

かぶりコンクリートの剥離・剥落および鉄筋腐食過程の推計

松岡弘大¹・田中伸幸²・貝戸清之³

¹学生会員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²学生会員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (同上)

³正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科地球総合工学専攻 (同上)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

コンクリート構造物の代表的劣化事象の一つであるかぶりコンクリートの剥離・剥落発生を予測するためにこれまで発生メカニズムに基づく予測手法、および統計的な予測手法が開発されてきた。本研究では統計的劣化予測を基本としながらも、既往の研究で明らかとなっている発生メカニズムの一部を包括するようなモデルを定式化し、その推計法を示した。具体的には剥離・剥落の発生過程を鉄筋の腐食深さに依存する非定常ポアソン発生モデルとして表すとともに、鉄筋の腐食進行過程をマルコフ劣化ハザードモデルに表現した混合ポアソン発生モデルを提案した。

Key Words : peeling/falling of concrete, mixture poisson model, reinforcement corrosion, MCMC

1. はじめに

構造物の劣化現象に介在する不確実性を考慮した予測手法として、目視点検情報を利用した統計的劣化予測モデルが急速な発展を遂げている^{1),2)}。本研究で対象とするかぶりコンクリートの剥離・剥落発生予測に関してもいくつかの研究事例が存在する³⁾。統計的劣化予測モデルは取得した劣化情報の背後に存在する規則性をモデル化するとともに、種々の劣化因子の不確実性を考慮した劣化予測や劣化シナリオの評価を可能とする。

一方、統計モデルとは異なる発生メカニズムに基づくかぶりコンクリートの剥離・剥落の予測モデルについてもいくつか提案されている^{4)–6)}。特に本研究が対象とする鉄道構造物においては、2006年制定の鉄道構造物等維持管理標準・同解説(以下、維持管理標準と呼ぶ)により既往の研究を取りまとめがなされている⁷⁾。当該手法は過去の研究により蓄積された理論的、経験的な知見に基づいており、剥離・剥落発生過程の将来時点における変化を鉄筋腐食深さから予測する。一方で、鉄筋腐食深さに基づく劣化予測は確定的予測法であり、実際の管理者が劣化状況を予測をする場合には補正が必要となっている。このような状況を鑑みると、実態調査により得られた情報に着目し、そこから劣化過程、およびその劣化メカニズムを算定するような方法論の開発・および適用が重要であると考えらえる。

以上の問題意識のもと、本研究では、コンクリート

鉄道高架橋の高欄部材におけるかぶりコンクリートの実態調査データに基づき、劣化メカニズムの一部を包括して剥離・剥落の発生過程を表現するような混合ポアソン発生モデルを提案し、提案モデルを利用した統計的分析に基づいて、剥離・剥落の発生過程およびその主要な要因である鉄筋の腐食進行過程を明らかにする。以下、2. で本研究の基本的立場を、3. で混合ポアソン発生モデルを定式化する。4. ではベイズの定理とMCMC法に基づく混合ポアソン発生モデルの未知パラメータ推計法について説明する。

2. 本研究の基本的立場

(1) かぶりコンクリートの劣化過程

経年とともに発生するコンクリート構造物の代表的な劣化事象として剥離・剥落があげられる。近年、コンクリート構造物の維持管理分野においては、構造物の状態をいくつかの段階に区分けし、それぞれの期間の長さを予測することで、コンクリート構造物のひび割れや剥離・剥落の発生過程を理解することが試みられている⁷⁾。各状態の期間は、かぶりコンクリート厚や中性化深さ、初期塩化物イオン濃度といった変状に影響を及ぼす因子により構成される予測式により定義されており、実現象に即した劣化メカニズムの理解と実務への反映が試みられている^{8),9)}。

構造物の状態は具体的には、図-1に示すように鉄筋腐食が進展しない潜伏期、鉄筋が腐食を開始してから

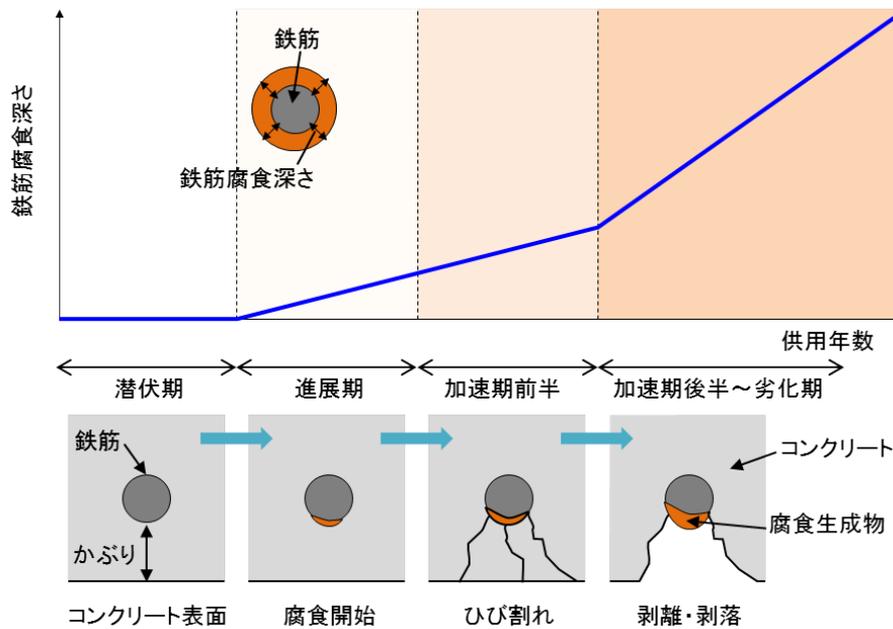


図-1 鉄筋の腐食に伴う構造物の劣化進展

かぶりコンクリートがひび割れまでの進展期，ひび割れが発生してから剥離・剥落が発生するまでの加速期前半および剥離・剥落発生以後の加速期後半と劣化期となっている。進展期では，鉄筋に軽微な腐食が発生するが外観上の変化はほとんど見られない。鉄筋の腐食速度については，変状の原因や環境条件により大きくばらつくことが指摘されているものの，既往の研究から推奨値が算出されている。本研究でも維持管理標準で取りまとめられている推奨値を腐食速度として利用する。さらに，腐食の進展に伴ってかぶりコンクリートにひび割れが発生することで，加速期前半へと構造物の状態が推移する。コンクリート表面にひび割れが発生するか否かは，鉄筋径やかぶりの影響が支配的であることが指摘されている。さらに腐食が進展することによりコンクリート表面が剥離・剥落し，構造物の状態は加速期後半へと推移する。加速期後半では鉄筋が露出した状態となるために，その腐食速度は暴露試験等の結果と同等になると考えられている⁷⁾。

これまで調査データから劣化メカニズムを考察する場合には，その影響因子（かぶりや鉄筋径，塩化物イオン濃度など）を支配方程式に代入し，時間的に順な方向の解析を実施することで剥離・剥落の理論値を算出し，調査したコンクリート表面のひび割れや剥離・剥落の発生程度と比較することがなされてきた。特に，近年では図-2に示すようにコンクリート表面を鉛直方向鉄筋と水平方向鉄筋の交点を含むメッシュに分割し，各メッシュごとに劣化を評価する手法が提案されている⁶⁾。また，劣化の不確実性を考慮するためにモンテカル

ロシミュレーションを利用する方法も提案されている⁹⁾。一方で，このような順解析的な手法においては，多大な不確実性を有する剥離・剥落の発生過程を，調査した剥離・剥落の実情に合わせる場面において困難に遭遇する。特に，かぶりコンクリートの剥離・剥落の発生過程は鉄筋の腐食深さに依存するとともに，鉄筋の腐食速度が構造物の状態に依存するといった階層性を有しており，調査データに基づいて初期値やパラメータの最適な値に修正することは，従来の順解析型の方法論では困難となる。そこで本研究では調査データに合わせてかぶりコンクリートの剥離・剥落過程やそのメカニズムの一部を推計するために次節で述べるような確率モデルを利用した逆解析型の方法論に基づく分析を実施することとする。

(2) 混合確率モデル

鉄筋腐食過程とかぶりコンクリートの剥離・剥落過程のような異なる劣化過程が相互に影響している現象を分析する方法は近年，急速に発展している。本研究で踏襲するポアソン発生モデルについてもすでいくつかの適用事例が存在する。建設分野においては貝戸ら¹⁰⁾がかぶりコンクリートの剥離・剥落の分析に利用している。さらに Nam ら¹¹⁾は舗装構造の階層的な劣化過程をポアソン隠れマルコフモデルで表現し実証的にその有効性を示している。劣化過程を表現する統計モデルの制御パラメータが別の統計モデルで表されるような場合は，直接に観測できない，もしくは部分的にしか観測できない事象を評価する必要がある。例え

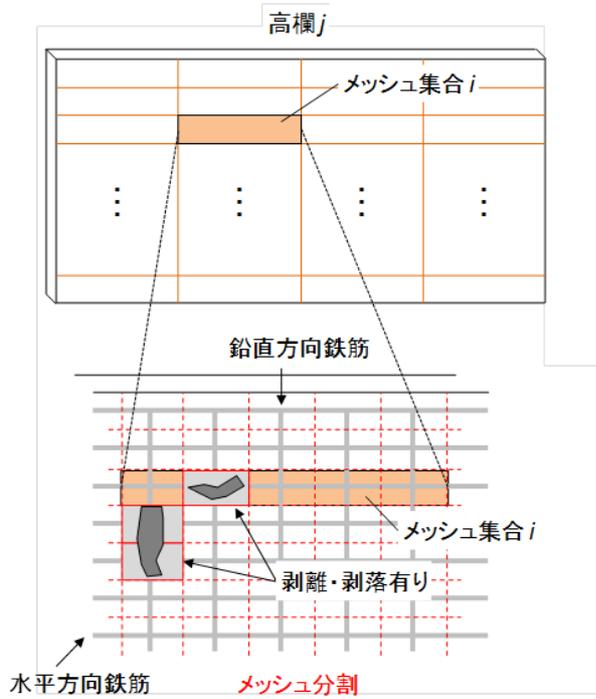


図-2 メッシュ分割法

ば, Nam らの研究では直接観測する機会の少ない路面健全度を高頻度で観測可能なポットホールデータにより推計している。観測できない事象が離散確率で表される, このような階層的統計モデルは隠れマルコフモデルと総称される¹¹⁾⁻¹²⁾。一方で, 本研究で実施するかぶりコンクリートの剥離・剥落分析では, 剥離・剥落の発生が鉄筋の腐食深さという連続的に変化する値に依存する点に相違が存在する。さらに, この鉄筋の腐食深さを決定する腐食速度が構造物の離散的な状態(図-1)により変化する。本研究ではかぶりコンクリートの剥離・剥落過程を非定常ポアソン過程で表すとともに, その制御パラメータが鉄筋腐食量に依存して変動するような階層性を有すると考える。さらに鉄筋腐食量を算出するための鉄筋腐食速度がマルコフ劣化ハザードモデルに従って推移すると考える。本研究ではこのモデルを混合ポアソン発生モデルと呼ぶ。

3. 混合ポアソン発生モデル

(1) 前提条件

カレンダー時刻 τ に供用を開始され, それ以降の任意の時刻にわたって実施した実態調査によりかぶりコンクリートの劣化性状を推定する問題を考える。なお, 本研究では, 2.(1) で述べたようなコンクリート表面を鉄筋交差点ごとに分割したメッシュを基本単位とする。さらに, 複数のメッシュで構成されるメッシュ集合を定義し, 時間の経過とともにいくつかのメッシュが劣化に

伴って剥離・剥落すると考える。対象とするかぶりコンクリート表面は複数のメッシュ集合を含むが, 記述を簡略化するために, まず, ある一つのメッシュ集合のみに着目して議論を進める。のちに, 4. でコンクリート表面全体に関する議論に拡張する。いま, カレンダー時刻 τ を初期時点 $t = 0$ とする離散時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$ を導入する。離散時間軸上の点を時点とよびカレンダー時刻と区別する。離散時点間の期間長を 1 に基準化する。対象とするメッシュ集合において, 離散時間軸上で実態調査が実施される時点 $t = 0, t_1, \dots, t_n, \dots$ と表記する。さらに, 調査時点 t_n の調査により, メッシュ集合内の剥離・剥落メッシュ数 $g(t_n)$ が観測される。一方で構造物の状態 $h(t_n)$ は観測されない。

(2) 鉄筋腐食の進行過程

図-1 に示したコンクリート構造物の状態が時間とともに推移すると考える。供用が開始された時点 $t = 0$ を起点とする離散時間軸 $t = 0, 1, \dots$ を考える。離散時間軸上の期間 $[t, t + 1)$ におけるコンクリート構造物の状態の劣化過程を表すマルコフ推移確率は, 時点 t における健全度 $h(t) = i$ を与件とし, 時点 $t + 1$ において健全度 $h(t + 1) = j$ が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[h(t + 1) = j | h(t) = i] = p_{ij} \quad (1)$$

として定義できる。マルコフ推移確率は, 津田等¹⁵⁾が開発したマルコフ劣化ハザードモデル(多段階指数劣化ハザードモデル)を用いて表現できる。詳細は津田等¹⁵⁾に譲るが, 読者の便宜を図るために以下に簡単に概要を述べておく。時点 t における健全度 i ($i = 1, \dots, I - 1$) のハザード率^{13), 14)}を

$$\lambda^i = x\beta^i \quad (2)$$

と表す。ただし, $x = (x_1, \dots, x_Q)$ は, 説明変数ベクトルであり, $\beta^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_Q^i)'$ は未知パラメータベクトルである。ここで, 記号 $'$ は転置を, Q は説明変数の数を表す。さらに, $\beta = (\beta^{1'}, \dots, \beta^{I-1'})'$ と表記する。ハザード率 λ^i は, 期間 $[t, t + 1)$ に対して定義されている。このとき, 時点 t において健全度 i の状態から, 時点 $t + 1$ においても健全度 i が継続する確率は,

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \text{Prob}[h(t + 1) = i | h(t) = i] \\ &= \exp(-\lambda^i) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。さらに, 時点 t と時点 $t + 1$ の間で健全度が i から j ($j > i$) に推移するマルコフ推移確率 p_{ij} ($i = 1, \dots, I - 1; j = i + 1, \dots, I$) は,

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \text{Prob}[h(t + 1) = j | h(t) = i] \\ &= \sum_{m=i}^j \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^s - \lambda^m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^{s+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ &(i = 1, \dots, I - 1; j = i + 1, \dots, I) \end{aligned} \quad (4)$$

と表すことができる¹⁵⁾。ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases} \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^s - \lambda^m} = 1 & (m = i \text{ の時}) \\ \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^{s+1} - \lambda^m} = 1 & (m = j \text{ の時}) \end{cases} \quad (5)$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned} & \prod_{s=i, \neq m}^{j-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^s - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ &= \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^s - \lambda^m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^{s+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \end{aligned} \quad (6)$$

と簡略化する．また， p_{iI} に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$p_{iI} = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} p_{ij} \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (7)$$

このとき，期間 $[t, t+1)$ で定義される条件付確率 (3), (4), (7) を要素とするマルコフ推移行列を

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{II} \end{pmatrix} \quad (8)$$

と定義できる．また，期間 $[t, t+u)$ ($u = 1, 2, \dots$) における推移確率行列 (以下， u 期推移確率行列と呼ぶ) は

$$P(u) = \{P\}^u \quad (9)$$

と表される．なお， u 期推移確率行列を

$$P(u) = \begin{pmatrix} p_{11}(u) & \cdots & p_{1I}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{II}(u) \end{pmatrix} \quad (10)$$

と表記する．ただし， u 期推移確率行列の各要素は，マルコフ劣化ハザードモデル (3),(4) を用いて

$$p_{ii}(u) = \exp(-\lambda^i u) \quad (11a)$$

$$p_{ij}(u) = \sum_{m=i}^j \prod_{s=i, \neq m}^{j-1} \frac{\lambda^s}{\lambda^s - \lambda^m} \exp(-\lambda^m u) \quad (11b)$$

と表すことができる¹⁵⁾．一方で，構造物の状態が式 (8) に従って時間とともに推移すると考える．時点 t ($t = 0, 1, \dots$) の状態分布 $q(t) = (q_1(t), \dots, q_I(t))$ について考える．なお，状態分布の各要素は時点 t に構造物が各状態である確率を表す．供用開始時点 $t = 0$ の状態分布は最も健全な状態 (潜伏期) であり $q(0) = (1, 0, \dots, 0)$ となる．このとき，時点 t の状態分布 $q(t)$ は，

$$q(t) = q(0) \cdot \{P\}^t \quad (t = 0, 1, \dots) \quad (12)$$

と表わされる．

つぎに，コンクリート構造物の状態が式 (12) に従って時間とともに推移するときの鉄筋の腐食過程について考える．コンクリート構造物の腐食速度ベクトル $r = (r_1, \dots, r_I)$ が与えられていると考える．なお， r_i は構造物の状態 i における腐食速度であり， $r_1 \leq \dots \leq r_I$

とする．このとき，時点 t の期待腐食速度 r_a^t は次式により算出される．

$$r_a^t = r_a(q(t)) = r \cdot q(t)' \quad (13)$$

これにより，供用開始から時点 t における鉄筋の期待腐食深さ $R_a^{0,t}$ は，

$$R_a^{0,t} = \sum_{s=0}^t r_a^s \quad (14)$$

と表すことができる．

(3) かぶりコンクリートの劣化過程

時点 t_n ($n = 1, 2, \dots$) において実施される実態調査においては，構造物の状態や鉄筋の腐食深さに関する情報を獲得できない．すなわち，時点 t_n の構造物の状態は，観測者に観察できない確率変数であるが，ひとまず構造物の状態 $h(t_n) = l_{t_n}$ が既知であると仮定する．これにより鉄筋の腐食速度 $r(t_n) = \check{r}_{t_n}$ も既知であると考えられる．

いま，調査時点 t_n と調査時点 t_{n+1} における構造物の状態 $h(t_n) = \bar{i}, h(t_{n+1}) = \bar{j}$ を既知とし，2つの調査時点を用いて定義される期間 $\tau_n = [t_n, t_{n+1})$ に着目する．さらに，供用開始を始点とした時点 $t = t_n, t_n + 1, \dots, t_n + T_n - 1$ における剥離・剥落の発生数 $g(t) = y_t$ ($t_n = 0, \dots, T_n - 1$) も既知であるとする．なお，実際には剥離・剥落の発生数は調査時点 t_n でしか観測されていないが，見通しを良くするためにこのような仮定のもとで議論を進め，後に調査時点 t_n 以外の観測値の欠損を考慮した定式化を行う．ここで，期間 τ_n を構成する局所期間 $l_t = [t, t+1)$ ($t = t_n, \dots, t_n + T_n - 1$) に着目する．当該期間 l_t における剥離・剥落の平均発生個数が時間に対して変化しないと仮定すると，局所期間 l_t の期間長を 1 に基準化しているために，局所期間 l_t 中における，剥離・剥落メッシュ数 y_t は，

$$\begin{aligned} \mu(y_t|z) &= \text{Prob}[g(t) = y_t|z] \\ &= \exp\{-\mu(z)\} \frac{\{\mu(z)\}^{y_t}}{y_t!} \end{aligned} \quad (15)$$

のポアソン過程に従うと考える．貝戸¹⁰⁾に従い式 (15) をポアソン発生モデルと呼ぶ．ただし， $\mu(z) > 0$ は剥離・剥落の単位期間あたりの平均発生個数 (到着率) を， $z = (z_1, \dots, z_P)$ は時間により変化しない説明変数ベクトルを， P は説明変数の数をそれぞれ表している．さらに，到着率 $\mu(z)$ は，説明変数ベクトル z と未知パラメータベクトル $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_P)'$ を用いて

$$\mu(z) = z\alpha \quad (16)$$

で表される．

一方で，かぶりコンクリートの剥離・剥落発生過程は鉄筋の腐食深さ \check{R} とともに変化する．すなわち，当該期間 l_t における剥離・剥落の平均発生個数は時間よ

り変化する鉄筋腐食深さの増分（鉄筋腐食速度） \check{r}_t に依存すると考えられる．このような時間により変化する剥離・剥落発生過程を表現するために，到着率 μ を

$$\check{\mu}(z, \check{r}_t) = \mu(z) \check{r}_t = z\alpha \check{r}_t \quad (17)$$

と定義する．ただし，鉄筋腐食速度 \check{r}_t は局所期間 l_t においては一定であると仮定する．さらに，鉄筋腐食速度 \check{r}_t が構造物の状態 l_t により一意に決定されることに留意すると，局所期間 l_t 中に発生する剥離・剥落メッシュ数 y_t は，

$$\begin{aligned} \pi(y_t | z, \check{r}_t, l_t) &= \text{Prob}[g(t) = y_t | z, \check{r}_t, l_t] \\ &= \exp\{-\check{\mu}(z, \check{r}_t)\} \frac{\{\check{\mu}(z, \check{r}_t)\}^{y_t}}{y_t!} \end{aligned} \quad (18)$$

の非定常ポアソン過程に従う．当然のことながら，式 (18) に関して $\sum_{y_t=0}^{\infty} \pi(y_t | \check{r}_t, l_t) = 1$ が成立する．ただし， $0! = 1$ である．

つぎに，実際には剥離・剥落の発生数は調査時点 t_n でしか観測されていないことを考慮する．このとき， n 回目の調査時点 t_n から $n+1$ 回目の調査時点 t_{n+1} までの期間 τ_n に発生する総剥離・剥落メッシュ数 y_{τ_n} は次式で表される．

$$\begin{aligned} \pi(y_{\tau_n} | z, \check{r}_t, l_t) \\ = \exp\left(-z\alpha \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} \check{r}_s\right) \frac{(z\alpha \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} \check{r}_s)^{y_{\tau_n}}}{y_{\tau_n}!} \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) 中の鉄筋腐食速度の和 $\sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} \check{r}_s$ は期間 τ_n に発生した鉄筋の腐食深さ $\check{R}^{t_n, t_{n+1}}$ を表しており，剥離・剥落の発生過程が鉄筋腐食深さに依存した非定常ポアソン過程としてモデル化されていることを確認できる．

さらに，時点 t_n において構造物が $h(t_n) = i$ である条件の下で，時点 t ($t = t_n + 1, \dots, t_n + T_n - 1$) において構造物の状態が l_t となる条件付き確率 $\rho_t(l_t | i)$ を

$$\begin{aligned} \rho_t(l_t | i) \\ = \text{Prob}\{h(t) = l_t | h(t_n) = i\} \\ = p_{il_t}(t - t_n) \end{aligned} \quad (20)$$

と定義すれば，局所期間 l_t に y_t 個の剥離・剥落が発生する確率 $\tilde{\pi}_t(y_t)$ は各時点 t における構造物の状態分布との混合確率モデルとして

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(y_t | z, \mathbf{x}, r, h(t_n)) \\ = \exp\left\{-z\alpha \sum_{l_t=i}^j \check{r}_t \rho_t(l_t | i)\right\} \frac{\left\{z\alpha \sum_{l_t=i}^j \check{r}_t \rho_t(l_t | i)\right\}^{y_t}}{y_t!} \end{aligned} \quad (21)$$

と表すことができる．このとき，式 (12)，(13) の関係を利用すれば，局所期間 l_t に y_t 個の剥離・剥落が発生する確率 $\tilde{\pi}_t(y_t)$ は

$$\tilde{\pi}_t(y_t | z, \mathbf{x}, r, h(t_n))$$

$$\begin{aligned} &= \exp\{-z\alpha r_a(q(t))\} \frac{\{z\alpha r_a(q(t))\}^{y_t}}{y_t!} \\ &= \exp\{-z\alpha r P(t-t_n) / q(t_n)\} \frac{\{z\alpha r P(t-t_n) / q(t_n)\}^{y_t}}{y_t!} \end{aligned} \quad (22)$$

となる．なお， $P(t-t_n)$ は

$$P(t-t_n) = \begin{pmatrix} p_{11}(t-t_n) & \cdots & p_{1I}(t-t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{II}(t-t_n) \end{pmatrix} \quad (23)$$

の $t-t_n$ 期推移確率行列を， $q(t_n)$ は $h(t_n) = i$ 列目が 1，それ以外は 0 の時点 t_n における状態分布をそれぞれ表す．さらに，時点 t_n から t_{n+1} までの期間 τ_n に発生する剥離・剥落個数 y_{τ_n} は，式 (19) と同様に，

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{t_n}(y_{\tau_n} | z, \mathbf{x}, r, h(t_n)) \\ = \exp\left[-z\alpha r \left\{ \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} P(s-t_n) \right\} q(t_n) \right] \\ \frac{\left[z\alpha r \left\{ \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} P(s-t_n) \right\} q(t_n) \right]^{y_{\tau_n}}}{y_{\tau_n}!} \end{aligned} \quad (24)$$

と一般化される．式 (24) は非定常ポアソン発生モデルによる剥離・剥落発生過程とマルコフ推移確率に基づく状態推移過程の混合確率モデルであることから，本研究ではこれを混合ポアソン発生モデルと呼ぶ．

なお，調査時点 t_n において健全度が $h(t_n) = \bar{i}$ であり，時点 t ($t = t_n, \dots, t_n + T_n - 1$) における観測値ベクトル $\bar{\xi}_n$ が観測される条件付き確率（尤度） $\mathcal{L}(\bar{\xi}_n, \theta)$ を定義する．ただし，記号「 $\bar{\cdot}$ 」は観測値であることを意味し， $\bar{\xi}_n = \{\bar{y}_{\tau_n}, \bar{z}, \bar{x}, \bar{i}\}$ は観測値ベクトルを， $\theta = (\alpha, \beta)$ は未知パラメータベクトルを意味する．尤度 $\mathcal{L}(\bar{\xi}_n, \theta)$ は，時点 t_n に健全度 $h(t_n) = \bar{i}$ が観測されたという条件の下で，時点 t_{n+1} において剥離・剥落の発生数の観測値 \bar{y}_{τ_n} が測定される条件付き確率（尤度）

$$\mathcal{L}(\bar{\xi}_n | \theta) = \tilde{\pi}_t(\bar{y}_{\tau_n} | \bar{z}, \bar{x}, r, \bar{h}(t_n)) \quad (25)$$

として定義できる．

4. 推計方法

(1) データ概要

管理者が K 個のメッシュ集合で構成されるコンクリート構造物を管理する問題を考える．各メッシュ集合 k ($k = 1, \dots, K$) に対して，構造物が時点 τ を始点とする離散時間軸 $t = 0, 1, \dots$ を考え，時点 t_n ($n = 1, \dots, N$) において実態調査が実施され，剥離・剥落の発生数 $y^k(t_n)$ ，剥離・剥落の発生に影響を及ぼす説明変数ベクトル \bar{z}^k を観測したと考える． N は実態調査の実施回数を表す．このとき，メッシュ集合 k の期間 τ_n のそれぞれに対してデータ $\bar{\xi}_n^k = \{\bar{y}_{\tau_n}^k, \bar{z}^k, \bar{x}^k, \bar{i}^k\}$ を

定義する．さらに，データセット全体を集合 $\bar{\Xi} = \{\bar{\xi}_n^k : n = 0, \dots, N, k = 1, \dots, K\}$ と定義する．データ $\bar{\xi}_n^k$ が観測される尤度 $\mathcal{L}(\bar{\xi}_n^k, \theta)$ は，式 (25) を用いて定義される．したがって，データセット全体 $\bar{\Xi}$ が観測される確率 (尤度) は

$$\mathcal{L}(\bar{\Xi}, \theta) = \prod_{k=1}^K \prod_{n=1}^N \mathcal{L}(\bar{\xi}_n^k, \theta) \quad (26)$$

と定式化される．これにより，混合ポアソン発生モデルの推計問題は，尤度関数 (26) を最大にするようなパラメータベクトル $\hat{\theta}$ を求める問題に帰着する．

混合ポアソン発生モデルの尤度関数 (25) は，パラメータに関して高次の非線形多項式となっており，1 階の最適化条件が (複素数解を含めて) 非常に多くの解を有している¹⁶⁾．当然のことながら，剥離・剥落の発生確率 $\pi^k(\bar{y}_{T_n}^k | l_{T_n}^k, \bar{z}^k)$ ，推移確率 $p_{l_{T_n}^k, l_t^k}^k$ の推計値は実数解でなければならない．さらに，これらの確率の推計値として，数ある実数解の中から 0 と 1 の間にある解を選択しなければならない．最尤法の代わりにベイズ推計法を用いれば，高次の非線形多項式を解く問題を回避できる．

(2) MCMC 法

混合分布モデルの推計では，尤度関数が高度な非線形性を有しているため，通常的最尤法や分布の共役性を利用したベイズ推計法を用いることが困難である^{16), 17)}．このような理由から，本研究では混合分布モデルの推計方法としてランダムウォーク MH 法とギブスサンプリングを利用したマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション (MCMC) 法^{18), 19)} を採用する．MCMC 法に関して新規性はないが方法論の見通しを良くするために，以下に説明を加える．

まず，剥離・剥落発生過程の到着率 (16) に含まれるパラメータ $\alpha^i = (\alpha_1, \dots, \alpha_P)$ は，未知パラメータである．これらの定数の事前確率密度関数として，正規分布を仮定する．すなわち，パラメータ α の事前確率密度関数が $\alpha \sim \mathcal{N}_P(\zeta^\alpha, \Sigma^\alpha)$ である．ただし， P 次元正規分布 $\mathcal{N}_P(\zeta^\alpha, \Sigma^\alpha)$ の確率密度関数は，

$$\phi(\alpha | \zeta^\alpha, \Sigma^\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{P}{2}} \sqrt{|\Sigma^\alpha|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha - \zeta^\alpha)\{\Sigma^\alpha\}^{-1}(\alpha - \zeta^\alpha)'\right\} \quad (27)$$

となる．ただし， ζ^α は $\mathcal{N}_P(\zeta^\alpha, \Sigma^\alpha)$ の事前期待値ベクトル， Σ^α は事前分散共分散行列である．同様に， β の事前確率密度関数も多次元正規分布に従うと考え， $\beta \sim \mathcal{N}_Q(\zeta^\beta, \Sigma^\beta)$ を仮定する．ただし， Q 次元正規分布 $\mathcal{N}_Q(\zeta^\beta, \Sigma^\beta)$ の確率密度関数は，

$$\psi(\beta | \zeta^\beta, \Sigma^\beta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Q}{2}} \sqrt{|\Sigma^\beta|}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \zeta^\beta)\{\Sigma^\beta\}^{-1}(\beta - \zeta^\beta)'\right\} \quad (28)$$

となる．ただし， ζ^β は事前期待値ベクトル， Σ^β は事前分散共分散行列である．このとき，事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \bar{\xi})$ は，

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \beta | \bar{\xi}) &\propto \mathcal{L}(\alpha, \beta, \bar{\xi}) \phi(\alpha | \zeta^\alpha, \Sigma^\alpha) \psi(\beta | \zeta^\beta, \Sigma^\beta) \\ &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{n=1}^N \exp\left[-\bar{z}^k \alpha r \left\{ \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} P(s-t_n)^k \right\} \bar{q}^k(t_n)'\right] \\ &\quad \cdot \left[\bar{z}^k \alpha r \left\{ \sum_{s=t_n+1}^{t_{n+1}} P(s-t_n)^k \right\} \bar{q}(t_n)'\right] \bar{y}_{r_n} \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha - \zeta^\alpha)\{\Sigma^\alpha\}^{-1}(\alpha - \zeta^\alpha)'\right. \\ &\quad \left.-\frac{1}{2}(\beta - \zeta^\beta)\{\Sigma^\beta\}^{-1}(\beta - \zeta^\beta)'\right\} \end{aligned} \quad (29)$$

となる．なお， $t - t_n$ 期推移確率行列 P^k の各要素は，マルコフ劣化ハザードモデル (3), (4) より

$$p_{ii}^k(t - t_n) = \exp\{-\lambda_i^k(t - t_n)\} \quad (30a)$$

$$p_{ij}^k(t - t_n) = \sum_{m_r=i}^j \prod_{m_r=i, \neq m}^{j-1} \frac{\lambda_{s_r}^k}{\lambda_{s_r}^k - \lambda_{m_r}^k} \exp\{-\lambda_{m_r}^k(t - t_n)\} \quad (30b)$$

である．

式 (29) の事後確率密度関数は一般的な形ではなく，解析的に解を求めることはできない．そこで MCMC 法の一つであるギブスサンプリングを採用し，未知パラメータの条件付き事後確率密度関数から数値シミュレーションにより事後確率密度関数を求める．さらに条件付き事後確率密度関数も直接サンプリングできないがランダムウォーク MH 法を用いることで事後分布からのサンプルを得ることが可能となる．

(3) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて，パラメータベクトル α, β に関する統計的性質を分析することができる．MCMC 法を用いた場合，パラメータの事後確率密度関数 $\rho(\alpha, \beta | \bar{\xi})$ を解析的な関数として表現することはできない．得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる．いま，ギブスサンプリングから得られた標本を $\theta^{(v)} = (\alpha^{(v)}, \beta^{(v)})$ ($v = 1, \dots, \bar{v}$) と表そう．このうち，最初の \underline{v} 個の標本は収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．その上で，パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{v} + 1, \dots, \bar{v}\}$ と定義する．パラメータ α と β に関する統計量を同様の方法で定義できるため，以下ではパラメータ α に焦点を絞って議論する．まず，パラメータ α の同時確率分布関数 $G(\alpha)$ は，

$$G(\alpha) = \frac{\#\{\alpha^{(v)} \leq \alpha, v \in \mathcal{M}\}}{\bar{v} - \underline{v}} \quad (31)$$

と表すことができる．ただし， $\#(\alpha^{(v)} \leq \alpha, v \in \mathcal{M})$ は論理式 $\alpha^{(v)} \leq \alpha, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である．また，パラメータ α の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}^i(\alpha)$ ，分散・共分散行列 $\tilde{\Sigma}^i(\alpha)$ は，それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\alpha) &= (\tilde{\zeta}(\alpha_1), \dots, \tilde{\zeta}(\alpha_P))' \\ &= \left(\sum_{v=\underline{v}+1}^{\bar{v}} \frac{\alpha_1^{(v)}}{\bar{v}-\underline{v}}, \dots, \sum_{v=\underline{v}+1}^{\bar{v}} \frac{\alpha_P^{(v)}}{\bar{v}-\underline{v}} \right)' \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\tilde{\Sigma}(\alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\alpha_1) & \cdots & \tilde{\sigma}(\alpha_1 \alpha_P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\alpha_P \alpha_1) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\alpha_P) \end{pmatrix} \quad (32b)$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\sigma}^2(\alpha_z) = \sum_{v=\underline{v}+1}^{\bar{v}} \frac{\{\alpha_z^{(v)} - \tilde{\zeta}(\alpha_z)\}^2}{\bar{v}-\underline{v}} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\alpha_z \alpha_r) &= \sum_{v=\underline{v}+1}^{\bar{v}} \frac{\{\alpha_z^{(v)} - \tilde{\zeta}(\alpha_z)\} \{\alpha_r^{(v)} - \tilde{\zeta}(\alpha_r)\}}{\bar{v}-\underline{v}} \end{aligned} \quad (33b)$$

である．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ α の信用域を定義できる．たとえば，パラメータ α の $100(1-2\varepsilon)\%$ 信用域は，標本順序統計量 $(\underline{\alpha}_z^\varepsilon, \bar{\alpha}_z^\varepsilon)$ ($z = 1, \dots, P$)

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_z^\varepsilon &= \arg \max_{\alpha_z^*} \\ &\left\{ \frac{\#(\alpha_z^{(v)} \leq \alpha_z^* \in \mathcal{M})}{\bar{v}-\underline{v}} \leq \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_z^\varepsilon &= \arg \min_{\alpha_z^{**}} \\ &\left\{ \frac{\#(\alpha_z^{(v)} \geq \alpha_z^{**} \in \mathcal{M})}{\bar{v}-\underline{v}} \leq \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (34b)$$

を用いて $\underline{\alpha}_z^\varepsilon < \alpha_z < \bar{\alpha}_z^\varepsilon$ と定義できる．

MCMC 法では，初期パラメータ値 $\theta^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない．ギブスサンプリングで発生させた \bar{v} 個のサンプルのうち，最初の \underline{v} 個の標本 $\theta^{(v)} = (\alpha^{(v)}, \beta^{(v)})$ ($v = 1, \dots, \underline{v}$) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える．その上で，第 $\underline{v}+1$ 回以降の標本をとりあげよう． $\underline{v}+1$ 以降の標本が，不変分布である事後分布からの標本であるかどうかを Geweke の方法²⁰⁾を用いて仮説検定を試みる．いま，パラメータのギブス標本 $\theta^{(v)}$ ($v = 1, \dots, \bar{v}$) の中から，最初の v_1 個と最後の v_2 個のデータを取りあげよう．Geweke は， $v_1 = 0.1(\bar{v}-\underline{v})$, $v_2 = 0.5(\bar{v}-\underline{v})$ を推奨している²⁰⁾．このとき，パラメータ α の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は，

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_z} &= \frac{1\bar{\alpha}_z - 2\bar{\alpha}_z}{\sqrt{\nu_1^2(\alpha_z) + \nu_2^2(\alpha_z)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (35) \\ 1\bar{\alpha}_z &= \frac{\sum_{v=\underline{v}+1}^{\underline{v}+v_1} \alpha_z^{(v)}}{v_1} \quad 2\bar{\alpha}_z = \frac{\sum_{v=\bar{v}-v_2+1}^{\bar{v}} \alpha_z^{(v)}}{v_2} \end{aligned}$$

$$\nu_1^2(\alpha_z) = \frac{2\pi \hat{f}_{\alpha_z}^1(0)}{v_1} \quad \nu_2^2(\alpha_z) = \frac{2\pi \hat{f}_{\alpha_z}^2(0)}{v_2}$$

と定義できる．ただし， $f_{\alpha_z}^l(x)$ ($l = 1, 2$) はスペクトル密度関数であり， $2\pi f_{\alpha_z}^l(0)$ の推定値は

$$2\pi \hat{f}_{\alpha_z}^l(0) = l\hat{\omega}_0 + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) l\hat{\omega}_z \quad (36)$$

$$1\hat{\omega}_0 = v_1^{-1} \sum_{v=\underline{v}+1}^{\underline{v}+v_1} (\alpha_z^{(v)} - 1\bar{\alpha}_z)^2$$

$$2\hat{\omega}_0 = v_2^{-1} \sum_{v=\bar{v}-v_2+1}^{\bar{v}} (\alpha_z^{(v)} - 2\bar{\alpha}_z)^2$$

$$1\hat{\omega}_z = v_1^{-1} \sum_{v=\underline{v}+s+1}^{\underline{v}+v_1} (\alpha_z^{(v)} - 1\bar{\alpha}_z)(\alpha_z^{(v-s)} - 1\bar{\alpha}_z)$$

$$2\hat{\omega}_z = v_2^{-1} \sum_{v=\bar{v}-v_2+s+1}^{\bar{v}} (\alpha_z^{(v)} - 2\bar{\alpha}_z)(\alpha_z^{(v-s)} - 2\bar{\alpha}_z)$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{q+1}$$

として求まる^{21), 22)}． q はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが，Geweke に従って 20 を採用する²⁰⁾．ここで， α_z^i の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\alpha_z^i}| \leq Z_{\gamma/2} \\ H_1 : |Z_{\alpha_z^i}| > Z_{\gamma/2} \end{cases} \quad (37)$$

と設定する．ただし， $Z_{\gamma/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である．有意水準 $\gamma\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合， $Z_{\gamma/2}$ は $\gamma/2\% = 1 - \Phi(Z_{\gamma/2})$ を満足する値として定義できる．ただし， $\Phi(Z)$ は標準正規分布の分布関数である．

5. 適用事例

3. で定式化した混合ポアソン発生モデルを，実際の実態調査データへ適用する．実態調査は文献で詳述されているが，適用に際して以下にその概要を述べる．表-2 には実態調査データの内訳を示す．調査構造物はいずれも海岸から数 km 以内に位置する路線 A, B の RC 鉄道高架橋の高欄 13 枚である．高欄は竣工から 27 (路線 A), 25 (路線 B) 年経過している．いずれの高欄でも内的塩害と中性化による複合劣化が主な劣化要因であると推察されている．メッシュは図-2 に示す高欄コンクリート表面 (内面) を鉛直方向鉄筋と水平方向鉄筋を含む赤点線で区切ることで形成した．剥離・剥落の有無は各メッシュに対して判定している．13 枚の高欄を対象とした実態調査により，合計で 6,209 メッシュに関する剥離・剥落の有無，かぶりの情報が得られている．評価単位となるメッシュ集合については，代表的に実施した初期塩化物イオン濃度と中性化深さの調査 3)

に合わせて、隣接する7~9メッシュにより構成している(図-2)。これにより、高欄を橋軸方向に4分割、鉛直方向に15~17分割としたメッシュ集合が最小単位となる。なお、かぶりは3本の水平方向鉄筋に沿ったメッシュで測定されているが、それ以外のメッシュでは2次関数補間により算出した。また初期塩化物イオン濃度と中性化深さの測定値が存在しないメッシュ集合では、最も近傍の測定値を代用した。

実態調査を通して取得した調査サンプルは、メッシュ集合ごとの剥離・剥落の発生総数 y^k 、調査時点 t_n 、説明変数の候補 x^k という情報を含む。本研究では高欄のかぶりコンクリートの剥離・剥落の発生に影響を及ぼすと考えられた3つの変数と、メッシュ集合の設定に起因するバイアスを補正するための2つの変数を採用した。具体的には、1) かぶり、2) 初期塩化物イオン濃度、3) 中性化深さ、4) (メッシュ集合の) 高さ、5) (メッシュ集合中の) 鉄筋数、である。また、ポアソン発生モデルの推計に際しては定数項として x_1^k (常に $x_1^k = 1$) を用いるとともに、各特性変数は最大値が1となるように基準化している。

なお、推計結果については第46回土木学会計画学発表会にて発表する。

6. おわりに

本研究では、コンクリート構造物の剥離・剥落発生過程および鉄筋の腐食過程を実態調査で取得可能なデータから推定することを目的とし、かぶりコンクリートの剥離・剥落過程を非定常ポアソン発生モデルで表すとともに剥離・剥落の主要な影響因子である鉄筋の腐食過程をマルコフ劣化ハザードモデルにより表現した混合ポアソン発生モデルを提案した。また、ベイズ推計法に基づく混合ポアソン発生モデルの未知パラメータ推計法を示した。本手法の有効性については計画学発表会で発表予定の適用結果により示すものとする。

参考文献

- 1) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 2) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 3) 貝戸清之, 起塚亮輔, 伊藤哲男, 橋爪兼治, 出口宗浩: 床板かぶりコンクリートの剥離・剥落発生リスクと最適点検政策, 土木学会論文集 F4 (建設マネジメント), Vol.68, No.1, pp.11-27, 2012.
- 4) 曾我部正道, 谷村幸裕, 松橋宏治, 宇野国和: 鉄道高架橋の RC 高欄の変状調査とその劣化予測, コンクリート工学, Vol.47, No.8, pp.16-24, 2009.
- 5) 轟俊太郎, 曾我部正道, 谷村幸裕, 松橋宏治: 鉄筋腐食によるかぶりコンクリート剥落の実態調査, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, No.1, pp.1103-1108, 2010.
- 6) 松本光矢, 曾我部正道, 轟俊太郎, 谷村幸裕: 内的塩害と中性化の複合劣化を対象とした劣化予測に関する検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, No.2, pp.1423-1428, 2010.
- 7) 鉄道総合技術研究所編: 鉄道構造物等維持管理標準・解説(構造物編) コンクリート構造物, 丸善, 2007.
- 8) 木下真一, 内田慎哉, 鎌田敏郎, 田中伸幸: 塩害環境下にある RC 部材の各種劣化因子の変動が曲げ耐力の予測に与える影響に関する感度分析, コンクリート工学年次論文集, Vol.34, No.1, pp.880-885, 2012.
- 9) 田中伸幸, 内田慎哉, 鎌田敏郎, 関翔太: 塩害環境下にある RC 部材の曲げ耐力に関する劣化予測手法とその有効性の検証, コンクリート工学年次論文集, Vol.34, No.1, pp.886-891, 2012.
- 10) 貝戸清之, 小林潔司, 加藤俊昌, 生田紀子: 道路施設の巡回頻度と障害物発生リスク, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.1, pp.16-34, 2007.
- 11) Le Thanh NAM, 貝戸清之, 小林潔司, 起塚亮輔: ポアソン隠れマルコフ劣化ハザードモデルによる舗装劣化過程のモデル化, 土木学会論文集 F4 (建設マネジメント), Vol.68, No.2, pp.62-79, 2012.
- 12) 小林潔司, 貝戸清之, 江口利幸, 大井明, 起塚亮輔: 舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.67, No.4, pp.422-440, 2011.
- 13) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 14) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 15) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 16) Titterton, D. M., Smithe, A. F. M. and Makov, U. E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
- 17) Robert, C. P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
- 18) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2006.
- 19) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 20) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in: Bernardo, J. M., Berger, J. M., Dawid, A. P., and Smith, A. F. M. (eds.): *Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 21) Chib, S.: Marginal likelihood from Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 22) Newey, W. K. and West, K. D.: A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.

(平成 24 年 8 月 3 日 受付)