

2次元人口分布のパターン形成における分岐メカニズムに関する研究

近藤 直己*・池田 清宏**・赤松 隆***・鈴木 明憲****

*学生非会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail:kondo@msd.civil.tohoku.ac.jp

**正会員 東北大学教授 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail:ikedada@msd.civil.tohoku.ac.jp

***正会員 東北大学教授 情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail:akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

****学生非会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail:suzuki@msd.civil.tohoku.ac.jp

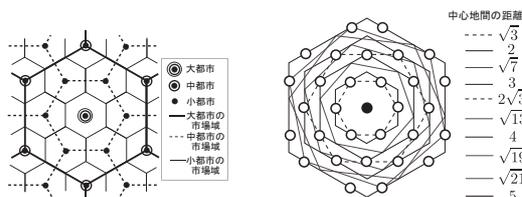
本論文では、2次元平面上における人口分布パターン形成のメカニズムを解明する。経済モデルとしては、均一な平面上の都市の集積・分散を記述する新経済地理学の Forslid & Ottaviano モデルを用い、空間モデルとしては、周期境界を持つ hexagonal lattice を用いた。これらのモデルを用い分岐解析を行った結果、経済地理学の分野で有名な Christaller・Lösch の正六角形分布の発現に関する池田らの理論予測¹⁾の正当性を示すことができた。ユニットセルの概念を導入することにより、人口分布のパターン形成のメカニズムを、見通しよく理解することができるようになり、より効率的な解析が行えるようになった。

Key Words : Forslid & Ottaviano モデル, Christaller・Lösch の中心地理論, ユニットセル, 人口の集積・分散

1. はじめに

経済地理学の分野においては、Christaller・Lösch の中心地理論が有名である。Christaller は、財を供給される都市は、供給する都市を中心に正六角形状の市場域を形成する、と論じた。また、Lösch は、Christaller の理論では考慮されていなかった傾いた六角形状の市場域を 150 種確認し、それらの重ね合わせにより Lösch の都市分布を提案した²⁾(図-1)。

本論文では、新経済地理学の Forslid & Ottaviano モデル³⁾とランダム効用理論に基づいた確率的都市選択モデルによりモデル化を行い、 $n \times n$ の節点からなる 2次元平面格子をその空間的なモデルとして用いる。池田らが提案した群論的分岐理論による理論¹⁾の数値解析による検証を行うとともに、種々の正六角形パターンを表す分岐モードがどのような格子サイズ n について発現するのかを調べた。ここでは、 $n = 10$ と $n = 15$ についての結果をまとめる。この結果、理論の正当性を確認した。また、同じ大きさのユニットセルを持つ分岐解の曲線が $n = 10$ と $n = 15$ で酷似していることを発見した。



(a) クリスタラーの分布 (b) レッシュの市場域

図-1 クリスタラー・レッシュの中心地理論

2. 都市の人口集積の均衡モデルの定式化

都市の分散・集積の経済メカニズムを表わす Forslid & Ottaviano モデルと、ランダム効用理論に基づいた確率的都市選択モデルを組み合わせたモデルを用いる。

2.1 一般均衡モデルの枠組み

- 経済は、独占的競争が行われる工業部門と完全競争的な農業部門の 2 つの部門からなる。
- 工業品の輸送には、輸送費がかかり、農業品の輸送には輸送費はかからない。
- 経済全体では、工業部門で働く High skilled worker と、工業部門または農業部門で働く Low skilled worker が存在する。
- High skilled worker は自分自身の効用を最大化するように確率的に都市間を移動することができるが、Low skilled worker は移動不可能で、すべての都市に均等に分布する。

さらに、消費者の効用最大化行動、生産者の利潤最大化行動、氷解輸送などの原理を用いる。

2.2 モデルの定式化

Forslid & Ottaviano モデルと確率的 (Stochastic) 都市選択モデルを組み合わせたモデルの支配方程式は以下

のように定式化される。(Fujita 等⁴⁾)

$$F_r(\lambda, \tau) = \frac{\exp(\omega_r \theta)}{\sum_{s=1}^n \exp(\omega_s \theta)} - \lambda_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$G_r = \left[\sum_{s=1}^n \lambda_s (T_{rs}^M)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad \omega_r = \mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu} w_r^M G_r^{-\mu} \quad (2)$$

$$Y_r = \frac{\mu \lambda_r w_r^M}{\sigma} + \frac{\sigma - \mu}{\sigma n}, \quad w_r^M = \sum_{s=1}^n \frac{(T_{rs}^M)^{1-\sigma} Y_s}{\sum_{k=1}^n \lambda_k (T_{sk}^M)^{1-\sigma}} \quad (3)$$

$$T_{rs}^M = \exp(\tau d_{rs}) \geq 1 \quad (4)$$

であり、各変数の意味は下記のとおりである。

ω_r : 都市 r の High skilled worker の実質賃金。

$\lambda_r \in [0, 1]$: 経済全体で都市 r の High skilled worker の占有率。

Y_r : 都市 r の所得。

w_r^M : 都市 r における High skilled worker の賃金。

$\mu \in (0, 1]$: 工業品への支出割合。

G_r : 都市 r の工業品価格指数。

$\sigma \in [1, +\infty]$: 任意の差別化された 2 財間の代替弾力性。

θ : 実質賃金に対する知覚誤差の分散を表すパラメータ。

T_{rs}^M : 都市 r から都市 s に工業品を運送する際の輸送費。

d_{rs} : 都市 r と都市 s の最短距離。

τ : 輸送費パラメータ。

2.3 複数の都市と輸送費用

氷塊輸送 (1 単位のうち $1/T_{rs}^M$ だけ到着工業品 1 単位当たり必要な発送数量) の形をとる輸送の技術は、都市 r で生産された工業品が当地において価格 p_r^M で販売されるなら、この財の消費地点 s における送達価格 p_{rs}^M は以下のように与えられる。

$$p_{rs}^M = p_r^M T_{rs}^M \quad (5)$$

工業品の価格指数は一般に各都市で異なる値をとることから、都市 s のそれを G_s と表す。氷塊輸送に加え、すべての種類の工業品が同一の工場渡し価格をもつという仮定は以下ようになる。

$$G_r = \left[\sum_{s=1}^n n_s (p_s^M T_{sr}^M)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad s = 1, \dots, n \quad (6)$$

都市 r で生産された財に対する都市 s における消費需要は

$$\mu Y_s (p_{rs}^M T_{rs}^M)^{-\sigma} G_s^{\sigma-1} \quad (7)$$

都市 r で生産される工業品 r の総販売量 q_r^M は、販売されていく都市に関して合計することで以下になる。

$$q_r^M = \mu \sum_{s=1}^n Y_s (p_r^M T_{rs}^M)^{-\sigma} G_s^{\sigma-1} T_{rs}^M \quad (8)$$

この式は、販売量が各都市の所得、各都市の価格指数、輸送費用および工場渡し価格に依存することを意味している。各消費地における同一種類の財の送達価格は工場渡し価格に比例しており、しかも財に対する各消費者の需要は一定の価格弾力力 σ を持つため、消費者の分布に関係なく、各財に対する総需要の工場渡し価格に対する弾力力も σ となる。

2.4 都市形状モデル

都市の地理的分布として、平行四辺形を構成する図-2(a) に示すような正 3 角形の格子状の $n \times n$ 個の都市を考える。ちなみに図-2(a) は $n = 3$ 都市のケースである。都市を丸で示し、都市間を道で結ぶものとする。周期境界を設定することにより、2 次元無限平面を近似する。

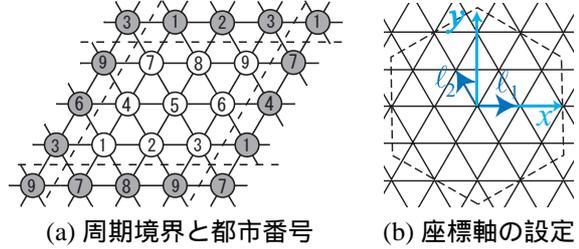


図-2 解析用多都市モデルと軸設定

3. 群論的分岐理論を用いた分岐経路の予測

3.1 対称性を表す群

群論的分岐理論により、系の対称性を記述する群に基づいて分岐解の対称性を決定する事が出来る⁵⁾。2 次元 $n \times n$ 都市群の対称性は群 $G = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle$ により記述される。ここで r は原点に対する反時計回りの $\pi/3$ 回転操作、 s は鏡映操作 ($y \mapsto -y$)、 p_1 は図-2(b) の l_1 軸 (x 軸) に沿った並進操作、 p_2 は図-2(b) の l_2 軸に沿った並進操作を表す。

3.2 2次元空間の周期性の表現

図-3 の t_1 と t_2 は最大人口都市の空間周期ベクトルを表している。

$$t_1 = \alpha l_1 + \beta l_2, \quad t_2 = -\beta l_1 + (\alpha - \beta) l_2$$

とすると、空間周期 (最大都市間の距離) は

$$\sqrt{k_l} = \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}$$

である。 $k_l = 1$ は一様分布を表す。また、 $k_l = 3$ は図-3 より、 $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ に対応する。

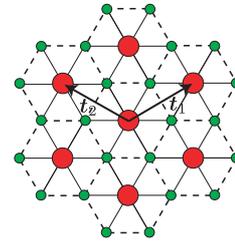


図-3 $k_l = 3$ システム

3.3 格子サイズ n と発現する六角形の関係

High skilled worker の人口が、一様分布である状況から発現可能な正六角形パターンの種類は、格子サイズ n がどのような約数を持つかにより支配されており、以下のような関係がある。

(i) n が約数 γ ($2 \leq \gamma \leq n$) を持つ時には、 $(\alpha, \beta) = (\gamma, 0)$ の正六角形が存在する。

(ii) n が約数 3 を持つ時には、 $(\alpha, \beta) = (2\beta, \beta)$ ($1 \leq \beta \leq n/3$) の正六角形が存在する。

(iii) n が $k/\gcd(\alpha, \beta)$ ($\beta \geq 1, \alpha > 2\beta$) を約数に持つ時には、(i),(ii) 以外の (α, β) に対応する傾いた正六角形が存在する。

この理論予測に従い、すべての正六角形パターンに対し予測された多重度の分岐点から発現するかどうかについて調べる。

3.4 格子サイズ n の約数と正六角形パターンとの関係

群論的分岐理論⁶⁾により、正六角形パターンが発現する分岐点の多重度が予測可能である。例えば、 $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ に対応する、サイズ $k = 4$ の正六角形分布、すなわち $k = 4$ システムは、 n が 2 の倍数の時、3 重分岐点から分岐することが分かっている。表-1 は、格子サイズ $n = 10, 15$ について理論予測をまとめた表であり、表中の M は、分岐点の多重度を示している。2 と 5 という 2 つの素因数を持つ $n = 10$ は、3 種類の正六角形状パターンを持つ。それに対し、3 と 5 を素因数として持つ $n = 15$ は、正六角形状パターンが 5 種類存在する。このように、 n の素因数の構成が正六角形パターンの多様性を支配している。

表-1 直接分岐により発現する、正六角形状パターン

$n = 10$			$n = 15$		
(α, β)	k	M	(α, β)	k	M
(2, 0)	4	3	(2, 1)	3	2
(5, 0)	25	6	(3, 0)	9	6
(10, 0)	100	6, 12	(5, 0)	25	6
			(10, 5)	75	6, 12
			(15, 0)	225	6, 12

4. 解析結果

本研究で行った一様分布からの分岐解析のうち、ここでは $n = 10, 15$ の結果をまとめる。計算分岐理論^{7),8)}により求めた輸送費-人口分布曲線を、図-4-5 に示す。これらの図の縦軸は、最大人口都市 r の人口比率 λ_r 、横軸は輸送費 τ である。実線は安定な経路を、破線は不安定な経路を、経路上の分岐点は多重度 M の値ごとに異なる記号で示している。各種パラメータとして、 $\mu = 0.4, \sigma = 5.0, \theta = 1000$ を用いた。

4.1 理論と解析結果の比較

正六角形パターンが発現した分岐点の多重度について、表-1 の理論予測と、図-4-5 の解析結果を比較する。新経済地理学の慣例にしたがい、輸送費が高い方から低い方へ、すなわち、図の右側から左側に向かって現象を調べていくこととする。そして、ある経路から正六角形状パターンを表す経路が枝分かれする始点と、その後、ある経路に戻る終点の分岐点の多重度に注目する。図-4 では、 $k = 4$ システムは、経路の両端共に理論で予測された自明解上の 3 重分岐点から発現

した。 $k = 25$ システムも同様に 6 重分岐点から発現した。 $k = 100$ では、経路の始点はループを形成する複雑な経路を経由するため追うことができなかったが、終点が自明解上の 6 重分岐点より発現している。以上の k システムは、予測した多重分岐点においての自明解から直接分岐した経路である。また、格子サイズ $n = 15$ に対応する図-5 でも、 $k = 3, 9, 25, 225$ システムについて、予測した多重分岐点において一様分布の経路より直接分岐することを確認した。しかし、 $k = 75$ システムの経路は格子サイズ $n = 15$ では、自明解より発現せず、理論予測の確認はできなかった。今後、多段階の分岐理論の構築が待たれる。また $n = 10, 15$ それぞれにおいて、今まで発見された $k = 25$ システムよりも半径の大きい中心地システムを確認できた。

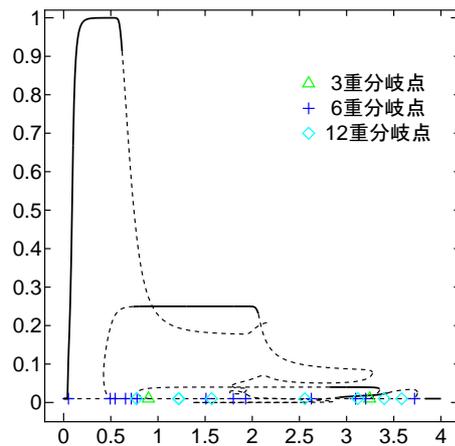


図-4 一様分布からの都市の集積: $n = 10$

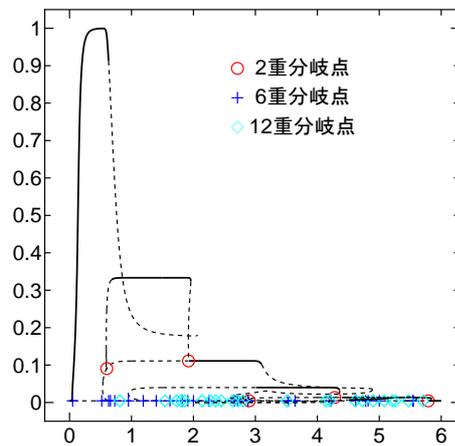


図-5 一様分布からの都市の集積: $n = 15$

4.2 ユニットセルによる考察

ここで、どちらの都市数でも共通に表れた $k = 25$ システムに注目する。図-6-7 を見て分かる通り、2 つの集積過程の構造は極めて類似している。特に太線のように区切ると、どちらも都市領域の周期境界とは別に、共通の構造を 2 次元周期的に繰り返していることが分

かる．この共通の構造をユニットセルと呼ぶ．ユニットセルとは，繰り返し配置することにより，平面を覆い尽くせる最小単位であり，中心地理論において人口が最大の都市が支配している市場域に対応している． $n = 10$ と $n = 15$ の集積の違いはその領域に含まれるユニットセルの個数の違いに帰着され，その比は平面領域の面積比 $10^2 : 15^2 = 4 : 9$ となっている．考えている平面格子は周期境界を持ち，無限に繰り返されることから，両者は同一の集積・分散挙動を表すものと考えられる．そこで， $n = 10, 15$ それぞれの， $k = 25$ システムに関する解曲線を取り出してみる．図-8-9の2つの解曲線もとても複雑であるが非常に酷似していることが分かる．このことから，両者は同様の集積・分散挙動を示していることが伺える．

現状では， $n = 10, 15$ のユニットセル内の総人口は一致していない．このため，両者の解曲線は定性的には同一に見えるが，定量的には異なるものとなっている．今後の課題としては，ユニットセル内の人口が両者で同一となるような正規化を行い，両者の解曲線の一致を確認することが挙げられる．

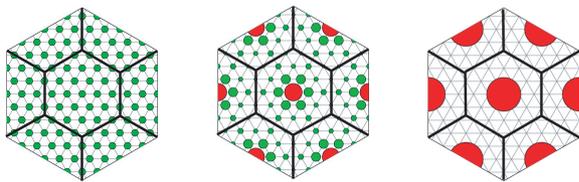


図-6 $n = 10$ の $k = 25$ システム構築過程

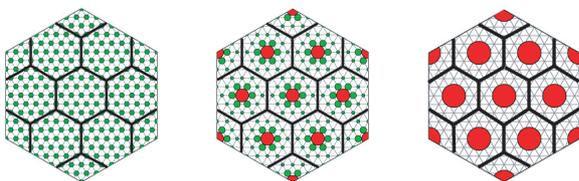


図-7 $n = 15$ の $k = 25$ システム構築過程

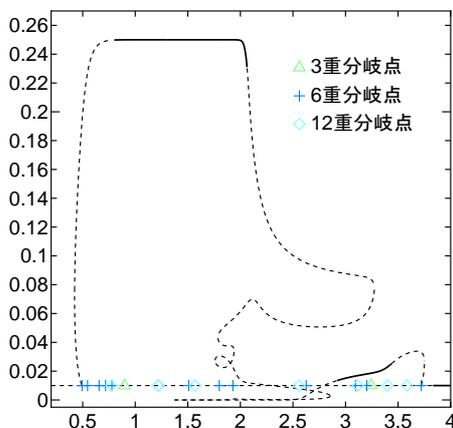


図-8 正六角形パターン ($k = 25$) の解曲線拡大図: $n = 10$

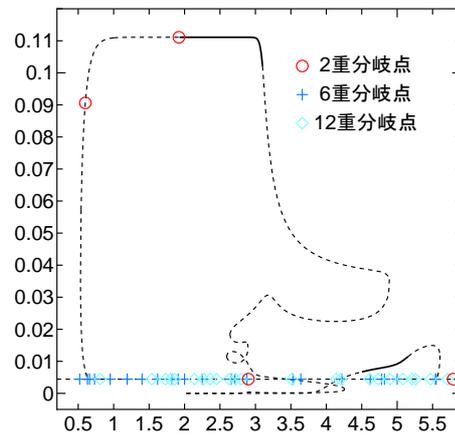


図-9 正六角形パターン ($k = 25$) の解曲線拡大図: $n = 15$

5. おわりに

解析を行う上で，池田らの考案した理論¹⁾の正当性を確認することができた，また，中心地システムと都市数の関係を記述する際に，中心地システムの発現に深く関わるユニットセルの概念を導入した．この概念により，人口分布のパターン形成のメカニズムを見通しよく理解することができたことは，本研究の大きな成果である．

参考文献

- 1) Kiyohiro Ikeda, Kazuo Murota, Yuki Takayama, *Bifurcation Mechanism of Self-Organizing Hexagons: Generalization of Lösch's Hexagons in Economic Geography*, Septembar 10, 2011
- 2) P. Dicken, P.E.Lloyd, *Location in space: Theoretical Perspectives in Economic Geography*, Prentice Hall, 1991.
- 3) R. Forslid, and G.I.P. Ottaviano, An analytically solvable core-periphery model, *J. Econ. Geog.*, 3, pp.229-340, 2003.
- 4) M. Fujita, P. Krugman and S.J. Venavles: *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 5) K. Ikeda, K. Murota, T. Akamatsu, T. Kono, Y. Takayama, G. Sobhaninejad, A. Shibasaki: Self-organizing hexagons in economic agglomeration: core-periphery models and central place theory METR, 2010.
- 6) K. Ikeda and K. Murota: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- 7) 柳本彰仁, 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁: 計算分岐理論による都市の集積分散モデルの分岐経路追跡法の提案, 土木計画学研究・論文集 No.24, pp. 191-196, 2007.
- 8) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二: 都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ, 土木学会論文集 D, 63(4), pp. 553-566, 2007.

(2012.8.3 受付)