

“列車の渋滞”を抑制するための 制御方策と運行ダイヤの同時決定

大澤実¹・赤松隆²

¹非会員 東北大学大学院 情報科学研究科 博士前期課程 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)

E-mail: osawa@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3-09)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は、鉄道における列車の集群化(“列車の渋滞”)を防ぐための制御方策および、運行ダイヤを同時に決定する手法を提案する。まず遅延を防ぐための運行制御方策を検討し、制御によって運行ダイヤが維持されるための安定性条件を導く。その安定性条件を制約条件に加えたダイヤ計画問題を考慮することにより、運行制御方策と運行ダイヤが整合的に決定される。

Key Words : control strategy, stability, train timetabling problem, robustness of train timetable

1. はじめに

寺田寅彦の随筆¹⁾にも見られるように、鉄道のダイヤは乱れやすいことが古くから知られている。この原因は、列車の駅における停車時間が乗降客の数にともなって増大するためである。ひとたび遅延が発生すると、遅れた列車は次の駅でより多くの利用者に直面する。その結果、停車時間が増加することにより更に遅らされる。このとき後続列車との運転時隔は減少し、後続列車の停車時間も減少する。列車同士の相互作用という、ミクロなプロセスが繰り返されることにより、最終的には“列車の渋滞”(i.e. 団子運転)が発生するに至り、定時性が損なわれてしまう。こうした遅延の伝播は、大都市圏のように高度に相互接続された鉄道ネットワークにおいては重大な結果をもたらす。ある路線における遅延は、接続駅を介して他の路線にまで波及し、ネットワーク全体に遅延が蔓延してしまうのである。

遅延問題を解決し、ダイヤ本来の能力を維持するべく、列車の集群化を抑制するための運行制御方策が近年になって研究されている^{2),3),4)}。しかし、こうした研究は運行制御のみに特化しており、ダイヤは所与として扱われる。このため、あるダイヤが維持できたとして、そのダイヤが効率的であるか否かは判断できない。

他方で、ダイヤ自体の効率性は、専らダイヤ計画問題の側から検討されてきた。典型的なダイヤ計画問題は、所要時間や輸送能力・総利潤の観点において最適な実行可能ダイヤを求める最適化問題である⁵⁾。しかし、ダイヤ計画そのものが持つ大規模・複雑性から、古典的な研究では遅延に対する頑健性は全く考慮されてこなかった。つまり、“遅延が発生しない”という現実には

発生し得ない状況でダイヤを最適化しているに過ぎない。その結果、実際の運用上で遅延が発生すると計画した能力を発揮できず、場合によってはダイヤの実行可能性自体が失われてしまう。

運用上発生する遅延や、運行制御を考慮したダイヤ計画問題は、近年になって検討されるようになりつつある⁶⁾。しかし、既存研究の問題設定は多くが実ネットワークを対象とした複雑かつ大規模なものとなっており、計算可能性という観点に主眼が置かれている^{7),8)}。このため、本来ミクロな列車挙動に起因する遅延の伝播の影響については、そのメカニズムが考慮されていないのが現状である。この問題意識に立ち、本研究はミクロな列車の挙動を動的システムとして捉えた上で、運転制御方策とダイヤ計画問題を同時・整合的に考慮する理論的手法を提案する。

本稿の構成は次の通りである。まず、第2章において列車の運行を動的システムとして明示的に定式化する。次いで第3章において遅延の伝播を抑制する運行制御方策を構築し、制御の安定性条件を導く。更に、第4章で、導かれた安定性条件を制約式に加えた上でダイヤ計画問題を解く。この第5章では、具体的なダイヤの計算例を示す。第6章は本稿のまとめである。

2. 列車の運行ダイナミクス

本研究では、 S 個の駅が存在する単線の環状路線を対象とする。駅 s と $s+1$ は間隔 L_s で配置されており、この路線を N 台の各駅停車列車が走行している。いま、列車 n が駅 s に到着するダイヤ上の時刻を $T_{n,s}$ と呼べ

ば、ダイヤを次のように表現できる：

$$T_{n,s+1} = T_{n,s} + B_{n,s} + C_s \quad \forall n, s. \quad (1)$$

ここに、 $B_{n,s}$ はダイヤ上想定されている駅での停車時間であり、 C_s は駅 $s, s+1$ 間の走行時間である。駅 $s, s+1$ 間の規定の営業速度を v_s として $C_s \equiv L_s/v_s$ である。なお、環状路線を仮定しているため、 $S+1=1, N+1=1$ とする。

列車の挙動を表現する状態方程式もダイヤと同様の構成により表現する。具体的には、列車 n が駅 s に到着する時刻を $t_n(s)$ として、列車の挙動を記述する状態方程式が次の形で表されるとする：

$$t_n(s+1) = t_n(s) + b_n(s) + C_s \quad \forall n, s. \quad (2)$$

ただし、 $b_n(s)$ は列車 n の駅 s における停車時間を表現するサブモデルである。

各駅における列車の停車時間 $b_n(s)$ は、先行列車との運転時隔（到着時刻の差： $t_n(s) - t_{n-1}(s)$ ）に比例すると仮定する。また、各駅への乗客の到着率は一定であるとする。このとき、 $b_n(s)$ を次のように表現することができる：

$$b_n(s) = \beta_s (t_n(s) - t_{n-1}(s)) \quad \forall n, s. \quad (3)$$

ここで、 β_s は駅 s における需要の大きさを表す正の無次元パラメータであり、 $\beta_s < 1$ である。 β_s は、

[乗客の到着率 (人/単位時間)]

× [一人あたり停車時間の増分 (単位時間/人)]

という単位を持つと解釈することができる。即ち、サブモデル (3) は、駅における最低限の停車時間を表す。(3) を (2) に追加し、 $\mathbf{t}(s) \equiv [t_1(s), t_2(s), \dots, t_N(s)]^T$ とベクトル表記すれば次のようになる：

$$\mathbf{t}(s+1) = (I + \beta_s H) \mathbf{t}(s) + C_s \mathbf{1} \quad (4)$$

$$\text{where } H \equiv \text{circ}\{1, 0, \dots, 0, -1\}.$$

ただし I は単位行列。

(3) は停車時間と運転時隔との関係を捉え、遅延の伝播メカニズムを表現する。その結果、(4) で表現される列車の運行ダイナミクスは、ダイヤを均衡点として不安定であり、“列車の渋滞”が発生する。

3. 自律分散的な運行制御方策

(1) 運行制御方策とダイヤの安定性の関係

ダイヤを維持するためには、到着時刻 $\mathbf{t}(s)$ に応じて何らかのフィードバックを加えるような運行制御方策 $\mathbf{p}(\mathbf{t}(s))$ を導入する必要がある：

$$\mathbf{t}(s+1) = (I + \beta_s H) \mathbf{t}(s) + C_s \mathbf{1} + \mathbf{p}(\mathbf{t}(s)). \quad (5)$$

その結果、ダイヤを均衡点として動的システム (5) が安定であることが、運行制御方策 $\mathbf{p}(\mathbf{t}(s))$ によってダイ

ヤを維持可能となる条件である。即ち、ダイヤの近傍 $\mathbf{t}(s) = \mathbf{T}_s + \boldsymbol{\varepsilon}(s)$ で線形近似したダイナミクス：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(s+1) = (I + \beta_s H + \nabla \mathbf{p}(\mathbf{T}_s)) \boldsymbol{\varepsilon}(s) \quad (6)$$

において係数行列の固有値を 1 未満とすることが制御の目標となる。

(2) ダイヤベース制御

現実の列車運行では、ダイヤ上の停車時間 $B_{n,s}$ には余裕時分が見込まれており、発生した遅延をその余裕時分でもって吸収する制御がなされている。具体的には、乗客を乗せ終えても早発せず、停車時間を延ばすことによりダイヤ通りの出発時刻を維持する、という制御（以下、“ダイヤベース制御”）がなされている。このような制御は、遅延を $\boldsymbol{\varepsilon}_n(s) \equiv t_n(s) - T_{n,s}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(s) = [\boldsymbol{\varepsilon}_1(s), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N(s)]^T$ と定義すれば、次のように表現できる：

$$\mathbf{p}^D(\mathbf{t}(s)) = \max.\{0, \mathbf{g}_s - (I + \beta_s H) \boldsymbol{\varepsilon}(s)\} \quad (7a)$$

$$\mathbf{p}_n^D(s) = \max.\{0, g_{n,s} - (1 + \beta_s) \boldsymbol{\varepsilon}_n(s) + \beta_s \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}(s)\} \quad (7b)$$

$$\text{where } g_{n,s} \equiv B_{n,s} - \beta_s (T_{n,s} - T_{n-1,s}).$$

ただしベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し $[\min.\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}]_i \equiv \min.\{a_i, b_i\}$ 。ここで $\beta_s (T_{n,s} - T_{n-1,s})$ は“ダイヤ上必要な最低限の停車時間”であることから、 $g_{n,s}$ は停車時間 $B_{n,s}$ に見込まれた余裕時分を表現する。

ダイヤベース制御を導入することによって、(6) は

$$\boldsymbol{\varepsilon}(s+1) = (I + \beta_s H - (I + \beta_s H)) \boldsymbol{\varepsilon}(s) = \mathbf{0}$$

となる。即ち小規模な遅延については、これを完全に吸収しダイヤを維持することが可能である。ただし、遅延が拡大することで停車時間の伸びが大きくなると、この制御は不可能となる (i.e., $\mathbf{p}_n^D(\mathbf{t}(s))$ が負となり、“停車時間を延長する”という制御は実行不可能となる)。このため、遅延の伝播を抑制し、ダイヤを維持するためには十分な余裕時分 $g_{n,s}$ が不可欠であり、 $g_{n,s}$ の小さい高密ダイヤでは、遅延が伝播しがちとなる。

(3) 提案する運行制御方策

ダイヤベース制御は、実際の遅延の状況によらず、一定の出発時刻を守る制御である。余裕時分の小さい高密ダイヤにおいては、出発時刻を維持するというよりは、出発時刻にこだわらず運転時隔を維持するという視点がより重要となる。本稿では、各駅で観測された実際の到着時刻に応じて、運転時隔を維持するために各駅で動的な時間調整を実施する制御を提案する。具体的には、ダイヤベースの制御項 $\mathbf{p}^D(\mathbf{t}(s))$ に、次の項

を付加する:

$$\mathbf{p}^H(\mathbf{t}(s)) = \min.\{F\varepsilon(s), \mathbf{m}(s)\} \quad (8a)$$

$$p_n^H(s) = \min.\left\{\sum_{i=0}^{N-1} f_i \cdot \varepsilon_{n-i}(s), m_{n,s}\right\} \quad (8b)$$

where $F \equiv \text{circ}\{f_0, f_{N-1}, \dots, f_2, f_1\}$ and

$$m_{n,s} \equiv T_{n+1,s} - (T_{n,s} + B_{n,s})$$

ダイヤベース制御に (8a) を追加した結果, 制御項は全体として次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{t}(s)) &\equiv \mathbf{p}^D(\mathbf{t}(s)) + \mathbf{p}^H(\mathbf{t}(s)) \\ &= \mathbf{g}_s - (I + \beta_s H)\varepsilon(s) + \min.\{F\varepsilon(s), \mathbf{m}(s)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

制御 (9) のもとでは, 各列車は, ダイヤ上の出発時刻を必ずしも維持せず, 意図的に停車時間を延長することで, 時隔を均等化しようとする.

列車群全体に発生している遅延がある程度小さい限りにおいて, $\mathbf{p}^H(\mathbf{t}(s)) = F\varepsilon(s)$ となる. このとき, 遅延のダイナミクス (6) は

$$\varepsilon(s+1) = F\varepsilon(s) \quad (10)$$

のようになり, 全ての固有値が 1 未満となる十分条件は次のようになる:

$$\sum_{i=0}^{N-1} |f_i| \leq 1. \quad (11)$$

以降, 運行制御パラメータ f_i は条件 (11) を満たす範囲で指定する. また, 遅延を却って拡大させないために $f_i \in [0, 1]$ を仮定する.

列車群全体に遅延が発生している時, 付加項 $F\varepsilon(s)$ も大きくなる. すなわち, 比較的大きな遅延が発生しても非負性が保証されやすくなるため, あらかじめダイヤに導入する余裕時分 g_s はダイヤベース制御よりも小さくできる.

さて, $m_n(s)$ は, 駅 s における列車 n のダイヤ上の出発時刻と, 列車 $n+1$ の到着時刻の間のマージンである. ある列車に発生している遅延が非常に大きくなると, 停車時間の延長が後続列車の到着に影響を与える可能性が出てくる. $\mathbf{p}^H(s)$ の \min 関数は, このような状況においては, 後続列車の到着を阻害しない範囲で停車時間を延長するという制約を意味する.

(4) 運行制御の安定性条件

前節では制御の意味合いを明確にするために \min 関数を用いて定式化した. 本節では制御項を連続微分可能な \log -sum 変数により近似し, 近似した制御項を $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{t}(s)), \hat{p}^H(\mathbf{t}(s))$ とする:

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{t}(s)) = \frac{1}{\phi} \log(1 + \exp \phi \Psi(s)), \quad (12)$$

$$\Psi(s) \equiv \mathbf{p}^D(\mathbf{t}(s)) + \hat{\mathbf{p}}^H(\mathbf{t}(s)), \quad (13)$$

$$\hat{p}_n^H(s) = -\frac{1}{\theta} \log \left[\exp \left(-\theta \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cdot \varepsilon_{n-i}(s) \right) + \exp \left(-\theta m_n(s) \right) \right]. \quad (14)$$

パラメータ ϕ, θ について $\phi, \theta \rightarrow \infty$ とすれば $\hat{\mathbf{p}}^H(s)$ は $\mathbf{p}^H(s)$ と一致する. 以降では $\hat{\mathbf{p}}^H(\mathbf{t}(s))$ について, 制御によりダイヤを維持できる条件を調べていく.

前章における解析から, 制御項の Jacobi 行列 $\nabla \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{t}(s))$ を求めることができれば安定性は判定できた. 具体的に $\nabla \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{t}(s))$ を求め, (6) の係数行列を導けば

$$I + \beta_s H + \nabla \hat{\mathbf{p}} = (1 - a_0)(I + \beta_s H) + a_0 a_1 F \quad (15)$$

$$\text{where } a_0 \equiv \frac{\exp \phi g_{n,s}}{(1 + \exp(-\theta m_{n,s}))^{\phi/\theta} + \exp \phi g_{n,s}}$$

$$a_1 \equiv \frac{1}{1 + \exp(-\theta m_{n,s})}$$

となり, 運行制御 (12) の安定性条件は次のようになる (証明は他の文献による⁹⁾):

$$(1 - a_0)(1 + 2\beta_{\max}) + a_0 a_1 \sum_{i=0}^{N-1} f_i \leq 1 \quad (16)$$

ただし $\beta_{\max} \equiv \max_s \beta_s$.

4. ダイヤ計画問題

本稿のダイヤ計画問題では, 高頻度の平行等間隔ダイヤを仮定する. 即ち, 運転時隔は全ての列車・駅で一定で, 停車時間に見込まれる余裕時分は各列車に対して同一とする:

$$T_{n,s} - T_{n-1,s} = H \quad \forall n, s, \quad (17)$$

$$g_{n,s} = g_s \geq 0 \quad \forall n. \quad (18)$$

以上の単純化のもとでは, ダイヤ計画問題の制御変数は, 路線に導入する車両数 N , および停車時間に見込む余裕 g_s , 走行区間における営業速度 v_s のみとなり, これらの変数を特定すると運行ダイヤが決定される:

$$\begin{aligned} T_{n,s+1} &= T_{n,s} + \beta_s H + g_s + C_s \\ T_{n+1,s} &= T_{n,s} + H. \end{aligned} \quad \forall n, s \quad (19)$$

一方, 種々のダイヤ変数の間には, ダイヤのスジが交差する (i.e. 列車同士が衝突する, 単線上で追い越しを行う) ような事態が発生しないために, 物理的に満たすべき関係が存在する. まず, 環状路線であることから列車 $n+N$ は列車 n 自身であるので, 一周する所要時間が時隔 H の N 倍となる必要があることから, 運転時隔 H は g_s, v_s, N を決定すると一意に定まる:

$$H(g, v, N) = \frac{1}{N - \sum_{s=1}^S \beta_s} \sum_{s=1}^S (g_s + L_s/v_s) \quad (20)$$

列車数 N , 営業速度 v_s を増加させると時隔 H は縮まる. また, 停車時間に対する余裕時分 d_s を増加させると時隔は広がる. 運行時隔 H は非負であるので, $N > \sum \beta_s$

が成立する必要がある。これは、路線の需要に対して列車数があまりに過小だと需要をさばききれなくなることを意味している。

また、現実的な条件として $N \leq 2S$ を仮定する。これは、平均的な鉄道システムにおいては、2つの駅間に3両以上の車両が存在するような状況は現実的に発生し得ないと考えてよいからである。結局、 N の取りうる範囲は次のようになる：

$$\sum_{s=1}^S \beta_s < N \leq 2S \quad (21)$$

停車時間に見込まれる余裕 g_s には、列車数によって上限が存在する場合がある：

$$\begin{cases} 0 \leq g_s \leq (1 - \beta_s)H & (S < N \leq 2S) \\ g_s \geq 0 & (\sum \beta_s < N \leq S) \end{cases} \quad (22)$$

ただし、実際にはこの制約は g_s が非常に大きくないと有効にならない。

N が増大すると、第一に安全上の理由で営業速度は小さくならざるを得ない。また、 N が増大するという事はより高密度運行となることを意味し、列車の過減速が繰り返されるなどの混雑効果によって営業速度が減少することが考えられる¹⁰⁾。いま、単純な例として営業速度 v が、 N によって一様に制限されるとしよう：

$$v_s = v(N) \equiv V_{max} \left(1 - \frac{N}{N_{jam}}\right) \quad (23)$$

ただし、 V_{max} は列車の性能上の最高営業速度。 N_{jam} は、列車がその数だけ存在すると全く走行が不可能となる“渋滞台数”であり、 $N_{jam} = 2S$ とする。

本稿のダイヤ計画問題の目的関数としては、乗客の平均所要時間を考える。乗客の平均旅行距離が駅数にして l と調べられているとき、その所要時間を TC とすると、 TC は駅において電車を待つ時間 TW と目的地まで電車に乗っている時間 TB の和で表される：

$$TC = TW + TB.$$

本稿の仮定のもとでは、平均所要時間は次のように求められる：

$$TC(g, N) = \left(\frac{1}{2} + \frac{lN}{S}\right)H(g, N) \quad (24)$$

ここで、物理的条件(17),(22),(23)、および安定性条件(16)を考慮すれば、平均所要時間最小化問題としてのダイヤ計画問題を次のように定式化することができる：

[ダイヤ計画問題：平均所要時間最小化]

$$\min_{g, N} TC[g, N] = \left(\frac{1}{2} + \frac{lN}{S}\right)H \quad (25)$$

s.t. (17), (21), (22), (23), (物理的条件)
and (16). (安定性条件)

5. 数値計算例

デモケースとして、路線の条件が全て均質な場合、 $\beta_s = \beta, L_s = L \forall s$ の場合について考える。(25)について、平均所要時間の等高線および、許容領域を描画したものを図-1に示した。図中網掛けされた部分が停車時間制御の安定性条件を考慮した許容領域を示す。なお、 $\phi = 10, \theta = 0.2, \sum f_i = 1$ とし、路線の具体的な条件設定は表-1の通りとする。

安定性条件を考慮した平均旅行時間最小化問題(25)の最適解はAにおいて達成され、このときの最適解および平均所要時間の値は $(g^*, N^*) = (3[\text{秒}], 25[\text{台}])$, $TC^* = 1080[\text{秒}] = 18.0[\text{分}]$ となる。一方で安定性条件(16)を考慮しない場合の最適解はBにおいて達成され、このとき $(d^*, N^*) = (0[\text{秒}], 24[\text{台}])$, $TC^* = 1040[\text{秒}] = 17.3[\text{分}]$ となる。

安定性条件(16)は、基本的には最低限の余裕時分を要求する条件であることがわかる。余裕時分が含まれない、Bに基づくダイヤは不安定となり、ダイヤを維持することが不可能となる。

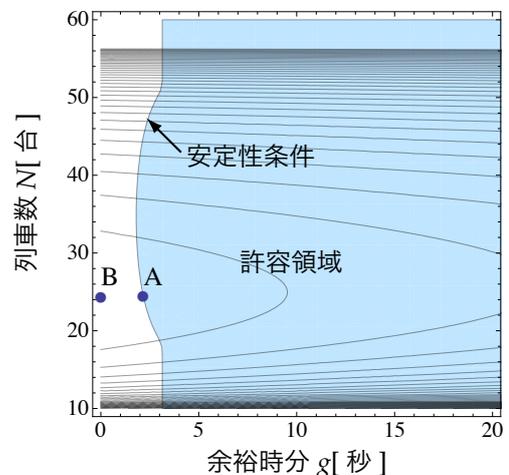


図-1 目的関数の等高線と許容領域

表-1 路線条件の設定

駅数 S	30
駅間距離 L	1200 [m]
需要 β	0.3
最高速度 V_{max}	90 [km/h]
平均トリップ長 l	$S/4$ [駅]

6. おわりに

本研究では、列車の運行ダイナミクスを明示的に動的システムとして定式化し、遅延を抑制するための運行制御方策および運行ダイヤを同時整合的に計画する手法を提案した。

参考文献

- 1) 寺田寅彦：電車の混雑について，小宮豊隆編「寺田寅彦随筆集第二巻」，岩波書店，1947.
- 2) Hickman, M. D. : An Analytic Stochastic Model for the Transit Vehicle Holding Problem., *Transportation Science*, Vol. 35, No. 3, p. 215, 2001.
- 3) Daganzo, C. F. : A headway-based approach to eliminate bus bunching: Systematic analysis and comparisons, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 43, No. 10, pp. 913 – 921, 2009.
- 4) Daganzo, C. F. and Pilachowski, J. : Reducing bunching with bus-to-bus cooperation, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 1, pp. 267 – 277, 2011.
- 5) Huisman, D., Kroon, L. G., Lentink, R. M. and Vromans, M. J. C. M. : Operations Research in passenger railway transportation, *Statistica Neerlandica*, Vol. 59, No. 4, pp. 467–497, 2005.
- 6) Cacchiani, V. and Toth, P. : Nominal and robust train timetabling problems, *European Journal of Operational Research*, in Press, 2011.
- 7) Gatto, M., Glaus, B., Jacob, R., Peeters, L. and Widmayer, P.: Railway delay management: Exploring its algorithmic complexity, *In Algorithm Theory - Proceedings SWAT 2004*, p. 2004, 2004.
- 8) Cicerone, S., D'Angelo, G., Di Stefano, G., Frigioni, D. and Navarra, A.: On the interaction between robust timetable planning and delay management, Technical Report ARRIVAL-TR-0116, ARRIVAL project, 2007. Published at COCOA 2008.
- 9) 大澤実：列車集群化を抑制する運行制御方策と運行ダイヤの同時最適化，東北大学工学部建築・社会環境工学科卒業論文，2012.
- 10) 仮屋崎圭司：都市鉄道の列車遅延の拡大メカニズムに関する研究，土木学会・土木計画学研究・講演集，Vol. 40, 2009.

(2012年8月3日受付)

A combined model of timetable optimization and stable control method for increasing schedule robustness

Minoru OSAWA and Takashi AKAMATSU