

# 混雑ゲームにおける Non-atomic モデルの 数値計算特性について

張 洋<sup>1</sup>・G. C. Peque, Jr.<sup>2</sup>・宮城俊彦<sup>3</sup>

<sup>1</sup>非会員 学生 東北大学大学院情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒980-8577 仙台市青葉区片平  
2-1-1)

E-mail: zhangy@plan.civil.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>非会員 学生 東北大学大学院情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒980-8577 仙台市青葉区片平  
2-1-1)

E-mail: gpequejr@plan.civil.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 教授 東北大学大学院情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒980-8577 仙台市青葉区片平  
2-1-1)

E-mail: toshi\_miyagi@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は, Miyagi and Peque, Jr.(2012a, 2012b)によって開発された混雑ゲームにおける Informed-User(IU)アルゴリズム(Miyagi and Peque, Jr,2012a)および Naive-User(NU) アルゴリズム(Miyagi and Peque, Jr,2012b)を Non-atomic モデルとして種々のタイプのリンクコスト関数に適用した場合の数値計算特性を明らかにすることを目的としている. IU アルゴリズムとはネットワーク利用者が探査などのよって, 事後的に最小費用経路を見つけることができる場合のゲーム論的学習アルゴリズムであり, また, NU アルゴリズムとは利用者が自分の利用した経路の情報しか得ることができず, 自分のメモリ内の最小費用経路情報しか利用できない場合の経路選択行動をシミュレートするモデルである. Miyagi and Peque, Jr では, Atomic モデルを対象にしているのに対し, 本研究ではこれらのアルゴリズムを Non-atomic モデルとして機能させる場合を検討する. なお, Leslie and Collins(2005, 2006)や Cominettie et al. (2010)も経路選択モデルとして適用可能な Nonatomic モデルを提案している. 本研究では Leslie and Collins の Individual Q-Leaning アルゴリズムで提案された経路の評価値予測モデルを用いているが, 経路選択の更新式は Miyagi and Peque の方法を用いる点で, これらのモデルとは異なっている.

**Key Words :**Non-atomic games, congestion games, naive-user algorithm, Nash equilibrium

## 1. はじめに

経路選択行動を対象にした Non-atomic 学習モデルについては, Miyagi(2005, 2006)および宮城(2008)においてその有効性が明らかにされているが, これらは IU アルゴリズムであり, また, リグレットマッチング学習をベースにしている. ここで言う有効性とは, 非対称コスト関数, 階段関数のような連続微分可能ではないコスト関数あるいは凸費用関数などの ill-defined な費用関数の場合にでも適用可能であるという意味である. しかし, NU アルゴリズムでもその有効性は保てるかは検討されていない. したがって, 本研究では NU アルゴリズムの結果のみを掲載している.

Non-atomic モデルと既存の連続体モデルとの違いは, Non-atomic での意思決定主体はあくまで 1 個の粒子であり, プレイヤーは常に純粋戦略をとる. 通常確率均衡(SU)アルゴリズムでは, 意思決定主体は集団であり,

それが, 例えば, ロジットモデルに示されるような選択確率にしたがって経路選択を行うと考える. これはゲーム論的にいえば, プレイヤーは常に混合戦略に従う意思決定を行っていることを意味する. 混合戦略と行動選択の間の複雑な解釈を避けるため, 行動選択は純粋戦略であるという立場を本研究ではとる. Non-atomic モデルは区間  $[0, d]$  での測度の存在が問題になるが測度論の知識は必要はない. 区間  $[0, d]$  に無限個の粒子が存在する場合を通常 Non-atomic モデルと称し, 有限の粒子の存在する場合を games with many players と区別する場合もあるが, 本研究では特に区別せず後者の意味で Non-atomic モデルという用語を使用する.

Non-atomic 均衡の存在は Schmeidler(1973)によって提案され, その後, 協力ゲームや競争ゲームに関わる多くの数理経済学者によって研究が進められてきており, ここで改めてレビューする必要は無かろう. 本研究の立場で言えば, Atomic モデルにおいて一人のエージェントが多

数の利用者で構成される場合に相当することを述べるだけで十分である。

本研究の構成は次のようである。まず2章では、本研究で用いられる用語に関連した定義から始め、混雑ゲームにおいて重要な概念であるポテンシャルゲームについて触れる。ポテンシャルゲームは **atomic** モデルを前提にしているので、ここでは、**Non-atomic** モデルとの関係についても触れる。第3章では、本研究の中心テーマである Miyagi and Peque. の NU アルゴリズムについて触れる。そして、第4章で、その特性を数値解析を通して明らかにする。

## 2. Non-atomicモデル

### (1) 設定

プレイヤーの集合を  $\mathbf{I} = \{1, \dots, N\}$  , 行動集合を  $\mathbf{A} = \{1, \dots, k, \dots, M\}$  とおく。本研究の設定では行動集合は経路集合に直接対応しているので選択肢集合と呼ぶこともできる。プレイヤー  $i$  の行動 (純粋戦略) を  $a^i \in A$  ,

プレイヤー  $i$  を除くプレイヤーの行動を  $a^{-i} \in A$  をとおき、行動プロファイルを  $a = (a^i, a^{-i})$  で表わす。行動は一般的に既述する場合、 $a^i \in A$  または  $k \in A$  で表わす。

パスフローを  $M$ -次元ベクトル  $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_M)$

で表す。リンク集合  $\mathbf{L}$  とおき、リンク  $\ell \in \mathbf{L}$  のフローを  $\{f_\ell\}$  とおく。リンクパス行列の要素を  $\{\delta_{\ell,k}\}$  で表わす。

経路選択確率を  $\pi_k^i$  あるいは  $\pi^i(k, a^{-i})$  ,  $k \in A^i$  とおく。ステージ  $t$  までにプレイヤー  $i$  が経路  $k$  を訪問する平均回数は次式で定義できる。

$$x_{k,t}^i = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t \mathbf{1}\{a_s^i = k\} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{1}\{\cdot\}$  は指示関数で括弧内の命題が真の場合、

1 , 偽の場合 0 の値をとる。このとき、OD フロー  $\{d_i\}$  ,

集計化されたパスフロー  $\{h_k\}$  , リンクフロー  $\{f_\ell\}$  の関

係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} x_{k,t}^i &= d^i \\ \sum_{i \in \mathbf{I}} x_{k,t}^i &= h_{k,t}, \quad \forall k \in A \\ f_{\ell,t} &= \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{\substack{\ell \in k: \\ k \in A}} x_{k,t}^i, \quad \forall \ell \in \mathbf{L} \end{aligned} \quad (2)$$

リンクコスト関数  $C_\ell(f_\ell)$  で表し、経路  $k \in A$  のコストを次式で定義する。

$$c_k^i(f) = \omega^i \sum_{\ell \in k} C_\ell(f_\ell) \quad (3)$$

ここに、 $\omega^i$  はプレイヤー  $i$  の時間価値。リンクコストは、粒子モデルとは異なり、時間平均フローの関数である。経路選択確率を次式で与える。

$$\beta_k^i = \frac{\exp(u_k^i / \mu_i)}{\sum_{k \in A} \exp(u_k^i / \mu_i)} \quad (4)$$

ただし、 $u_k^i(\mathbf{h}) = -c_k^i(\mathbf{h})$  である。

### (2) ポテンシャル関数

混雑ゲームはポテンシャルゲームであり、非巡回ゲームの一種である。粒子ゲームのポテンシャル関数は次式で定義できる。ポテンシャル関数はプレイヤーと独立に定義される関数である。

$$\phi(\mathbf{a}) = \sum_{\ell \in \mathbf{A}} \sum_{k=1}^{f_\ell(\mathbf{a})} C_\ell(k) \quad (5)$$

これを变形すると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}) &= \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} \sum_{k=1}^{f_\ell(\mathbf{a})} C_\ell(k) + \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} C_\ell(\sum_{a^{-i} \in A^{-i}} \mathbf{1}\{\ell \in a^{-i}\} + 1) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} \sum_{k=1}^{f_\ell(\mathbf{a})} C_\ell(k) + \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + 1) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに  $f_\ell^{-i} = \sum_{a^{-i} \in A^{-i}} \mathbf{1}\{\ell \in a^{-i}\}$

ポテンシャル関数とコスト関数の関係は次のようである。

$$\phi(a^i, a^{-i}) - \phi(b^i, a^{-i}) = \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + 1) - \sum_{\ell \in \mathbf{B}^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + 1) \quad (7)$$

同様に、経路コストの変分は次式で定義できる。

$$c^i(a^i, a^{-i}) - c^i(b^i, a^{-i}) = \sum_{\ell \in \mathbf{A}^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + 1) - \sum_{\ell \in \mathbf{B}^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + 1) \quad (8)$$

したがって、利得関数の差分 = ポテンシャル関数の差分

になる。非粒子モデルのポテンシャル関数はよく知られた Beckmann によって与えられた関数である。

(8)式は、他のプレイヤーの経路変更はないものと仮定して、プレイヤー  $i$  が経路を  $a^i$  から  $b^i$  に変更した場合のコスト変化を表わし、したがって、プレイヤー  $i$  が選択する経路の限界コストを表わしている。経路変更によってポテンシャル関数が減少しない場合、それはプレイヤー  $i$  の一方的行動変化によって、自己のコストを変化することができない状況を表わしている。どの経路がコストを減少させる経路かを判断するために、プレイヤー  $i$  は行動選択の前に経路探索を行い、現在の選択経路よりも費用が安価な経路が存在しなくなるまで経路変更を続ける。混雑ゲームではそのような改善経路は少なくとも 1 つ必ず存在し、それはポテンシャル関数を単調に減少させることが分かっている。

非粒子モデルでは、プレイヤーを無限分解可能としているので、(8)は次のように変更できる。

$$c^i(a^i, a^{-i}) - c^i(b^i, a^{-i}) = \sum_{\ell \in a^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + \alpha) - \sum_{\ell \in b^i} C_\ell(f_\ell^{-i} + \alpha), \quad (9)$$

where  $0 < \alpha \leq 1$

すなわち、一人のプレイヤーが非常に多くのユーザーで構成されている場合、一人のユーザーの経路変更に伴う限界的变化はほとんど無視できるようになり、 $\alpha$  を限りなくゼロにすることができる。このような経路情報を利用できる経路選択アルゴリズムを IU アルゴリズムと呼ぶ。すなわち、IU アルゴリズムではプレイヤーが経路探索を実行できる計算能力と情報を持っていることを前提にしている。しかし、その情報は事後的なものなので、次のステップで経路選択を行なうときには、他のプレイヤーがどの経路を選択するか未知であるという不確実性のため、ランダム選択を行なうことになる。

### 3. NUアルゴリズムの概要

紙面の都合上、ここでは NU アルゴリズムのみについて概要する。NU アルゴリズムは、プレイヤーは自分の利用した経路の情報しか知らないことを前提にしている。したがって、利用しなかった経路をどのように予測するかかが重要になる。本研究では、Leslie and Collins (2005)によって提案された手法を用いる。すなわち、経路の  $k \in A$  の利得の推定を次式で与える。

$$\hat{u}_t^i(k) = \begin{cases} \hat{u}_{t-1}^i(k) + \lambda_t^i (U_{t-1}^i - \hat{u}_{t-1}^i(k)) / \pi_t^i(k), & \text{if } a_{t-1}^i = k \\ \hat{u}_{t-1}^i(k), & \text{if } a_{t-1}^i \neq k \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 $\lambda_t^i$  は次の条件を満足するパラメータである。

$$\sum_{t \geq 0} \lambda_t^i = \infty, \quad \sum_{t \geq 0} (\lambda_t^i)^2 < \infty \quad (11a)$$

$$\frac{\lambda_t^i}{\lambda_{t+1}^i} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (11b)$$

これを(4)式の選択確率に適用し、各経路の選択確率を求める。ロジットモデルのパラメータ  $\mu^i$  はリグレット測度 (Hart and Mas-Colell, 2000) を用いて更新する。リグレットは、プレイヤーがこれまでに利用してきた経路の実現利得の平均値 (あるいは経路コストの時間平均値) よりも早い経路が存在する場合、正のリグレットが発生する。負のリグレットが発生する場合には正の小数に置き換える。

Miyagi and Prque の NU アルゴリズムでは(4)式をそのまま利用するわけではない。プレイヤーは予測された経路評価値  $\{\hat{u}_t^i(k)\}$  に基づき、仮の最適応答経路の決定する。

$$k^* = \arg \max_{k \in A} u_k^i(k) \quad (12)$$

この経路の選択確率を経路評価値に基づきロジットモデルで評価し、新たな経路選択確率を次式で更新する。

$$\pi_t^i(k^*) = \varepsilon \beta_t^i(k^*) + (1 - \varepsilon) \quad (13)$$

ここに、 $\varepsilon$  は前もって与えられたパラメータで慣性 (Young, 2004) と呼ぶことにする。すなわち、前に選択した経路に留まろうとする性向を表わす。したがって、何度も仮の最適応答経路として選択されればされるほど、その経路を選択する確率は 1 に近づく。これは、経路評価値があくまで予測値なので、経路評価値のロバストネスを高めるために必要である。

### 4. 数値計算例による特性分析

以下の計算例では、NU アルゴリズムを対象に、コスト関数を線形関数に限定し、①異なる時間価値をもつ利用者、②非対称ヤコビアンのコスト関数、そして③階段関数 (非連続関数) の各々の場合について検討している。

#### (1) 基本ケース

計算には Braess のパラドックスで知られる図-1 の 3 つの経路で連絡される単一 OD ネットワークを利用する。リンクパフォーマンス関数には次式を仮定する。

$$\begin{aligned} c_1(f_1) &= f_1 + 50, & c_2(f_2) &= f_2 + 50 \\ c_3(f_3) &= 4f_3, & c_4(f_4) &= 4f_4, & c_5(f_5) &= f_5 + 10 \end{aligned} \quad (14)$$

また、次の OD フロー保存条件を仮定する。

$$h_1 + h_2 + h_3 = 8 \quad (15)$$

利用者は一様であり、すべて同じ時間価値をもつと仮定する。このネットワークで実現される利用者均衡の特徴を表-1 に示す。表-1 はリンク 5 に課す料金に応じてどのような Nash 均衡解（利用者均衡フロー）と経路費用が生じるかを示したものである。

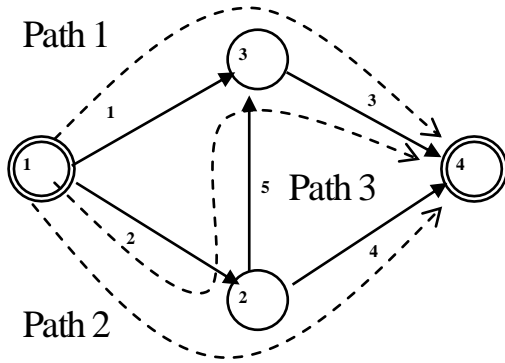


図-1 計算用のネットワーク：リンク上の数値はリンク番号、二重丸はセントロイドを表す。

表-1 設定料金別の利用者均衡

	料金	経路 1 利用者数	経路 2 利用者 数	経路 3 利用者数	所要 コスト
基本ネット	0	0	0	8	82
料金政策 ネット	7	1	1	6	79
	14	2	2	4	76
	21	3	3	2	73
	28	4	4	0	70

オリジナルの Braess ネットワークと異なり、基本ネットでは経路 3 をすべての利用者が利用し、このときすべての経路の所要コストは等しく、82 単位（82 円と表記する）になる。リンク 5 の設定料金を 7 単位（7 円と表記する）増加させていくと経路 3 の利用フローは 2 単位ずつ減少し、28 円の料金設定で経路 3 のフローはゼロになる。表-1 に示された結果は理論値を表示しているが、NU アルゴリズムでもほぼ理論どおりの結果を得ることができる。この結果については、紙面の都合上、割愛する。

## (2) 異なる時間価値の利用者が存在する場合

8 人の利用者の利用者のうち、2 名は高い時間価値を持つと仮定し、時間価値ベクトルを  $\mathbf{w} = (1.5, 1.5, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$  に設定する。このケースを 28 円の料金がリンク 5 に付加されたに適用する。結果を表-2 に示す。なお、経路コストの括弧内の数値は

利用者数を示す。

表-2

	経路 1 コスト	経路 2 コスト	経路 3 コスト	利用者 数
高い時間価値の利用者	109.43 (0)	109.57 (0)	106.0 (2)	2
低い時間価値の利用者	72.95 (3)	73.05 (3)	80.0 (0)	6

時間価値がすべて等しい場合の基本ケース例では、経路 3 の利用者はゼロである。しかし、時間価値の高い 2 名は、経路 3 を利用する。経路 3 は経路 1 と 2（73 分）と比べ所要時間の最も小さな経路（52 分）であるが、料金抵抗のため低時間価値利用者にとっては不利な経路になり、誰も利用しない。一方、所要時間に早い経路に重みをおく、高時間価値利用者にとっては価値が高い経路になる。また、それぞれの時間価値グループ（このケースで 2 タイプ）ごとに Wardrop 均衡が成立する。

## (3) 非対称ヤコビアンのコスト関数

あるリンク  $a$  の走行コストが当該リンクのフローのみならず他のリンクのフローにも影響を受ける場合、リンク  $a$  の所要コストは  $t_a(f_a, f_b)$  で表される。より一般的に

はベクトル関数  $t_a(\mathbf{f})$  で記述できる。線形コスト関数を  $\mathbf{c} = \mathbf{A} + \mathbf{Bf}$  とおき、係数行列が次のように与えられる場合を想定する。このケースでは各経路のリンクコストが流入リンクのフローと相関がある場合を想定している。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 4 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

リンク 5 の料金負担は 7 円と設定する。この場合、基本ケースの計算例では経路 3 には 6 人が利用する。リンク 5 への利用者数の増加は、経路 1 および経路 2 の利用者との相互作用で経路の 3 の経路のコストを増幅させる。その結果、経路 3 の利用者数を減少させ、リンク 5 に 14 円を負荷したときの同じ結果をえる。

$$\mathbf{z} = [1.99 \quad 2.03 \quad 3.98]$$

$$\mathbf{u} = [75.87 \quad 76.09 \quad 75.94]$$

また、経路フローの収束の状況を図-2 に示す。（青：経路 1、緑：経路 2、赤：経路 3）

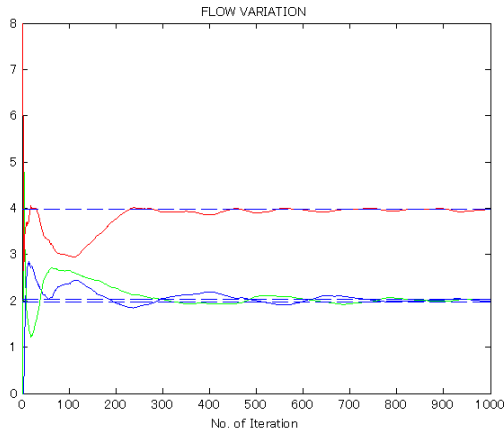


図-2 非対称ヤコビアンの場合の経路コストの変動

#### (4) 階段関数

ここでは、流出側のフローに応じてリンク 5 の料金抵抗が変化する場合を考える。この設定は混雑料金問題に適用することができる。リンク 5 のパフォーマンス関数をリンク 3 の交通量に応じて次のように変化させる。

$$C_5 = \begin{cases} 7 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 < 2 \\ 14 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 < 3 \\ 21 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 < 4 \\ 28 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 < 5 \\ 35 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 < 6 \\ 35 + C_5(f_3) & \text{if } f_3 \geq 6 \end{cases}$$

経路 3 においてリンク 4 はリンク 5 の後続リンクであり、リンク 4 の利用台数に応じてリンク 5 に混雑料金を課してコントロールする。これを基本ネットに適用してみる。この結果、均衡フローとコストは次のようになる。

$$\mathbf{z} = [3.91 \quad 3.91 \quad 0.18]$$

$$\mathbf{u} = [70.27 \quad 70.27 \quad 70.91]$$

経路 3 (赤表示) は当初利用されるが、次第に使われなくなり、3つの経路は同じ費用に近づく。経路 1, 2 は同じ利用者数 4.0 に漸近する。この様子を示したのが図-3 である。

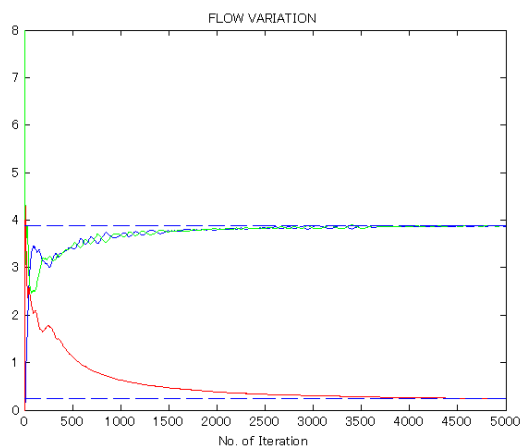


図-3 階段関数の場合 (経路コスト)

#### (5) 凸費用関数のケース

凸費用関数は規模の経済が働く部分を含むため、複数均衡解が発生する。リンク 5 の費用関数が 2 次関数の場合を考える。

$$C_5(f_3) = 17 + (f_3 - 6)^2$$

この場合、経路 3 はフローが 2 以下の場合には規模の経済が働く領域になる。すなわち、フローが経路 1 と 2 に集中すると、経路 3 が有利な経路になる。しかし、経路 3 にフローが流入し始めるとコストは急速に増大していく。均衡フローは経路 1, 2 にフローが集中し、経路 3 がわずかなフローを分担するケースと経路 3 にフローが集中し、経路 1 と 2 がわずかなフローを分担する 2 ケースが生じる。NU では初期値をランダムに与えることによってこれら 2 つのケースが発生する。

### 5. まとめ

本研究は Miyagi and Peque, Jr. によって提案された NU アルゴリズムを各種のコスト関数をもつネットワークに適用し、その特性を数値解析することを目的とした。紙面の都合上、線形関数を中心にした結果を掲載しているが、BPR 関数のような非線形関数にも適用している。また、リンクコストが区間で一樣なランダム変数の場合にも適用可能であることも分かっている。また、リンクコスト関数が強い非対称性を持つ場合には Wardrop 均衡は安定的ではなく、Nash 均衡は安定的な解に収束するなど、これまで理論的に言われていたことを数値的にも再現できることを確かめている。これらのことは、著者の一人の従来研究でも確認されていることであるが、本研究で用いたアルゴリズムとは異なっている。本研究の成果は NU アルゴリズムでも同様の結果を得たことである。

- 1) IU アルゴリズム、NU アルゴリズムともに多様なコスト関数をもつネットワーク均衡問題に適用可能であり、Nash 均衡あるいは Wardrop 均衡を求めることができる。
- 2) 一樣なプレイヤーを対象にする場合には、N-person, Atomic アルゴリズムは 1-person, Non-atomic アルゴリズムと等価である。これはコスト関数がスケール不変な関数の場合、成立する。したがって、N-person でトリップ数が多い場合でも計算労力は変わらない。
- 3) NU アルゴリズムは利用可能経路を限定するためには K 経路探索アルゴリズムや Dial 法を用いる必要があるが、各反復では最短経路探索を必要としない。最小費用経路かどうかの判別は、利用しなかった経路の予測値とユーザーのメモリーに依存する。この点は Miyagi and

Peque, Jr (2012b)でも指摘されているが改めてここで強調しておく必要がある。

#### 参考文献

- 1) Cominetti, R., E. Melo and S. Sorin : A payoff-based learning procedure and its application to traffic games, *Games and Economic Behaviour* 70, 2010, pp.71-83.
- 2) Hart, S. & A. Mas-Colell(2000): A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium, *Econometrica* 68(5), pp.1127-1150.
- 3) Leslie DS, Collins EJ.(2005). Individual Q-learning in normal form games. *SIAM J. Control and Optimization*, 44(2), pp. 495-514.
- 4) Leslie, D.S., and Collins, E.J.: Generalized weakened fictitious play. *Games and Economic Behavior*, 56, 2006, pp.285-298.
- 5) Miyagi, T. (2005): Stochastic fictitious play, reinforcement learning and the user equilibrium in transportation networks, A paper presented at the IVth meeting on "Mathematics in Transport", University College London.
- 6) Miyagi, T. (2006): Multiagent learning models for route choices in transportation networks: An integrated approach of regret-based strategy and reinforcement learning, CD-ROM Proc. of 11th International Conference on Travel Behavior Research, Kyoto.
- 7) 宮城俊彦(2007) : 不確実な交通環境下での経路選択行動のモデル化と Nash 均衡, 土木計画学研究発表会講演集, pp.
- 8) 宮城俊彦(2008)経路情報が利用可能な場合におけるリグレット最小化基準に基づく経路選択行動のモデル化,土木計画学研究・論文集 25(3), pp.673-681.
- 9) Miyagi, T., and G.C. Peque, Jr (2012a): Informed-user algorithms that converge to Nash equilibrium in traffic games, *Social and Behavioral Science*, Elsevier. (To be published).
- 10) Miyagi, T., and G. Peque, Jr (12b): Naive-user algorithm that converges to Nash equilibrium in traffic games, *ISTTT*, (submitted).
- 11) Schmeidler, D.: "Equilibrium Points of Non-atomic Games," *Journal of Statistical Physics*, 7(1973), 295-300.
- 12) Young, P.H. (2004): *Strategic Learning and Its Limits*. Oxford University Press, NY.

## A Study on Numerical Calculation Properties of Non-atomic Model in Congestion Games

Yang Zhang, G. C. Peque, Jr., Toshihiko Miyagi

The purpose of this study is to clarify the numerical calculation properties of Naive-User algorithm in congestion games which developed by Miyagi and Peque, Jr., as a Non-atomic model applied to many types of cost functions. UN model is a model that users can only get the path information of their own experience, and to use the minimum cost in their memories to choose the path. For Miyagi and Peque, Jr. with regard to the Atomic model, this paper is subject to these algorithm which function as Non-atomic model.