ネットワークGEV型経路選択モデルを用いた確率的利用者均衡配分

原　祐輔[1]・赤松　隆[2]

[1]正会員　日本学術振興会特別研究員 (PD) （〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1）
E-mail: hara@bin.t.u-tokyo.ac.jp
[2]正会員　東北大学大学院教授　情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は，ネットワーク GEV モデルを用いた確率的利用者均衡配分 (SUE) モデルの提案を行う．ロジット型 SUE はその理論的性質と計算の容易さにより，多くの研究が蓄積されているが，重複経路における経路選択肢間の相関によって，不自然な経路負荷が行われることが指摘されている．このような経路間の相関を扱う既存の経路選択モデルでは経路列挙が必要となり，大規模ネットワークへの適用が困難であった．本稿では，まず実際の道路ネットワーク構造を直接的に用いて経路間の相関構造を表現するネットワーク GEV モデルの提案を行い，ネットワーク GEV 型 SUE と等価な最適化問題を示す．さらに，確率的配分の等価最適化問題の解法に対して，マルコフ連鎖配分や Dial のアルゴリズムをネットワーク GEV モデルに拡張した経路列挙を必要としない解法を示す．この提案モデルが経路重複が存在するネットワークへの交通量配分に対応可能であることを実例を用いて示し，ロジット型 SUE に対する優位性を明らかにする．

Key Words : *traffic assignment, stochastic user equilibrium, network GEV model, route choice model*

1. はじめに

確率的利用者均衡 (SUE) モデルは理論的に優れたモデルであるが，経路選択モデルに関する実適用上の問題点として，1) 経路選択肢間の類似性の表現法，2) 経路選択肢集合の決定法の 2 つを挙げることができる．

1) に関して，重複経路におけるロジットモデルの IIA 特性による問題は古くから指摘されている．これに対して，主に行動モデル側から IIA 特性を緩和する研究がなされてきた．古くから提案されている方法は経路選択モデルとして Probit モデルを適用する方法である．これは選択肢集合の誤差項がリンクごとに独立な正規分布に従うと仮定し，経路選択を行う方法であるが，計算量が膨大になることなどからあまり適用されていない．GEV 型の経路選択モデルを用いるアプローチとして，Vovaha and Bekhor [14]や Prashker and Bekhor [13]は Cross Nested Logit (CNL) モデルを用いた方法を提案している．これは経路を選択肢に，各リンクをネストとして表現し，その経路長の重複率をアロケーションパラメータで表現したモデルである．これは Bekhor and Prashker [4]によって Generalized Nested Logit(GNL) 型確率的利用者均衡配分モデルとして定式化されている．ただし，これらの方法は経路列挙が必要となり，大規模ネットワークでの適用可能性は難しい．

2) に関して，経路列挙を必要としない交通量配分として，Dial のアルゴリズム[8]は経路を列挙せずにロジットモデルに対応する交通量を負荷するアルゴリズムであり，経路を明示的に列挙することなく交通量を配分することができる．しかし，経路選択肢集合を有効経路 (Efficient Path) に暗黙的に限定しているため不自然・非現実的なフローパターンを生成する問題がある．一方で，佐々木の Markov 連鎖配分[12]を応用したロジットモデルと整合的なマルコフ連鎖配分 (Bell[5], Akamatsu[1),2)], Baillon and Cominetti [3]) はサイクリックな経路を含む全ての経路選択肢集合を扱うことができる．しかし，この方法も過大なサイクリック経路フローの生成可能性や IIA 問題の増幅の可能性が指摘されている．また，1) で挙げた重複経路の IIA 特性を緩和するモデルは既存の方法論では経路を明示的に列挙する必要があり，上記のアプローチが適用できないという問題が存在している．

そこで，本研究では明示的な経路列挙を必要とせずに経路間の相関を考慮する確率的利用者均衡配分としてネットワーク GEV モデルを用いる確率的利用者均衡配分を提案する．ネットワーク GEV モデルはロジットモデルよりも柔軟な利用者経路選択を表現することが可能であるだけでなく，ネットワーク GEV モデルの性質を用いてリンク・ノード表現を行うことで，明示的な経路列挙を行うことなく，リンク交通量の配分を可能とする．

本稿の構成は，以下の通りである．**2.** では，ネットワーク GEV モデルの性質とネットワーク GEV モデルを経路選択モデルとして適用するためのネットワークの定義，経路選択モデルの定式化を行う．**3.** では，その経路選択モデルに応じたネットワーク GEV モデル型 SUE モデルの等価最適化問題の定式化を行う．**4.** では，ネットワーク GEV 型 SUE の解法として，ロジット型 SUE の解法としてよく知られた Partial Linearization 法を示し，そのサブ問題である確率的配分の解法として，**5.** では，マルコフ連鎖配分や Dial のアルゴリズムをネットワーク GEV モデルに対応するように拡張する．**6.** では特徴的な例を用いてネットワーク GEV モデルが既存のロジットモデルの IIA 特性を緩和し，ネットワーク GEV モデルがフレキシビリティと現象表現能力を有することを示す．最後に，**7.** では，本研究のまとめと今後の課題を示す．

2. network GEV 型経路選択モデル

(1) ネットワーク GEV モデル

ネットワーク GEV モデルは Bierlaire[7]，Daly and Bierlaire[8]によって提案された離散選択モデルである．Daly and Bierlaire [8]の貢献を一言で表すならば，(1) 起点ノードが単一であること，(2) ネットワーク内に cyclic な構造を含まないことという 2 つの性質を満たした選択肢の相関構造を表す GEV ネットワークを考えることで，任意の GEV モデルを新しく生成することが可能であり，またその性質を満たしている限り，その GEV モデルは必ずランダム効用最大化理論に従うことを示した点である．

Daly and Bierlaire[8]より，ネットワーク GEV モデルを概説する．まず，GEV ネットワークを定義する．GEV ネットワークはノード集合 N，有向リンク集合 L によって定義される非 cyclic なネットワークである．各ノード i は非負のパラメータ $\theta_i > 0$，各リンク ij は非負のパラメータ $\alpha_{ij} > 0$ をもつ．このネットワークのうち，親をもたないノードは起点ノードただ一つであり，子をもたないノードは選択モデルの選択肢を表す．

選択肢の相関構造を表す GEV ネットワークは各ノード i ごとに固有の G 関数[10),6)]をもつ．GEV ネットワークの上位ノードを i，下位ノードを j としたとき，ノード i の G 関数 G^i はスケールパラメータ θ_i と下位ノードから上位ノードへの割当を表すアロケーションパラメータ α_{ji} をもちいて，

$$G^i(y) = \sum_{j \in S_i} \alpha_{ji} G^j(y)^{\frac{\theta_i}{\theta_j}} \tag{1}$$

と定義される．ここで，S_i はノード i の下位ノード集合，$\sum_i \alpha_{ji} = 1$ である．このようなノード間の再帰的な関係性が GEV ネットワークの単一起点ノードまで繰り返される．起点ノードのスケールパラメータを θ とし，その G 関数を選択モデルの G 関数とすると，選択肢集合 C に含まれる選択肢 k の選択確率は

$$P(k) = \frac{y_k \frac{\partial G}{\partial y_k}(y_1, ..., y_K)}{\theta G(y_1, ..., y_K)} \tag{2}$$

として表現される．K は選択肢数，$y_k = e^{V_k}$，V_k は選択肢 k の効用関数の確定項である．

また，GEV ネットワークの任意のノードは式 (2) の関係式を満たす再帰的な構造となっているため，どの部分ネットワークにおいても McFadden の GEV 理論[10)]，つまり効用最大化と一貫している．以上より，GEV ネットワークの任意の上位ノード i，i の下位ノード j，j の下位ノード k 間において，以下の条件付き選択確率の関係式が成り立つ．

$$P(k|i) = \sum_{j \in S_i} P(j|i) \cdot P(k|j) \tag{3}$$

where

$$P(j|i) = \frac{\alpha_{ji}(G^j)^{\mu_i/\mu_j}}{\sum_{j \in S_i} \alpha_{ji}(G^j)^{\mu_i/\mu_j}} \tag{4}$$

ネットワーク GEV モデルでは誤差項 ε^i_k は確率分布

$$F(\varepsilon^i_1, \ldots, \varepsilon^i_k) = \exp[-G^i(\exp(-\varepsilon^i_1), \ldots, \exp(-\varepsilon^i_k))]$$

に従うため，任意のノード i から選択肢 k を選択するときの期待最大化効用 $\bar{U}_i$ は G 関数の定義より次のように表される．

$$\begin{aligned}\bar{U}_i &= E[V_k + \varepsilon^i_k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max_k (V_k + \varepsilon^i_k) f(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\theta_i} \log G^i(y)\end{aligned} \tag{5}$$

このとき，式 (1) より，ノード i，j の期待最大化効用 $\bar{U}_i, \bar{U}_j$ は以下の関係性を満たす．

$$\begin{cases} \bar{U}_i = \frac{1}{\theta_i} \log \sum_{j \in S_i} \alpha_{ji} \exp[\theta_i \bar{U}_j] & \forall i, j \in N \\ \bar{U}_k = 0 & \forall k \in C \end{cases} \tag{6}$$

(2) 道路ネットワーク構造の GEV ネットワーク化

本研究では現実の道路ネットワーク構造を直接的に用いて経路間の相関構造を表現する．しかし，現実のネットワークは双方向リンクであり，またサイクリックな構造も含まれている．そこで，実ネットワーク構造を GEV ネットワークとして表現するために，実ネットワーク構造にいくつかの処理を行い，GEV ネットワークの生成を行おう．

一般的な道路ネットワークのノード集合を N，有向リンク集合を L とする．N の各要素は整数の連番 i で区別され，L の各要素は上流ノード i と下流ノード j の組 ij で区別される．リンク ij はそれぞれリンクコ

スト t_{ij} をもつ．このネットワーク上の任意の 2 点を起点 $r \in N$，終点 $s \in N$ とする単一 OD ペアを考えよう．終点 s から他のすべてのノード i に対して最小交通費用 $c(i)$(たとえば最短経路長) を計算し，起点までの最小交通費用 $c(r)$ よりも大きな最小交通費用をもつノードをまず除去する．次にすべてのリンクに対して $c(i) - c(j) > 0$ を満たすリンク ij のみを残して，それ以外のリンクを除去する．これらの処理により残るリンク集合は終点 s から遠ざかるリンクの集合である．

以上の処理によって生成されたノード・リンク集合によるネットワークは (1) 起点ノードが単一 (OD の起点ノード r である)，(2)cyclic な構造をもたないという 2 つの性質を満たすため，GEV ネットワークとして解釈することが可能である．この処理によって，道路ネットワークの幾何構造を直接的に GEV ネットワークとして変換することができる．

(3) ネットワーク GEV モデルによる経路選択モデル

上記の GEV ネットワークに対応したネットワーク GEV モデルは GEV ネットワーク上のノード選択モデルである．しかし，式 (4) の関係性から，GEV ネットワークのノード間の推移確率を道路ネットワーク上の接続するノード選択確率として解釈することができる．

上位ノードを i，下位ノードを j とすると，上位ノード i から下位ノード j を選択するノード選択確率 (リンク ij 選択確率) は式 (4) より，次式で表される．

$$P(j|i) = \frac{\alpha_{ji}\exp[-\theta_i(t_{ij}+v_j)]}{\sum\limits_{j\in S_i}\alpha_{ji}\exp[-\theta_i(t_{ij}+v_j)]} \tag{7}$$

ここで，t_{ij} はリンク ij 間のリンクコスト，v_j は終点 s からノード j への期待最小費用を表す．

次に，期待最小費用の関係式を明らかにしよう．終点からの期待最小費用 v_i に加えて，接続するリンク ij 間の期待最小費用 v_{ij} を定義する．

$$v_{ij} \equiv t_{ij} - \frac{1}{\theta_i}\log\alpha_{ji}$$

式 (6) より，ノード i，j の期待最小費用 v_i, v_j は

$$v_i \equiv -\frac{1}{\theta_i}\log(\sum_{j\in S_i}\alpha_{ji}\exp[-\theta_j(t_{ij}+v_j)]) \quad \forall i,j \tag{8}$$

という関係である．ここで，演算子 $\oplus,\otimes$

$$x\oplus y \equiv -\frac{1}{\theta_i}\log(\exp[-\theta_i x]+\exp[-\theta_i y])$$
$$x\otimes y \equiv x+y$$

を定義することで，

$$v_i = \oplus_{j\in S_i}(v_{ij}\otimes v_j) \tag{9}$$

という漸化式で表示できる．ここで，$\oplus$ 演算は

$$x\oplus y|_{\theta_i\to\infty} = \min\{x,y\}$$

であることから，min 関数の一般形として期待最小値を求める関数である．以上より，式 (9) はノード i の期待最小費用 v_i はノード j の期待最小費用 v_j とノード ij 間の期待最小費用 v_{ij} の合計の期待値

$$v_i = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}=-\infty}^{\infty}\min_j(v_{ij}+v_j+\varepsilon_j^i)f(\boldsymbol{\varepsilon})d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{10}$$

という関係性があることを示している．

3. nGEV 型確率的利用者均衡配分

(1) nGEV 型 SUE の均衡条件

利用者の経路選択行動を上記のネットワーク GEV 型経路選択行動として仮定した確率的利用者均衡状態を考えよう．その均衡状態では，リンク・ノード表現を用いると，以下の関係式が成り立つ．

a) リンクコスト関数

リンクコストはリンク交通量の関数である．

$$t_{ij} = t(x_{ij}) \tag{11}$$

b) リンク交通量の関係式

終点別リンク交通量の総和は各リンク交通量である．

$$x_{ij} = \sum_s x_{ij}^s \qquad \forall ij\in L, \forall s\in S \tag{12}$$

c) 利用者の経路選択行動

利用者が nGEV 型経路選択行動を行うとき，各リンク選択確率は以下の式で表される．

$$P(j|i) = \frac{x_{ij}^s}{\sum_j x_{ij}^s} = \frac{\alpha_{ji}\exp[-\theta_i(t_{ij}+v_j)]}{\sum\limits_{j\in S_i}\alpha_{ji}\exp[-\theta_i(t_{ij}+v_j)]} \tag{13}$$

ただし，v_j は式 (8) で定義される．

d) 各ノードでのフロー保存則

終点別リンク交通量 x_{ij}^s を用いると，フロー保存則と OD 交通量は以下の式で表される．

$$\sum_i x_{iu}^s - \sum_j x_{uj}^s + q_{rs}\delta_{ru} - \sum_r q_{rs}\delta_{su} = 0$$
$$\forall u\in N,\ \forall s\in S \tag{14}$$

ここで，q_{rs} は OD ペア rs 間の OD 交通量，δ_{ru}, δ_{su} はそれぞれノード u が起点ノード，終点ノードであるとき 1，そうでなければ 0 となるダミー変数である．

(2) nGEV 型 SUE の等価最適化問題

ここで，次のような最適化問題を考えよう．

[nGEV-SUE/FD-arc]

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}} Z(\boldsymbol{x}) = &\sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)d\omega + \sum_s\sum_{ij}\frac{1}{\theta_i}x_{ij}^s\ln x_{ij}^s \\ &-\sum_s\sum_i\frac{1}{\theta_i}\left(\sum_j x_{ij}^s\right)\ln\left(\sum_j x_{ij}^s\right) \\ &-\sum_s\sum_{ij}\frac{1}{\theta_i}x_{ij}^s\ln\alpha_{ji}^s\end{aligned} \tag{15}$$

subject to

$$\sum_i x^s_{iu} - \sum_j x^s_{uj} + q_{rs}\delta_{ru} - \sum_r q_{rs}\delta_{su} = 0 \quad \forall u \in N,\ \forall s \in S \quad (16)$$

$$x_{ij} = \sum_s x^s_{ij} \quad \forall ij \in L \quad (17)$$

$$x^s_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in L,\ \forall s \in S \quad (18)$$

この最適化問題 [nGEV-SUE/FD-arc] がネットワーク GEV 型 SUE と等価であることを示すために，最適化問題の Kuhn-Tucker 条件が nGEV 型 SUE の均衡条件と一致することを示そう．Lagrangean L を

$$L\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}\right) = Z(\boldsymbol{x}) + \sum_s \sum_k \mu_u \left(\sum_i x^s_{iu} - \sum_j x^s_{uj} + q_{rs}\delta_{ru} - \sum_r q_{rs}\delta_{su} \right) + \sum_{ij} \lambda_{ij} \left(x_{ij} - \sum_s x^s_{ij} \right)$$

と定義する．この問題の Kuhn-Tucker 条件は次のように表現される．

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{\theta_i} \ln \frac{x^s_{ij}}{\alpha^s_{ji} \sum_j x^s_{ij}} + t_{ij}(x_{ij}) - \mu_i + \mu_j = 0 \quad if \quad x_{ij} \geq 0 \ \ \forall ij \in L \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{\theta_i} \ln \frac{x^s_{ij}}{\alpha^s_{ji} \sum_j x^s_{ij}} + t_{ij}(x_{ij}) - \mu_i + \mu_j \geq 0 \quad if \quad x_{ij} = 0 \ \ \forall ij \in L \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_k} = \sum_i x^s_{iu} - \sum_j x^s_{uj} + q_{rs}\delta_{ru} - \sum_r q_{rs}\delta_{su} = 0 \quad \forall u \in N, \quad \forall s \in S \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}} = x_{ij} - \sum_s x^s_{ij} = 0 \quad \forall ij \in L \quad (22)$$

ここで，式 (21),(22) は均衡状態の制約条件式 (14),(12) に一致する．$x_{ij} \geq 0$ とすると，式 (19) より次式が成り立つ．

$$p(j|i) = \frac{x^s_{ij}}{\sum_j x^s_{ij}} = \alpha^s_{ji} \exp[-\theta_i(t_{ij} + \mu_j - \mu_i)] \quad (23)$$

これはノード i におけるリンク選択確率 (前向き推移確率) を表している．上式と各リンク選択確率の和は 1 であることを用いると，

$$\mu_i = -\frac{1}{\theta_i} \log \sum_j \alpha^s_{ji} \exp[-\theta_i(t_{ij} + \mu_j)] \quad (24)$$

が得られる．式 (24) はネットワーク GEV モデルの各ノード i におけるログサム項であり，μ_i は終点からノード i までの期待最小費用 v_i の定義そのものである．よって，利用者の経路選択行動の均衡条件 (13) と一致する．

以上より，最適化問題 [nGEV-SUE/FD-arc] の最適性条件がネットワーク GEV 型 SUE の均衡条件と一致するため，この最適化問題 [nGEV-SUE/FD-arc] はネットワーク GEV 型 SUE の等価最適化問題である．

4. ネットワーク GEV 型 SUE の解法

2. ではネットワーク GEV 型経路選択モデルを定義し，**3.** ではその経路選択モデルに基づく確率的利用者均衡配分の等価最適化問題がリンク・ノード表現できることを示した．本節では，この等価最適化問題の解法として，ロジット型 SUE の解法としてよく知られた Partial Linearization 法を述べる．

最適化問題 [nGEV-SUE/FD-arc] は終点別リンク交通量を未知変数としたリンク・ノード表現である．目的関数のリンクコスト関数積分項を部分線形化近似した以下の問題を考える．

[nGEV-SA/FD-arc]

$$\min_{\mathbf{y}} \hat{Z}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(n)}) \cdot \mathbf{y} + \sum_s \sum_{ij} \frac{1}{\theta_i} y^s_{ij} \ln y^s_{ij} - \sum_s \sum_i \frac{1}{\theta_i} \left(\sum_j y^s_{ij} \right) \ln \left(\sum_j y^s_{ij} \right) - \sum_s \sum_{ij} \frac{1}{\theta_i} y^s_{ij} \ln \alpha^s_{ji}$$

subject to

$$\sum_i y^s_{iu} - \sum_j y^s_{uj} + q_{rs}\delta_{ru} - \sum_r q_{rs}\delta_{su} = 0 \quad \forall u \in N,\ \forall s \in S$$

$$y_{ij} = \sum_s y^s_{ij} \quad \forall ij \in L$$

$$y^s_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in L, \forall s \in S$$

この問題は nGEV 型確率的配分の等価最適化問題であるため，サブ問題は次節で述べる Markov 配分の拡張または Dial のアルゴリズムの拡張によって解くことができる．

以降，SUE の解法となるアルゴリズムを述べる．

Step.0: (初期許容解の設定)
iteration $n = 0$, リンクコスト $t^{(0)}_{ij} = t_{ij}(0)\ \forall ij \in L$
このリンクコスト $\mathbf{t}^{(0)}$ に対するリンク交通量 $\mathbf{x}^{(0)}$ を次節 **5.** の確率的配分の解法を用いて得る

Step.1: (リンクコスト改訂)
リンク交通量 $\mathbf{x}^{(n)}$ を用いてリンクコストを改訂する

$$t^{(n)}_{ij} = t_{ij}(x^{(n)}_{ij}) \qquad \forall ij \in L$$

Step.2: (降下方向ベクトルの決定)
リンクコスト $\mathbf{t}^{(n)}$ に対して，次節の確率的配分を行い，リンク交通量 $\mathbf{y}^{(n)}$ を得る．降下方向ベクトル $\mathbf{d}^{(n)}$ は

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n)}$$

Step.3: (一次元探索)
以下の一次元探索問題を解き，step size α を決定

$$\min Z(\mathbf{x}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}) \qquad subject\ to\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

ここで，Z は式 (15) の目的関数である．

Step.4: (リンク交通量ベクトルの改訂)

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$$

Step.5: (収束判定)

収束していれば終了．そうでなければ $n = n + 1$ として **Step.1** へ.

このようなアルゴリズムによって，nGEV 型 SUE の解が得られる．ここで，**Step.0, Step.2** のリンクコストを一定とした場合の nGEV 型確率的配分アルゴリズムについて，次節で説明する．

5.　ネットワーク GEV 型確率的配分の解法

本節では，前節で登場した nGEV 型確率的配分の解法アルゴリズムとして，経路列挙を必要としないマルコフ連鎖配分と Dial のアルゴリズムのネットワーク GEV モデルへの拡張を提案する．

(1)　マルコフ連鎖配分の拡張

g 個の起点ノード，a 個の終点ノードを含む n 個のネットワークにおいて，終点を除くノード間の推移確率行列 $\mathbf{Q}$ が与えられているとき，起点から発生したトリップが各ノードに存在する確率は以下の逆行列で与えられる．

$$\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q^2} + \cdots = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q_1}[\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \end{bmatrix}$$

ここで，$\mathbf{Q_1}[\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1}$ は起点別ノード選択確率 $P(i)$ を表している．よって，リンク ij 間のリンク選択率 p_{ij} は以下の式で得られる．

$$p_{ij} = P(i) \cdot p(j|i) \tag{25}$$

以上より，上述の推移確率の定義を用いた推移確率行列 $\mathbf{Q}$ によって，各リンクに対してリンク交通量の配分が可能となる．

ネットワーク GEV モデルのノード間の推移確率は,

$$p(j|i) = \alpha_{ji} \exp(-\theta_i(t_{ij} + v_j - v_i)) \tag{26}$$

であるため，この推移確率を表す推移確率行列 $\mathbf{P}$ の作成には期待最小費用 v_i の算出が必要となる．そこで，期待最小費用 v_i の算出を行う行列演算を次に考えよう．次のようなリンク・ウェイト行列 $\mathbf{W}$ を定義する。

$$w_{ij} = \begin{cases} t_{ij} - \frac{1}{\theta_i} \log \alpha_{ji} & ij \in L \\ \infty & ij \notin L \end{cases} \tag{27}$$

行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ に対して，**2**. で定義した演算子 $\oplus, \otimes$ の和，積，累乗の定義を行う．

$$[\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$
$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}$$
$$\mathbf{A}^{\otimes r} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^{\otimes 0} = \mathbf{I}$$

このとき，リンク・ウェイト行列 $\mathbf{W}$ の各要素 w_{ij} は 1 本のリンクを通過して接続するノード ij 間の期待最小費用 v_{ij} を表している．よって，$\mathbf{W}$ の累乗の和を $\mathbf{V}$ と定義する．

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\otimes \mathbf{2}} \oplus \mathbf{W}^{\otimes \mathbf{3}} \cdots = \oplus_{k=1}^{\infty} \mathbf{W}^{\otimes k}$$

要素 V_{is} はノード i から終点 s までの期待最小費用を表す．この V_{is} はこれまで述べてきた v_i に他ならない．以上の行列演算によって，すべてのノード i から終点 s までの期待最小費用を算出できるため，式 (26) の推移確率が評価される．

以上より，ノード ij 間の推移確率 $p(j|i)$ が得られれば，ネットワーク GEV 型確率配分の推移確率行列 $\mathbf{P}$ を作成できるため，式 (25) を用いてマルコフ連鎖配分によって各リンクに対するリンク交通量の算出がされる．

(2)　Dial のアルゴリズムの拡張

ロジット型 SUE のマルコフ連鎖配分がネットワーク GEV 型 SUE のマルコフ連鎖配分に拡張可能であったのと同様に，Dial のアルゴリズムもまた，ネットワーク GEV 型 SUE に拡張可能である．

ロジットモデルと nGEV モデルにおける違いは Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度，リンク・ウェイトの設定のみであり，Dial のアルゴリズムの計算手順自体は変わらない．

Step.0: (準備)

(a) 終点 s から他の全てのノードへの最小交通費用 $c(i)$ を計算：

$$c(i) \leftarrow C_{min}[s \rightarrow i]$$

(b) 全リンクについてリンク尤度 $L[i \rightarrow j]$ を計算：

$$L[i \rightarrow j] = \begin{cases} \alpha_{ji} \exp[-\theta_i t_{ij}] & c(j) < c(i) \\ 0 & othereise \end{cases}$$

Step.1: (後退処理)

終点 s から $c(i)$ の値の昇順 (s から近い順) にノードを考える．各ノード i から流出するリンクのリンク・ウェイト $W[i \longrightarrow j]$ を次式により計算：

$$W[i \rightarrow j] = \begin{cases} L[i \rightarrow j] & for \quad j = s \\ L[i \rightarrow j] \left(\sum_{m \in S_j} W[j \rightarrow m] \right)^{\frac{\theta_i}{\theta_j}} & otherwise \end{cases}$$

Step.2: (前進処理)

$c(i)$ の値の降順 (r から近い順) にノードを考える．各ノード j に流入するリンク交通量 x_{ij} を次式により計算：

$$x_{ij} = (q_{is} + \sum_{m \in O_i} x_{mi}) \frac{W[i \to j]}{\sum\limits_{m \in S_i} W[i \to m]}$$

以上の手順により，ネットワーク GEV 型 SUE の交通量配分が得られる．

マルコフ連鎖配分との対応で説明すると，Dial のアルゴリズムの拡張において，**Step.1** が各ノードの期待最小費用 v_i の算出に対応し，**Step.2** が推移確率を用いたリンク交通量配分に対応している．

6. nGEV モデルによる経路重複問題の緩和

既存のロジット型 SUE は計算が容易である一方で，効用の誤差項が独立で同一なガンベル分布に従うと仮定しているため，重複するリンクをもつ経路に対する交通量負荷が非現実な結果を生じさせる．この経路重複に対してネットワーク GEV モデルではネットワークの幾何構造をそのまま誤差項間の相関構造として表現している．

しかし，その誤差項の相関構造を表現するには，各ノードごとのスケールパラメータ θ_i，リンクごとのアロケーションパラメータ α_{ji} の設定が必要である．大規模ネットワークにおいてはこれらのパラメータ数も膨大となるため，実データからこれらのパラメータを推定することは現実的ではない．そこで，ネットワーク構造を用いて θ_i と α_{ji} を構造化する必要がある．

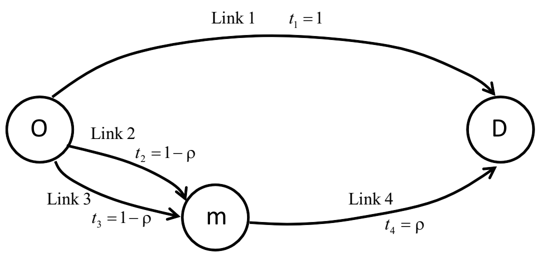
(1) パラメータの構造化設定

本稿では θ_i，α_{ji} の構造化の一つの例を示す．この構造化は単純な設定であるが，ロジットモデルの IIA 特性によって生じる問題を緩和することができることを示そう．

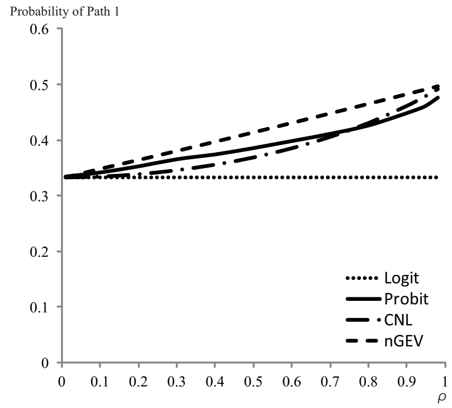
各リンクのアロケーションパラメータ α_{ji} は，下流ノード j から接続している上流ノード数を N_j とするとき，$\alpha_{ji} = \frac{1}{N_j}$ として設定する．この設定は条件 $\sum_i \alpha_{ji} = 1$ を満たしている．

各ノードのスケールパラメータ θ_i は OD ペア rs ごとに $\theta_i = \frac{c(r)}{c(i)}$ として設定する．ここで，$c(i)$ は終点ノード s からノード i までの最小交通費用である．

これらの α_{ji}，θ_i の構造化は，それぞれノード変数，リンク変数のみで設定可能であり，明示的な経路列挙や重複リンク長の計算を行う必要はない．そのため，これらのパラメータの設定に必要な計算は実用上，十分小さい．



図–1 モデルネットワーク



図–2 経路重複率に対応した経路選択モデル別選択確率

(2) モデルネットワークにおける数値計算例

上記の設定を用いて，**図–1** のモデルネットワークにおける経路選択確率を算出しよう．また，その選択確率を Logit モデル，Probit モデル，CNL モデルと比較する．モデルネットワークは 4 リンク，3 経路で構成され，リンク 1 のみで構成される経路 1 とリンク 4 を重複している経路 2，経路 3 が存在する．このとき，重複リンク長を ρ として，ρ を変化させた場合の経路 1 の選択率を図示したのが**図–2** である．

Probit モデルは各経路の経路長と重複リンクの関係を誤差項の共分散構造として表した構造化 Probit モデル[15)] を用いており，CNL モデルには経路を選択肢，各リンクをネストとし，アロケーションパラメータとして経路長に占めるリンク長の割合を用いる Link Nested Logit モデル[14)] を用いている．Logit モデルが重複リンクの影響を全く反映しないのに対し，Probit モデルや CNL モデルは ρ が 1 に近づくにつれて，経路 1 の選択率が 0.5 に近づいている．

一方で，本研究が提案するネットワーク GEV モデルも経路間の相関を捉えて，Probit モデルや CNL モデルと同様の傾向を表している．また，比較する Probit モデルや CNL モデルが明示的に経路を列挙し，その経路における重複リンク長を計算する必要があるのに対し，今回提案した θ_i，α_{ji} の設定では経路列挙や重複リンクを明示的に扱う必要がない．

以上より，上述のパラメータの設定方法によって，重複する経路間の相関構造を捉えた交通量配分が可能と

なることが示された．ただし，本稿の設定では Probit モデルに比べて，重複経路の相関が強く出ている点，またこのパラメータ構造化の理論的妥当性については今後の理論的な課題としたい．

7. おわりに

本稿では，確率的利用者均衡配分に対する新たな拡張としてネットワーク GEV 型確率的利用者均衡配分の提案を行った．このネットワーク GEV モデルはランダム効用理論に整合的な経路選択行動を記述しており，経路間の相関構造を直接的に表現することで，ロジット型 SUE の問題である経路重複による IIA 特性の解決を図っている．また，既存の経路重複を考慮した経路選択モデル (Probit モデルや Cross Nested Logit モデル) と異なり，経路変数を必要とせず，リンク・ノード変数のみで経路間の相関を考慮するため，経路列挙を必要としない交通量配分を算出することができる．また，nGEV 型 SUE による交通量配分の計算は既存のマルコフ連鎖配分や Dial のアルゴリズムの拡張によって行うことが可能であり，Probit モデルや CNL モデルと比べて，大きな計算上の利点が存在する．

このように，本稿ではネットワーク GEV 型 SUE はロジット型 SUE の自然な拡張であることを明らかにした．また，ネットワーク GEV モデルの GEV ネットワーク構造を道路ネットワークに対応させることで，ネットワーク GEV モデルが高い現象表現能力を有するフレキシビリティの高い経路選択モデルとして利用可能であることを示した．しかし，経路間の相関構造を適切に表現するパラメータの構造化については，より高度な考察を必要とするため，今後の理論的課題である．

参考文献

1) Akamatsu, T.: Cyclic flows, Markov processes and stochastic traffic assignment, *Transportation Research Part B*, Vol.30, pp.369-386, 1996.
2) Akamatsu, T.: Decomposition of path choice entropy in general transportation networks, *Transportation Science*, Vol.31, pp.349-362, 1997.
3) Baillon, J.-B., and Cominetti, R.: Markovian traffic equilibrium, *Mathematical Programming*, Vol.111, pp.33-56, 2008.
4) Bekhor, S. and Prashker, J.: Stochastic user equilibrium formulation for the generalized nested logit model, *Transportation Research Record*, Vol.1752, pp.84-90, 2001.
5) Bell, M.G.H.: Alternatives to dial's logit assignment algorithm, *Transportation Research Part B*, Vol.29, pp.287-296, 1995.
6) Ben-Akiva, M.E. and Lerman, S.R.: Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
7) Bierlaire, M., The network GEV model, in *Proceedings of the 2nd Swiss Transportation Research Conference*, Ascona, Switzerland, 2002.
8) Daly, A. and Bierlaire, M.: A general and operational representation of Generalised Extreme Value models, *Transportation Research Part B*, Vol.40, pp.285-305, 2006.
9) Dial, R.B.: A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration, *Transportation Research*, Vol.5, pp.83-111, 1971.
10) McFadden, D.: Modelling the choice of residential location. In: Karlquist, A. et al. (Eds.), *Spatial Interaction Theory and Residential Location*, North-Holland, Amsterdam, pp.75-96, 1978.
11) Prashker, J. and Bekhor, S.: Route Choice Models Used in the Stochastic User Equilibrium Problem: A Review, *Transport Reviews*, Vol.24, pp.437-463, 2004.
12) 佐佐木綱：吸収マルコフ過程による交通流配分理論，土木学会論文集, No.121, pp.28-32, 1965.
13) Prashker, J.N. and Bekhor, S.: Investigation of stochastic network loading procedures, *Transportation Research Record*, Vol.1645, pp.94-102, 1998.
14) Vovaha, P. and Bekhor, S.: The link-nested logit model of route choice: overcoming the route overlapping problem, *Transportation Research Record*, Vol.1645, pp.133-148, 1998.
15) Yai, T., Iwakura, S. and Morichi, S.: Multinomial probit with structured covariance for route choice behavior, *Transportation Research Part B*, Vol.31, pp.195-207, 1997.

(2012. 8. 3 受付)

STOCHASTIC USER EQUILIBRIUM TRAFFIC ASSIGNMENT WITH A NETWORK GEV BASED ROUTE CHOICE MODEL

Yusuke HARA, Takashi AKAMATSU