーグマンまでの二世紀, 現代経済学の潮流 2010 (池田新介, 大垣昌夫, 柴田章久, 田渕隆俊, 前多康男, 宮尾龍蔵 (編)), 東洋経済新報社, pp. 3–53, 2010.
13) 佐藤泰裕, 田渕隆俊, 山本和博: 空間経済学, 有斐閣, 2011.
14) 小林潔司: 知識社会における産業立地と地域動学, 土木学会論文集, Vol. 449, No. IV-17, pp. 27–36, 1992.
15) 上田孝行, 松葉保孝: 都市群システムにおける構造の安定性と変化に関するモデル分析, 土木学会論文集, Vol. 542, No. IV-32, pp. 33–44, 1996.
16) 小林潔司, 奥村誠: 高速交通体系が都市システムの発展に及ぼす影響に関する研究, 土木計画学研究・論文集, Vol. 13, pp. 57–66, 1996.
17) Mun, S.-i.: Transport Network and System of Cities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 42, No. 2, pp. 205–221, 1997.
18) 奥村誠, 小林潔司, 山室良徳: 輸送費用の減少が都市群システムに及ぼす影響のシミュレーション分析, 土木学会論文集, Vol. 604, No. IV-41, pp. 23–34, 1998.
19) 上田孝行, 石川良文, 小池淳司, 石倉智樹, 小林優輔, 山崎清, 武藤慎一: Excel で学ぶ地域・都市経済分析, コロナ社, 2010.
20) 上田孝行: 拡張された立地余剰を用いた一般均衡モデル, 土木計画学研究・論文集, Vol. 10, pp. 183–190, 1992.
21) Alonso, W.: *Location and Land Use*, Harvard University Press, 1964.
22) Starrett, D. A.: Market Allocations of Location Choice in a Model with Free Mobility, *Journal of Economic Theory*, Vol. 17, No. 1, pp. 21–37, 1978.
23) Fujita, M.: Spatial Interactions and Agglomeration in Urban Economics, *New Frontiers in Regional Science* (Chatterji, M. and Kunne, R. E.(eds.)), Macmillar Publishers, 1990.

24) Cronon, W.: *Nature's Metropolis: Chicago and the Great West*, Norton, 1991.
25) Scitovsky, T.: Two Concepts of External Economies, *The Journal of Political Economy*, Vol. 62, pp. 143–151, 1954.
26) 久武昌人，山崎清: 独占的競争等を取り入れた多地域 CGE モデルの構築, *RIETI Discussion Paper Series06-J-046*, 2006.
27) 石倉智樹: 人口減少に伴う都市の縮退と集積に関する基礎的定量分析, 都市計画論文集, Vol. 47, No. 1, pp. 68–73, 2012.
28) Solow, R.: Land Use in a Long Narrow City, *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 430–447, 1971.
29) Beckmann, M. J.: Spatial Equilibrium in the Dispersed City, *Mathematical Land Use Theory* (Papageorgiou, G. J.(ed.)), Lexington Books, pp. 117–125, 1976.
30) O'Hara, D. J.: Location of Firms within a Square Central Business District, *The Journal of Political Economy*, Vol. 85, No. 6, pp. 1189–1207, 1977.
31) Borukhov, E. and Hochman, O.: Optimum and Market Equilibrium in a Model of a City without a Predetermined Center, *Environment and Planning A*, Vol. 9, pp. 849–856, 1977.
32) Tabuchi, T.: Urban Agglomeration Economies in a Linear City, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 16, No. 3, pp. 421–436, 1986.
33) Mossay, P. and Picard, P. M.: On Spatial Equilibria in a Social Interaction Model, *Journal of Economic Theory*, Vol. 146, No. 6, pp. 2455–2477, 2011.
34) Ogawa, H. and Fujita, M.: Equilibrium Land Use Patterns in a Nonmonocentric City, *Journal of Regional Science*, Vol. 20, No. 4, pp. 455–475, 1980.
35) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple Equilibria and Structural Transition of Non-monocentric Urban Configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 12, No. 2, pp. 161–196, 1982.
36) Imai, H.: CBD Hypothesis and Economies of Agglomeration, *Journal of Economic Theory*, Vol. 28, No. 2, pp. 275–299, 1982.
37) Berliant, M., Peng, S.-K. and Wang, P.: Production Externalities and Urban Configuration, *Journal of Economic Theory*, Vol. 104, No. 2, pp. 275–303, 2002.
38) Lucas, R. E. J. and Rossi-Hansberg, E.: On the Internal Structure of Cities, *Econometrica*, Vol. 70, No. 4, pp. 1445–1476, 2002.
39) Fujita, M.: A Monopolistic Competition Model of Spatial Agglomeration: Differentiated Product Approach, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 18, No. 1, pp. 87–124, 1988.
40) Anas, A., Arnott, R. and Small, K. A.: Urban Spatial Structure, *Journal of Economic Literature*, Vol. 36, pp. 1426–1464, 1998.
41) Fujita, M. and Thisse, J. F.: The Formation of Economic Agglomeration, *Economics of Cities* (Huriot, J. M. and Thisse, J. F.(eds.)), Cambridge University Press, 2000.
42) Mori, T.: Monocentric versus Polycentric Models in Urban Economics, *The New Palgrave Dictionary of Economics Second Edition* (Durlauf, S. N. and Blume, L. E.(eds.)), Palgrave Macmillan, 2008.
43) Kanemoto, Y.: Optimal Cities with Indivisibility in Production and Interactions between Firms, *Journal of Urban Economics*, Vol. 27, pp. 46–59, 1990.
44) Ota, M. and Fujita, M.: Communication Technologies and Spatial Organization of Multi-unit Firms in Metropolitan Areas, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 23, pp. 695–729, 1993.
45) Henderson, V. and Slade, E.: Development Games in Non-monocentric Cities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 34, pp. 207–229, 1993.
46) Berliant, M. and Wang, P.: Urban Growth and Subcenter Formation: A Trolley Ride from the Staples Center to Disneyland and the Rose Bowl, *Journal of Urban Economics*, Vol. 63, No. 2, pp. 679–693, 2008.
47) 高山雄貴, 赤松隆: 空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 67, No. 1, pp. 1–20, 2011.
48) Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E.: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 3, pp. 297–308, 1977.
49) Ottaviano, G. I. P. and Thisse, J.-F.: New Economic Geography: What about the N?, *Environment and Planning A*, Vol. 37, No. 10, pp. 1707–1725, 2005.
50) Behrens, K. and Thisse, J.-F.: Regional Economics: A New Economic Geography Perspective, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 37, No. 4, pp. 457–465, 2007.
51) Fujita, M. and Thisse, J.-F.: New Economic Geography: An appraisal on the Occasion of Paul Krugman's 2008 Nobel Prize in Economic Sciences, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, No. 2, pp. 109–119, 2009.
52) Thisse, J.-F.: Toward a Unified Theory of Economic Geography and Urban Economics, *Journal of Regional Science*, Vol. 50, No. 1, pp. 281–296, 2010.
53) Krugman, P. R.: On the Number and Location of Cities, *European Economic Review*, Vol. 37, No. 2-3, pp. 293–298, 1993.
54) Fujita, M. and Krugman, P. R.: When is the Economy Monocentric?: von Thünen and Chamberlin Unified, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 25, No. 4, pp. 505–528, 1995.
55) Fujita, M.: Structural Stability and Evolution of Urban Systems, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 27, No. 4-5, pp. 399–442, 1997.
56) Mori, T.: A Modeling of Megalopolis Formation: The Maturing of City Systems, *Journal of Urban Economics*, Vol. 42, No. 1, pp. 133–157, 1997.
57) Krugman, P.: *The Self-organizing Economy*, Blackwell Publishers, 1996.
58) Mossay, P.: Increasing Returns and Heterogeneity in a Spatial Economy, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 33, No. 4, pp. 419–444, 2003.
59) Picard, P. M. and Tabuchi, T.: Self-organized Agglomerations and Transport Costs, *Economic Theory*, Vol. 42, No. 3, pp. 565–589, 2010.
60) Tabuchi, T., Thisse, J.-F. and Zeng, D.-Z.: On the Number and Size of Cities, *Journal of Economic Geography*, Vol. 5, No. 4, pp. 423–448, 2005.
61) Oyama, D.: Agglomeration Under Forward-looking Expectations: Potentials and Global Stability, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, No. 6, pp. 696–713, 2009.
62) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F.: A New Economic Geography Model of Central Places, *Journal of Urban Economics*, Vol. 69, No. 2, pp. 240–252, 2011.
63) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二: 都市

の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 4, pp. 553–566, 2007.
64) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial Period-Doubling Agglomeration of a Core-Periphery Model with a System of Cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 754–778, 2012.
65) Ikeda, K., Murota, K. and Akamatsu, T.: Self-Organization of Lösch's Hexagons in Economic Agglomeration for Core-Periphery Models, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 22, No. 08, p. 1230026, 2012.
66) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T., Takayama, Y., Sobhaninejad, G. and Shibasaki, A.: Self-Organizing Hexagons in Economic Agglomeration: Core-Periphery Models and Central Place Theory, *Mathematical Engineering Technical Reports, METR 2011-24, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, The University of Tokyo.*, 2011.
67) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D. G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1988.
68) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer, 2010.
69) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P.: An Analytically Solvable Core-periphery Model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, No. 3, pp. 229–240, 2003.
70) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学, コロナ社, 2005.
71) 赤松隆, 高山雄貴, 池田清宏, 菅澤晶子, 佐藤慎太郎: 1 次元多都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム, 土木学会論文集 D, Vol. 66, No. 4, pp. 442–460, 2010.
72) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial Discounting, Fourier, and Racetrack Economy: A Recipe for the Analysis of Spatial Agglomeration Models, *Journal of Economic Dynamics and Control, forthcoming*, Vol. 36, No. 11, pp. 1729–1759, 2012.
73) Akamatsu, T. and Takayama, Y.: A Simplified Approach to Analyzing Multi-location New Economic Geography Models, *Mimeograph*, 2012.
74) Pflüger, M. and Südekum, J.: A Synthesis of Footloose-Entrepreneur New Economic Geography Models: When is Agglomeration Smooth and Easily Reversible?, *Journal of Economic Geography*, Vol. 8, No. 1, pp. 39–54, 2007.
75) Helpman, E.: The Size of Regions, *Topics in Public Economics: Theoretical and Applied Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 33–54, 1998.
76) 高山雄貴, 赤松隆: 2 次元集積経済モデルによる Lösch 型集積パターンの創発: 三角形格子状の都市モデルにおける理論的解析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 27, pp. 109–120, 2010.
77) 高山雄貴, 赤松隆: 一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 27, pp. 285–295, 2010.
78) Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Jena (English translation: Central Place in Southern Germany, Prentice-Hall, 1966), 1933.
79) Lösch, A.: *Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Jena (English translation: The Economics of Location, Yale University Press, 1954), 1940.
80) Krugman, P. R.: *Development, Geography, and Economic Theory*, MIT Press, 1997.
81) Krugman, P. R.: *Development, Geography, and Economic Theory*, MIT Press, 1995.
82) Pflüger, M.: A Simple, Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 34, No. 5, pp. 565–573, 2004.
83) Baldwin, R. E.: Core-Periphery Model with Forward-Looking Expectations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, No. 1, pp. 21–49, 2001.
84) Ottaviano, G. I. P.: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, No. 1, pp. 51–77, 2001.
85) 織田澤利守, 赤松隆: 集積経済下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 4, pp. 567–578, 2007.
86) Oyama, D.: History Versus Expectations in Economic Geography Reconsidered, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 2, pp. 394–408, 2009.
87) Hirsch, M. W. and Smale, S.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
88) Luenberger, D. G.: *Introduction to Dyamic Systems: Theory, Models, and Applications*, Wiley, 1979.
89) Hale, J. K. and Koçak, H.: *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991.
90) Davis, P. J.: *Circulant Matrices*, John Wiley & Sons, 1979.
91) Horn, R. A. and Johnson, C. R.: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
92) 伊理正夫: 一般線形台数, 岩波書店, 2003.
93) Gray, R. M.: *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Now Publishers, 2006.
94) Berry, B. J. L.: *Geography of Market Centers and Retail Distribution*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.
95) Marshall, J. U.: *The Structure of Urban Systems*, University of Toronto Press, 1989.
96) Mori, T., Nishikimi, K. and Smith, T. E.: The Number-Average Size Rule: A New Empirical Relationship between Industrial Location and City Size, *Journal of Regional Science*, Vol. 48, No. 1, pp. 165–211, 2008.
97) Krugman, P.: How the Economy Organizes Itself in Space: A Survey of the New Economic Geography, *The Economy as an Evolving Complex System II* (Arthur, W. B., Durlauf, S. N. and Lane, A. D.(eds.)), Addison Wesley, pp. 239–262, 1997.
98) Thisse, J.-F.: Location Theory, Regional Science, and Economics, *Journal of Regional Science*, Vol. 27, No. 4, pp. 519–528, 1987.
99) Krugman, P. and Elizondo, R. L.: Trade Policy and the Third World Metropolis, *Journal of Development Economics*, Vol. 49, pp. 137–150, 1996.
100) Monfort, P. and Nicolini, R.: Regional Convergence and International Integration, *Journal of Urban Economics*, Vol. 48, pp. 286–306, 2000.
101) Paluzie, E.: Trade Policy and Regional Inequalities,

Papers in Regional Science, Vol. 80, pp. 67–85, 2001.
102) Alonso-Villar, O.: Large Metropolises in the Third World: An Explanation, *Urban Studies*, Vol. 38, pp. 1359–1371, 2001.
103) Behrens, K., Gaigné, C., Ottaviano, G. I. P. and Thisse, J. F.: Countries, Regions and Trade: On the Welfare Impacts of Economic Integration, *European Economic Review*, Vol. 51, pp. 1277–1301, 2007.
104) Zeng, D. Z. and Zhao, L.: Globalization, Interregional and International Inequalities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 67, pp. 352–361, 2010.
105) Mori, T. and Smith, T. E.: A Reconsideration of the NAS Rule from an Industrial Agglomeration Perspective, *Brookings-Wharton Papers on Urban Affairs: 2009*, Brookings Inst Pr, pp. 175–216, 2009.

MECHANISMS OF PATTERN FORMATION IN SPATIAL ECONOMIES

Yuki TAKAYAMA

Numerous studies in the field of spatial economics have been devoted to explain mechanisms of the spatial agglomeration of economic activities. These studies have the potential to provide a basis for predicting and evaluating long-term effects of various economic policy proposals. However, there remain some fundamental problems for applying these studies to such applications, which result directly from technical difficulties caused by the non-convexity of spatial agglomeration models. In this paper, we first summarize issues of spatial economics and then review our studies that attempt to overcome these issues. Finally, we suggest future studies.