

マルコフ・スイッチングモデルによる ポットホール発生過程

水谷大二郎¹・貝戸清之²・小林潔司³

¹学生員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: d-mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

³フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

道路巡回の目的の1つは、道路利用者の安全に支障をきたす可能性があるポットホールの発生を未然に防止することである。ポットホールの発生に関しては、晴天時に比べ、降雨後に多発することが経験的に知られている(暗黙知)。効率的な道路巡回間隔を決定するためには、ポットホール発生に関するこのような特性を分析し、発生頻度の相違を形式化していくことが重要である。そこで本研究では、高速道路の舗装のポットホールの発生状態は、局所期間毎に、低確率状態、高確率状態のいずれかの状態に属すると考え、さらにその状態変化過程はマルコフ過程に従うものとする。この条件を考慮するために、マルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルを定式化し、マルコフ連鎖モンテカルロ法による推計、マルチ・ムーブ・サンブラーによる潜在変数のサンプリングをおこなう。最後に、実際のポットホール発生データを用いた実証分析により、提案手法の有用性を検証する。

Key Words : *Markov switching model, pot hole, pavement management, MCMC*

1. はじめに

舗装マネジメントでは道路舗装の劣化事象が有する多大な不確実性を考慮して、利用者の安全の確保を前提として実施する必要がある。舗装マネジメントでは、日常的な道路巡回を通じて、ポットホール等の局所的損傷に対する応急補修を行うとともに、降雨など、経験的に局所的損傷が多く発生することが予測される場合においては、臨時的に道路巡回を実施し安全性の確保に努めている。一方で、これらのマネジメントに費やす費用や人材は限られているのが現状であり、安全性の確保を前提としながらも効率性にも配慮した舗装マネジメント手法の開発が喫緊の課題となっている。このような問題意識のもとで、すでに舗装劣化の統計的予測手法が提案され、ポットホール等に対する日常的巡回・補修政策の合理化や、舗装の劣化予測手法と連動したライフサイクル費用評価手法の高度化が試みられている。

ポットホール等の局所的損傷の発生と降雨の間には相互関係が存在することが指摘されている。これは舗装内に存在する水が舗装のひび割れやポットホールの発生メカニズムに関与するためである。したがって、局所的損傷への対処を目的とした道路巡回政策についても日常的な場合と降雨により多くの局所的損傷の発生

が懸念される場合に分けて実施することで、局所的損傷の発生過程に合わせたより合理的な舗装マネジメントを実施できる可能性がある。このとき、局所的損傷の発生過程の変化に関する知見を獲得可能なモデルを構築するとともに、発生過程の変化に合わせて巡回政策や体制を変更する時点を決めるための方法論の構築が重要となる。

以上の問題意識をもとに、本研究ではポットホール等の局所的損傷の発生過程をポアソン発生モデルとして表現する。さらにポアソン発生モデルで表される局所的損傷の発生過程がある時点で切り替わるような劣化予測モデルを提案することとする。これにより、過去の点検情報が有する統計的規則性に基づいて変化過程を定量化することを試みる。さらに、ポットホールは日常的な道路巡回で観測される。一方で、ポットホールの発生過程が変化する時点、および降雨量、降雨時間が発生過程の変化に及ぼす影響は実際には観測されない。本研究では、このように直接観測できないポットホールの発生過程や各因子の影響をマルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルを用いて表現する。

以下、2. でポアソン隠れマルコフモデルを定式化する。3. ではベイズの定理に基づくマルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルの未知パラメータ推計法について説明する。

2. モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

ある1つの道路区間に対して、分析期間 T を設定しポットホール発生個数の観測をおこなう。さらに、分析期間 T を長さ $z_t (t = 1, \dots, T)$ の局所期間 $t (t = 1, \dots, T)$ に分割する。本研究では、全ての局所期間 $t (t = 1, \dots, T)$ の長さを1日 ($z_t = 1 (t = 1, \dots, T)$) とした。対象道路区間では、各局所期間毎に数回の道路巡回が実施され、局所期間 $t (t = 1, \dots, T)$ それぞれに対するポットホール発生個数 $n_t (t = 1, \dots, T)$ が記録されている。なお、道路巡回においてポットホールが発見されると直ちに補修がなされると考える。このとき局所期間 t においてポットホールが n_t 個発生する確率をポアソン分布、

$$Po(n(z_t) = n_t | \lambda_t) = \frac{(\lambda_t z_t)^{n_t}}{n_t!} \exp(-\lambda_t z_t) \quad (1)$$

で表現する。ただし、 $\lambda_t (t = 1, \dots, T)$ は局所期間 t における到着率である。

(2) マルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデル

ポットホールの発生確率が、降雨前後で異なることを考慮するために、ポットホールの発生に対し、低確率状態の到着率 λ_t^0 、高確率状態の到着率 λ_t^1 と2種類の到着率 ($\lambda_t^0 < \lambda_t^1$) を考えると、ポットホール発生の到着率 λ_t は、2種類の到着率 λ_t^0, λ_t^1 を用いて、

$$\lambda_t = (1 - S_t)\lambda_t^0 + S_t\lambda_t^1 \quad (2)$$

と表せる。ここに、 $S_t (S_t = 0, 1; t = 1, \dots, T)$ は当該サンプルの到着率が低確率状態 ($S_t = 0$) と高確率状態 ($S_t = 1$) のいずれに属するかを表す状態変数（潜在変数）である。

また、それぞれの局所期間 t におけるポットホールの発生は、その局所期間における降水量や交通量といった道路特性に依存すると考え、特性ベクトル $x_t^0 (t = 1, \dots, T)$ 、 $x_t^1 (t = 1, \dots, T)$ の観測もおこなう。なお、特性ベクトル $x_t^0 (t = 1, \dots, T)$ は到着率 λ_t^0 に、特性ベクトル $x_t^1 (t = 1, \dots, T)$ は到着率 λ_t^1 にそれぞれ影響を与え、

$$\lambda_t^0 = \exp(x_t^0 \beta_0) \quad (3a)$$

$$\lambda_t^1 = \exp(x_t^1 \beta_1) \quad (3b)$$

と表す。ここに、 β_0, β_1 は未知パラメータ行ベクトルである。

ここで、獲得された情報を整理するために、局所期間 t の情報を $e_t (t = 1, \dots, T)$ とすると、

$$e_t = \{n_t, z_t, x_t\} \quad (4)$$

と表せる。したがって、状態変数 S_t を既知としたときのマルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルの尤度

関数 $l(e_1, \dots, e_T | \beta_0, \beta_1, S_1, \dots, S_T)$ は、

$$l(e_1, \dots, e_T | \beta_0, \beta_1, S_1, \dots, S_T) = \prod_{t=1}^T \frac{\{(1 - S_t)\lambda_t^0 + S_t\lambda_t^1\}^{n_t}}{n_t!} \exp[-\{(1 - S_t)\lambda_t^0 + S_t\lambda_t^1\}] \quad (5)$$

と表せる。ただし、本研究では $z_t = 1$ が全ての局所期間 t において成り立つため、式 (5) は、 $z_t = 1 (t = 1, \dots, T)$ としたときの尤度関数を示している。

(3) 状態変数 S_t

状態変数 S_t は、マルコフ過程に従って変化し、その推移確率は、

$$\Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 0] = p \quad (6a)$$

$$\Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 1] = q \quad (6b)$$

$$\Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] = 1 - p \quad (6c)$$

$$\Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] = 1 - q \quad (6d)$$

とすると、マルコフ推移確率行列 P は、

$$P = \begin{bmatrix} p & 1 - p \\ 1 - q & q \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表せる。状態変数 $S_t (t = 1, \dots, T)$ が与えられたとき、推移確率 p, q は他の情報 $e_t (t = 1, \dots, T)$ と独立になる。本研究では、推移確率 p, q のサンプリングに対し、2種類の独立な指数ハザードモデルをそれぞれ導入し、そのパラメータの推計をおこなう。いま、局所期間 t において、 p に関するハザード率を θ_p^t 、 q に関するハザード率を θ_q^t とする。ある局所期間 t における状態変数 $S_t (t = 1, \dots, T)$ が $S_t = 0$ であり続ける寿命を τ_p^t 、 $S_t = 1$ であり続ける寿命を τ_q^t とすると、それぞれの寿命分布を表す確率密度関数 $p(\tau_p^t), q(\tau_q^t)$ は、

$$p(\tau_p^t) = \theta_p^t \exp(-\theta_p^t \tau_p^t) \quad (8a)$$

$$q(\tau_q^t) = \theta_q^t \exp(-\theta_q^t \tau_q^t) \quad (8b)$$

$$(t = 1, \dots, T)$$

と表せる。本研究では、各局所期間 $t (t = 1, \dots, T)$ の間隔 z_t は全て1日であるため、式 (8a)、式 (8b) より、推移確率 p, q はそれぞれ、

$$p = p(1) = \theta_p^t \exp(-\theta_p^t) \quad (9a)$$

$$q = q(1) = \theta_q^t \exp(-\theta_q^t) \quad (9b)$$

$$(t = 1, \dots, T)$$

と表せる。また、ハザード率 θ_p^t, θ_q^t は、局所期間 $t (t = 1, \dots, T)$ ごとの道路特性に依存して変化すると考え、特性ベクトル $x_{pq}^t (t = 1, \dots, T)$ を用いて、

$$\theta_p^t = \exp(x_{pq}^t \alpha_p) \quad (10a)$$

$$\theta_q^t = \exp(x_{pq}^t \alpha_q) \quad (10b)$$

$$(t = 1, \dots, T)$$

と表す．ここに， α_p, α_q は，推移確率の推計に関する未知パラメータベクトルである．以上より，推移確率の推計における尤度関数 $l_{pq}(S_1, \dots, S_T | \alpha_p, \alpha_q)$ は，

$$l_{pq}(S_1, \dots, S_T | \alpha_p, \alpha_q) = \prod_{t=1}^T \left\{ p^{\delta_p^t} (1-p)^{1-\delta_p^t} q^{\delta_q^t} (1-q)^{1-\delta_q^t} \right\} \quad (11)$$

と定式化できる．ただし， δ_p^t, δ_q^t は局所期間 t の状態を表すダミー変数であり，

$$\delta_p^t = \begin{cases} 0 & S_t = 0 \text{ かつ } S_{t+1} = 0 \\ 1 & S_t = 0 \text{ かつ } S_{t+1} = 1 \end{cases} \quad (12a)$$

$$\delta_q^t = \begin{cases} 0 & S_t = 1 \text{ かつ } S_{t+1} = 1 \\ 1 & S_t = 1 \text{ かつ } S_{t+1} = 0 \end{cases} \quad (12b)$$

である．

3. 推計

(1) 潜在変数 S_t のサンプリング

2. で示した状態変数 S_t は直接観測不可能な潜在変数である．そのため，ハミルトン・フィルタを用いたマルチ・ムーブ・サンプラーにより，潜在変数 S_t をサンプリングする．

a) ハミルトン・フィルタ

t 期までの情報 ψ_t が与えられたとする． ψ_t は，

$$\psi_t = (e_1, \dots, e_t) \quad (t = 1, \dots, T) \quad (13)$$

と表せる．このとき， $S_t = j (j = 0, 1)$ となる確率 $\Pr[S_t = j | \psi_t]$ はハミルトン・フィルタを用いて求めることができる． $\Pr[S_t = j | \psi_t]$ を得るためには，まず， $\Pr[S_{t-1} = i | \psi_{t-1}] (i = 0, 1)$ が与えられたとして，次式より $\Pr[S_t = j | \psi_{t-1}]$ を計算する．

$$\begin{aligned} \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}] &= \sum_{i=0}^1 \Pr[S_t = j, S_{t-1} = i | \psi_{t-1}] \\ &= \sum_{i=0}^1 \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] \Pr[S_{t-1} = i | \psi_{t-1}] \quad (14) \end{aligned}$$

ただし， $\Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] (i = 0, 1; j = 0, 1)$ は式 (6a) ~ (6d) で示した推移確率である．次に，式 (14) に， t 期の情報 e_t を追加すれば， $\Pr[S_t = j | \psi_t]$ は，式 (5) を用いて，

$$\begin{aligned} \Pr[S_t = j | \psi_t] &= \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}, e_t] \\ &= \frac{\Pr[S_t = j, e_t | \psi_{t-1}]}{\Pr[e_t | \psi_{t-1}]} \\ &= \frac{\Pr[e_t | S_t = j, \psi_{t-1}] \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 \Pr[e_t | S_t = j, \psi_{t-1}] \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}]} \\ &= \frac{l(e_t | \beta_0, \beta_1, S_t = j) \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 l(e_t | \beta_0, \beta_1, S_t = j) \Pr[S_t = j | \psi_{t-1}]} \quad (15) \end{aligned}$$

と表せる．ただし， $\psi_t = \{\psi_{t-1}, e_t\}$ である．以上の式 (14)，式 (15) の繰返しにより， $t (t = 1, \dots, T)$ 期の $\Pr[S_t = j | \psi_t]$ をそれぞれ求めることができる．ただし， $\Pr[S_0 = j | \psi_0]$ については，定常確率

$$\Pr[S_0 = 0 | \psi_0] = \frac{1-p}{2-p-q} \quad (16a)$$

$$\Pr[S_0 = 1 | \psi_0] = \frac{1-q}{2-p-q} \quad (16b)$$

を用いた．

b) マルチ・ムーブ・サンプラー

3.(1)a) で示したハミルトン・フィルタを用いたマルチ・ムーブ・サンプラーにより，潜在変数 S_t のサンプリングをおこなう．全ての潜在変数 $\{S_1, \dots, S_T\}$ は，同時分布，

$$f(S_1, \dots, S_T | \Psi_T) \quad (17)$$

からサンプリングをおこなう．ただし， $\Psi_t = \{\psi_t, \beta_0, \beta_1, p, q\} (t = 1, \dots, T)$ である．同時分布 (17) を展開すると，

$$\begin{aligned} f(S_1, \dots, S_T | \Psi_T) &= f(S_T | \Psi_T) f(S_{T-1} | S_T, \Psi_T) f(S_{T-2} | S_T, S_{T-1}, \Psi_T) \\ &\quad \dots f(S_1 | S_T, S_{T-1}, \dots, S_2, \Psi_T) \quad (18) \end{aligned}$$

となる．2.(2) で述べたように，潜在変数 S_t はマルコフ過程によって変化するため，式 (18) は，

$$\begin{aligned} f(S_1, \dots, S_T | \Psi_T) &= f(S_T | \Psi_T) f(S_{T-1} | S_T, \Psi_{T-1}) f(S_{T-2} | S_{T-1}, \Psi_{T-2}) \\ &\quad \dots f(S_1 | S_2, \Psi_1) \\ &= f(S_T | \Psi_T) \prod_{t=1}^{T-1} f(S_t | S_{t+1}, \Psi_t) \quad (19) \end{aligned}$$

と整理できる．式 (19) は，全ての潜在変数 $\{S_1, \dots, S_T\}$ の同時分布 $f(S_1, \dots, S_T | \Psi_T)$ は，個々の潜在変数 $S_t (t = 1, \dots, T)$ の条件付き分布 $f(S_t | S_{t+1}, \Psi_t) (t = 1, \dots, T-1)$ および $f(S_T | \Psi_T)$ の積で表せることを示している．このことから，潜在変数 $S_t (t = 1, \dots, T)$ は， $S_T, S_{T-1}, \dots, S_1$ の順に個々にサンプリング可能であることがわかる． S_T のサンプリングは，3.(1)a) のハミルトン・フィルタから求めた $\Pr[S_T = j | \Psi_T]$ を用いる．また， $S_t (t = 1, \dots, T-1)$ のサンプリングについては，式 (19) 内の $f(S_t | S_{t+1}, \Psi_t) (t = 1, \dots, T-1)$ を求める必要がある． $f(S_t | S_{t+1}, \Psi_t) (t = 1, \dots, T-1)$ を展開すると，

$$\begin{aligned} f(S_t | S_{t+1}, \Psi_t) &= \frac{f(S_t, S_{t+1} | \Psi_t)}{f(S_{t+1} | \Psi_t)} \\ &= \frac{f(S_{t+1} | S_t, \Psi_t) f(S_t | \Psi_t)}{f(S_{t+1} | \Psi_t)} \\ &= \frac{f(S_t | S_{t+1}) f(S_t | \Psi_t)}{f(S_{t+1} | \Psi_t)} \end{aligned}$$

$$\propto f(S_{t+1}|S_t)f(S_t|\Psi_t) \quad (20)$$

$$(t = 1, \dots, T-1)$$

と表せる．式 (21) の $f(S_{t+1}|S_t)(t = 1, \dots, T-1)$ は，式 (6a)～(6d) の推移確率であり， $f(S_t|\Psi_t)(t = 1, \dots, T-1)$ は，3.(1)a) のハミルトン・フィルタから求めた $\Pr[S_t|\Psi_t]$ である．式 (21) より， Ψ_t と S_{t+1} が与えられたとき， $S_t = 1$ となる確率 $\Pr[S_t = 1|S_{t+1}, \Psi_t]$ は，

$$\Pr[S_t = 1|S_{t+1}, \Psi_t] = \frac{f(S_{t+1}|S_t = 1)f(S_t = 1|\Psi_t)}{\sum_{j=0}^1 f(S_{t+1}|S_t = j)f(S_t = j|\Psi_t)} \quad (21)$$

と表せる．また， $S_t = 0, 1$ より $\Pr[S_t = 0|S_{t+1}, \Psi_t]$ は，

$$\Pr[S_t = 0|S_{t+1}, \Psi_t] = 1 - \Pr[S_t = 1|S_{t+1}, \Psi_t] \quad (22)$$

となる．以上の式 (21)，式 (22) から潜在変数 $S_t(t = 1, \dots, T-1)$ のサンプリングが可能である．

(2) マルコフ連鎖モンテカルロ法

ベイズ推計法を用いて未知パラメータを推計する．本研究で推計すべきマルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデル，推移確率 p, q は，共に，共役な事前分布を持たないため，事後分布における基準化定数を解析的に求めることは不可能である．そのため，本研究では，事後分布の基準化定数を求めることなく，事後分布を求めることができる，マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて，2. で示したマルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルおよび推移確率 p, q の未知パラメータベクトル $\beta_0, \beta_1, \alpha_p, \alpha_q$ を推計する．

a) 未知パラメータ β_0, β_1 のサンプリング

マルコフ・スイッチング・ポアソン発生モデルの未知パラメータベクトル β_0, β_1 について， β_0, β_1 の事前確率密度関数をそれぞれ $\pi(\beta_0), \pi(\beta_1)$ とする．ベイズの定理から，尤度関数 (5) と事前確率密度関数 $\pi(\beta_0), \pi(\beta_1)$ を用いて，事後確率密度関数 $\pi(\beta_0, \beta_1|\psi_T)$ は，

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_0, \beta_1|\psi_T) \\ & \propto l(\psi_T|\beta_0, \beta_1, S_1, \dots, S_T) \prod_{s=0}^1 \pi(\beta_s) \\ & \propto \prod_{t=1}^T \frac{\{(1-S_t)\lambda_t^0 + S_t\lambda_t^1\}^{n_t}}{n_t!} \exp[-\{(1-S_t)\lambda_t^0 + S_t\lambda_t^1\}] \\ & \cdot \prod_{s=0}^1 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_s - \mu_s)\Sigma_s^{-1}(\beta_s - \mu_s)'\right\} \end{aligned} \quad (23)$$

と表せる．ただし， $\beta_s(s = 0, 1)$ の事前確率密度関数は，期待値ベクトル μ_s ，分散共分散行列 Σ_s の多次元正規分布とした．

b) 推移確率 p, q のサンプリング

推移確率 p, q に関する未知パラメータベクトル α_p, α_q の事後確率密度関数についても，a) と同様に定式化できる．事前確率密度関数を $\pi(\alpha_p), \pi(\alpha_q)$ とすると，尤度関数 (11) を用いて，事後確率密度関数 $\pi(\alpha_p, \alpha_q|S_1, \dots, S_T)$ は，

$$\begin{aligned} & \pi(\alpha_p, \alpha_q|S_1, \dots, S_T) \\ & \propto l_{pq}(S_1, \dots, S_T|\alpha_p, \alpha_q)\pi(\alpha_p)\pi(\alpha_q) \\ & \propto \prod_{t=1}^T \left\{ p^{\delta_p^t} (1-p)^{1-\delta_p^t} q^{\delta_q^t} (1-q)^{1-\delta_q^t} \right\} \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha_p - \mu_p)\Sigma_p^{-1}(\alpha_p - \mu_p)'\right\} \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha_q - \mu_q)\Sigma_q^{-1}(\alpha_q - \mu_q)'\right\} \end{aligned} \quad (24)$$

と定式化できる．ただし， α_p の事前確率密度関数は，期待値ベクトル μ_p ，分散共分散行列 Σ_p の多次元正規分布， α_q の事前確率密度関数は，期待値ベクトル μ_q ，分散共分散行列 Σ_q の多次元正規分布とした．

4. おわりに

本研究では，マルコフスイッチングポアソン発生モデルを定式化し，ポットホールが発生状態を低確率状態，高確率状態の2つの状態に分割し分析する手法を提案した．このように2つの状態に分割しポットホール発生過程を分析することは，重点管理を行うか否かという意思決定への重要な指標となる．さらに，高確率状態である期間が分析期間全体に占める割合を求めることにより，ポットホールの発生管理への投資量の決定が可能となる．また，今後の課題としては適用範囲の拡大や最適巡回頻度の設定などがあげられる．

なお，講演会当日には実際の高速道路のポットホール発生データ及び降水量データへの適用を通して，本研究の有効性を実証的に検証した事例を紹介する．

参考文献

- 1) 貝戸清之，小林潔司，加藤俊昌，生田紀子：道路施設の巡回頻度と障害物発生リスク，土木学会論文集 F，Vol.63，No.1, pp.16-34，2007.
- 2) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
- 3) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.
- 4) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 A，Vol.63，No.2，pp.336-355，2007.
- 5) Le Thanh Nam, 貝戸 清之, 小林 潔司, 塚塚 亮輔, 2012, ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化, 土木学会論文集 F4(建設マネジメント), Vol.68, No.2, p.62-79, 2012.

(2012. ? . ? 受付)