ネットワーク上でのパラメータ推定の特性について の一考察

中山　晶一朗[1]

[1]正会員　金沢大学　環境デザイン学系（〒920-1192　金沢市角間町）
E-mail:snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

本研究では，最尤推定法を用いてリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定法について，その最尤推定量の特性，推定されたパラメータの信頼性の評価，どのモデルが最良なのかを統計的に判断するモデル選択などについて考察する．

Key Words :*generalized logit model, Tsallis statistics*

1. はじめに

交通ネットワークの計画･分析の際，研究･実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．確率的利用者均衡は，離散選択モデルによる経路選択に基づいた均衡である．ロジットモデルを用いた場合，経路効用は最も簡単な場合でも $-\theta t+\varepsilon$ であり，パラメータ θ を推定する必要がある．なお，t は経路の旅行時間，ε は確率項である．ロジット型利用者均衡では，このパラメータにどのような値を用いるべきかが問題となることが少なくない．また，$-\theta t+\varepsilon$ よりも複雑な効用関数を定義することも可能で，その時は更にパラメータ推定が重要になる．さらに，従来から多数の研究がなされている OD 交通量推定などもネットワーク均衡モデル上でのパラメータ推定である．このように交通ネットワーク均衡モデルでパラメータを推定することは非常に重要であることが分かる．また，高速道路等の料金を考える場合，時間価値などを用いることも可能であるが，パラメータを均衡モデル上で推定することも可能であり，その推定量は均衡モデルと一貫性を持ったパラメータであり，均衡モデル上で推定する方が望ましい場合も多いと考えられる．

ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定では，データ入手の容易さの観点から，リンク交通量の利用が便利であると考えられる．従来から均衡モデルにより算出される計算交通量と実際のネットワークの交通量である実交通量の二乗誤差が最小となるようにパラメータが推定されてきている[1)]．しかし，このような最小二乗法では，各リンクの交通量は独立であることが前提条件となる．しかし，実際のリンク交通量はリンク間で独立ではなく，近接するリンクでは，その相関はかなり高い．したがって，最小二乗法によってパラメータの値を単に計算することは可能であるが，リンク交通量の相関等の観点（確率・統計学の観点）から理論上問題であり，推定したパラメータにバイアスが含まれる恐れもある．そこで，本研究では，最尤推定法を用いてリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定法を提案する．このような統計学的な手法を用いることによって，これまで膨大に蓄積されている統計学の様々な理論を交通ネットワーク均衡モデルに適用することが可能となる．例えば，推定されたパラメータの信頼性の評価，どのモデルが最良なのかを統計的に判断するモデル選択などが可能となる．

2. ロジット型確率ネットワーク均衡

(1) 需要と交通量

リンク a の（リンク）交通量を x_a $(a\in A)$，その確率変数を X_a とする．OD ペア $i\,(\in I)$ の経路 $j\,(\in J_i)$ の経路交通量を y_{ij} とし，その確率変数を Y_{ij} とする．δ_{aij} は OD ペア i の経路 j の経路にリンク a が含まれていれば 1 であり，含まれていなければ 0 である．これらのベクトル表示 $\mathbf{X}=\Delta\mathbf{Y}$，$\mathbf{x}=\Delta\mathbf{y}$ を必要に応じて用いる．

起終点交通量（OD 交通量）は，その起点（O）周辺に存在する人々がトリップを行うのか否かにより確率的

に発生すると仮定する．それらの人々がある一つの終点（D）へ向かうトリップを行う確率は小さいと仮定すると，ODペア i の（OD）交通量はポアソン分布に従う．その平均を λ_i とする．また，リンク a の平均リンク交通量を μ_a $(=\mathrm{E}[X_a])$，ODペア i の経路 j の平均経路交通量を m_{ij} $(=\mathrm{E}[Y_{ij}])$ とする（$\lambda_i=\sum_{j\in J_i} m_{ij}$）．ここで，E は平均（期待値）の演算である．

ODペア i の交通量の平均 λ_i は，何らかの方法により調査されたOD交通量データの値を用いることができるものとする．OD 交通量がポアソン分布以外の分布に従う場合を考えることも可能である [2]．しかし，その場合 OD 交通量の分散や標準偏差に関するデータも必要となり，適用が難しくなる．本稿では，最も適用が簡単なポアソン分布を仮定することとする．ポアソン分布は平均と分散が同じ確率分布であり，上述のようにその平均は既存の OD 交通量データから与えることが可能である．なお，OD 交通量がポアソン分布以外の分布を仮定した場合でも，細部は若干変わるが，本稿の最尤法をほぼそのまま適用できる．

発生したOD交通量はそれぞれ独立に確率 $\mathbf{p}_i$ の通りに確率的に経路を選択すると仮定する．ここで，$\mathbf{p}_i$ は OD ペア i の道路利用者の経路選択確率で，その要素を p_{ij} とする．なお，経路選択確率は同じ ODペア内の道路利用者では共通とする．ODペア i の経路交通量の平均 m_{ij} は $\lambda_i p_{ij}$ と等しくなる．すなわち，$\mathbf{m}_i=\lambda_i\,\mathbf{p}_i$ である．ここで，$\mathbf{m}_i$ はODペア i の平均経路交通量のベクトルである．この場合，OD ペア i の経路交通量は以下の示すように（独立な）ポアソン分布に従う．

$$f_{\mathbf{Y}_i}(\mathbf{y}_i)=f^{mn}_{\mathbf{Y}_i}(\mathbf{y}_i|q_i)\,f^{po}_{Q_i}(q_i)=\prod_{j=1}^{J_i} f^{po}_{Y_i}(y_{ij}) \tag{1}$$

ここで，$f^{mn}_{\cdot}(\cdot)$ は多項分布の確率関数，$f^{po}_{\cdot}(\cdot)$ はポアソン分布の確率関数，Q_i はODペア i の OD 交通量の確率変数，q_i はその実現値である．また，既に述べたように，$\lambda_i=\sum_{j\in J_i} m_{ij}$ であり，それを用いている．

以上は，平均が λ_i のポアソン分布に従って生起したOD交通量がそれぞれ独立に確率 $\mathbf{p}_i$ に従って確率的に経路を選択すると，経路交通量は平均が $\lambda_i p_{ij}$ の独立なポアソン分布に従うということを意味している．

独立なポアソン変数（ポアソン分布に従う確率変数）の和はポアソン変数であるため，リンク交通量はポアソン分布に従う．つまり，リンク a の交通量は平均 μ_a $(=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\delta_{aij}m_{ij}=\sum_{i\in I}\lambda_i\sum_{j\in J_i}\delta_{aij}p_{ij})$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}[\mu_a]$ に従う．ただし，リンク間には共通の流れる経路交通量が存在するため，一般にリンク交通量はリンク間で独立ではない．

式(1)で述べたように，経路交通量はそれぞれ独立なポアソン分布 $\mathrm{Po}[m_{ij}]$ に従う．経路交通量が十分に大きい場合，ポアソン分布 $\mathrm{Po}[m_{ij}]$ の平均と分散はともに m_{ij} であるため，中心極限定理により，それは平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 $\mathrm{N}[m_{ij}, m_{ij}]$ に従うと近似することができる．この時，リンク交通量 $\mathbf{X}$ は次の多変量正規分布に従う．

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{2}$$

ただし，$\boldsymbol{\mu}$ は平均リンク交通量ベクトルで，その要素は μ_a，$\boldsymbol{\Sigma}$ はリンク交通量の分散共分散行列，$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の逆行列，$|\boldsymbol{\Sigma}|$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の行列式，n $(=|A|)$ はリンクの総数である．また，平均経路交通量のベクトル $\mathbf{m}$（その要素は m_{ij}）を用いると，$\boldsymbol{\Sigma}=\Delta\, diag(\mathbf{m})\,\Delta^{\mathrm{T}}$ である．ただし，$diag(\mathbf{m})$ は $\mathbf{m}$ の各成分を対角成分に持つ対角行列である．ここで，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{m}$ であるため，$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ は $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x},\mathbf{m})$ と考えることもできる．なお，このようなリンク交通量の確率密度関数を定義するためには，$|\boldsymbol{\Sigma}|$ が 0 でないことが必要である．

(2) 定式化

各道路利用者は次式のロジットモデルに従い，経路選択確率 $\mathbf{p}_i$ を決定していると仮定する．

$$p_{ij}=\frac{\exp(-\theta\bar{c}_{ij})}{\sum_{j'\in J_i}\exp(-\theta\bar{c}_{ij'})} \tag{3}$$

ここで，$\bar{c}_{ij}$ は ODペア i の経路 j の平均旅行時間，θ は正のパラメータである．

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するのに際し，式 (3) を含んだ関数 $\mathbf{g}=(g_{11},..,g_{21},\ldots)^{\mathrm{T}}$ を考えよう．関数 $\mathbf{g}$ の要素 g_{ij} を以下のように定義する．

$$g_{ij}(\mathbf{m})=\lambda_i\frac{\exp(-\theta\bar{c}_{ij}(\mathbf{m}))}{\sum_{j'\in J_i}\exp(-\theta\bar{c}_{ij'}(\mathbf{m}))} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{\mu}$ は平均リンク交通量ベクトルである．

確率ネットワーク均衡は，関数（写像）$\mathbf{g}$ に関する以下の不動点問題として定式化できる．

$$\mathbf{m}=\mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{5}$$

なお，$\boldsymbol{\mu}=\Delta\mathbf{g}'(\boldsymbol{\mu})$ とリンクに関する定式化も可能である．ただし，$\mathbf{g}'$ は入力がリンク交通量の場合の $\mathbf{g}$ である．

3. 最尤推定法

(1) 尤度関数

リンク交通量の観測が行われ，観測リンク交通量ベクトルを $\tilde{\mathbf{x}}$ とする．観測されたリンクの集合を $\tilde{A}$ とす

る．$\tilde{\mathbf{x}}$ は観測回数は一回のみのデータとする．

観測リンク交通量は式 (2) の分布の周辺確率として以下の確率密度関数を持つ多変量正規分布に従う．

$$f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{\mathbf{x}})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\tilde{n}}\left|\tilde{\mathbf{\Sigma}}\right|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})\right\} \tag{6}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{X}}$ は観測交通量の確率変数ベクトル，$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ は観測交通量の平均値ベクトル，$\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ は観測交通量の分散共分散行列，$\tilde{n}$ は観測リンクの総数である．$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ と $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ は，式 (2) で用いられている $\boldsymbol{\mu}$ と $\mathbf{\Sigma}$ について，観測しているリンクに関する要素を抜き出して構成することができる．

リンク交通量の実現値，つまり，リンク交通量の観測値 $\tilde{\mathbf{x}}$ が与えられた場合，以下の対数尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}})$ を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}})=\ln f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{\mathbf{x}})=\sum_{a\in\tilde{A}}\ln f_{X_a}(x_a) \tag{7}$$

ただし，$f_{X_a}(x_a)$ はリンク a の交通量の確率密度関数である．そして，尤度関数を $l\,(\ln l=L)$ で表すことにする．

⑵ 定式化

以下に示すように前章で述べた確率ネットワーク均衡が下位問題となった均衡制約付数理問題（MPEC）として，最尤推定法によるパラメータ推定を定式化することができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta}}\ L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{m}) \tag{9}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{m}=\mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{10}$$

なお，$\boldsymbol{\theta}$ はパラメータベクトルで，θ_k $(k\in K)$から構成される．

⑶ 一次･二次(偏)微分

上述の問題を解くためには，$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L$ を用いることになる．ただし，$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L$ は L の $\boldsymbol{\theta}$ に関する勾配，$\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L$ は L の $\boldsymbol{\theta}$ に関するヘシアン行列，$\mathbf{0}$ は零ベクトルとする．$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L=\mathbf{0}$ は尤度方程式と呼ばれる．なお，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の t 値の算出には，$\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L$ が必要となるため，本研究では，$\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L$ まで考慮する必要がある．

対数尤度関数 L は式 (6) 及び (7) から分かるように，$\boldsymbol{\theta}$ は陽には現れず，$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L=\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\nabla_{\mathbf{m}}L$ となる．ここで，式 (4) で述べた関数 $\mathbf{g}$ を用いて，陰関数 $\mathbf{h}(\mathbf{m},\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{g}-\mathbf{m}=\mathbf{0}$ を定義する．この陰関数 $\mathbf{h}$ を用いて，$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L$ は以下のように与えることができる．

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}L=-(\nabla_{\mathbf{m}}\mathbf{h}^{-1}\,\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\,\mathbf{h})^{\mathrm{T}}\,\nabla_{\mathbf{m}}L \tag{11}$$

そして，$\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L$ の成分 $\partial^2 L/\partial\theta_k\partial\theta_{k'}$ は以下の通りである．

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_k\partial\theta_{k'}}=-\nabla_{\mathbf{m}}L^{T}\nabla_{\mathbf{m}}\mathbf{h}^{-1}\left(\frac{\partial^2\mathbf{h}}{\partial\theta_k\partial\theta_{k'}}+\boldsymbol{\eta}\right)+\left(\nabla_{\mathbf{m}}\mathbf{h}^{-1}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\theta_k}\right)^{T}\nabla^2_{\mathbf{m}}L\ \nabla_{\mathbf{m}}\mathbf{h}^{-1}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\theta_{k'}} \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{\eta}$ は要素が $\dfrac{\partial\mathbf{h}}{\partial\theta_k}^{\mathrm{T}}\nabla^2_{\mathbf{m}}h_{ij}\dfrac{\partial\mathbf{h}}{\partial\theta_{k'}}$ のベクトルである．

パラメータの推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が（漸近）有効な推定量である場合，その推定量の分散共分散行列は $-\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L^{-1}|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ となるため，パラメータ θ_k の t 値は，

$$\frac{\hat{\theta}_k}{\sqrt{[-\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}}L^{-1}|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}]_{kk}}} \tag{13}$$

と計算することができる．ただし，$[\cdot]_{kk}$ は行列の kk 成分を意味する．

4. 最尤推定量の性質

通常の最尤推定法では，独立同一分布（I.I.D.）が仮定されている．この場合，最尤推定量は 3 つの優れた性質（一致性，漸近有効性，漸近正規性）を持っている [3]．よって，最尤法は，サンプルサイズが十分に大きければ，パラメータの真値を推定することができる．

車両感知器等から多量のリンク交通量データを入手できることも多い．しかし，日々の交通量には相関があると考えられ，その場合，それらのデータを基に独立性に留意した多回数のリンク交通量データを作成しなければならない．また，一般道路等では，車両感知器データの入手は容易ではない場合も多く，その場合，センサスデータなどを用いざるを得ない．そこで，観測した交通量データ観測回数が 1 回のみの場合について考察する．以下に示すように，観測リンク数が十分に多く，リンク間の相関が限られたものである場合，最尤推定量は真値に一致する．

一般にリンク交通量は互いに独立ではなく，観測回数が 1 回のみの場合の観測リンク交通量は I.I.D.なデータではない．しかし，大規模ネットワークの場合，多数のリンクが存在し，互いに離れたリンクの交通量の相関は十分に小さいと考えられ，ある一定の距離以上離れたリンク間の交通量は独立であると仮定できると考えられる．そこで，リンク a と相関があるリンクの集合を B_a $(\subset A)$ とし，B_a の大きさは限られたものとする．この時，$\mathrm{Cov}[X_a, X_{a'}]=0$ $(^{\forall}a'\in B_a^c)$ となる．ただし，B_a^c は B_a の補集合である．そして，$n\to\infty$ の時，$|B_a^c|>>|B_a|$とする．このように任意のリンクの交通量に関して，そのリンクとあ

る程度離れたリンクの交通量とは独立で，$|B_a^c| >> |B_a|$ が成立していることをリンクの局所従属性と呼ぶことにする．

本稿では，（独立ではないデータでは，一般には成立しないが）局所従属性の場合，リンク交通量及びそれに関する変数は，大数の弱法則（Appendix に証明の概略を掲載）及び中心極限定理（本稿では証明は省略）が成立する．この大数の弱法則及び中心極限定理を用いると，局所従属のリンク交通量データを用いた場合，最尤推定量は一致性，漸近有効性，漸近正規性を持つことが通常の統計の教科書[3]に従い，容易に示すことができる．

6. おわりに

交通ネットワーク均衡モデルを用いる際，モデルのパラメータを推定することが必要になることが多い．ネットワーク均衡モデルでのパラメータ推定では，データ入手の容易さの観点から，リンク交通量の利用が便利である．従来から均衡モデルが算出する計算交通量と実際のネットワークの交通量である実交通量の二乗誤差が最小となるようにパラメータが推定されることが多かった．しかし，このような最小二乗法では，各リンクの交通量が独立であることが前提条件となるが，現実のリンク交通量はリンク間で独立ではなく，近接するリンクでは，その相関はかなり高いと考えられ，リンク交通量の相関等の観点から理論上問題であり，推定したパラメータにバイアスが含まれる恐れもある．本研究では，最尤推定法によってリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定法を提案し，交通量の観測リンク数が十分に大きいか，リンク交通量の観測回数が十分に多い場合，その推定量が真値となることを示した．そして，単純なネットワークでのパラメータ推定を行い，本手法の有用性について考察した．単純なネットワークのため，本手法と従来からの最小二乗法とではパラメータの推定値自体には大きな違いは見られなかったが，本手法を用いることによって，均衡モデルのパラメータの有意性やモデル選択の検討が可能であることなどが確認できた．

今後の課題としては，大規模ネットワークへの適用のための尤度関数の設定方法や計算アルゴリズムの開発などが挙げられる．

Appendix

$\overline{X} \equiv \sum_{a\in A} X_a/n$, $\mu \equiv \sum_{a\in A} \mu_a$, $S \equiv \sum_{a\in A} X_a$ とする．チェビシェフの不等式より，$\varepsilon > 0$ の時，次式が成立する．

$$\Pr\left[\left|\overline{X}-\mu\right|>\varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left[\overline{X}\right] = \frac{\mathrm{Var}[S]}{n^2\varepsilon^2} \tag{14}$$

ただし，$\mathrm{Var}[S] = \sum_{a\in A} \sum_{a'\in A} \sigma_{aa'}$ であり，$\sigma_{aa'}$ は以下の通りである．

$$\sigma_{aa'} = \begin{cases} \mathrm{Var}\left[X_a\right] & \textit{if } a = a' \\ \mathrm{Cov}\left[X_a, X_{a'}\right] & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

ここで，上で述べたリンク相関の局所性により，（$n \to \infty$ の時であっても）$|\sum_{a'\in A} \sigma_{aa'}| < \nu_a$ となる $0 < \nu_a < \infty$ が存在する．$\nu \equiv \max[\nu_a; {}^{\forall}a \in A]\ (\nu < \infty)$ とすると，$\mathrm{Var}[S] < \sum_{a\in A} \nu_a \le n\nu$ となる．ただし，max は最大値をとる演算である．この ν を用いると，式 (14) は以下の通りとなる．

$$\Pr\left[\left|\overline{X}-\mu\right|>\varepsilon\right] < \frac{\nu}{n\varepsilon^2} \tag{16}$$

したがって，$n \to \infty$ の時，${}^{\forall}\varepsilon > 0$ について，$\Pr[|\overline{X}-\mu| > \varepsilon] = 0$ となり，$\overline{X}$ は μ に確率収束する．これを局所相関の確率変数の大数の弱法則と呼ぶことにする

参考文献

1) 北村隆一，森川高行：交通行動の分析とモデリング，技報堂出版，東京，2002.
2) Train, K.E.: Discrete Choice Models with Simulation, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003
3) 須鎗弘樹：複雑系のための基礎数理：べき乗則とツァリスエントロピーの数理，牧野書店，東京，2010.

(2012. 8. 3 受付)

A STUDY ON THE PROPERTIES OF LIKELIHOOD STATISTICS FOR PARAMETER ESTIMATION ON TRAFFIC NETWORKS

Sho-ichiro NAKAYAMA