不完全代替利用者均衡下の 最適料金水準

池下　英典[1]・森杉　壽芳[2]・福田　敦[3]

[1]学生会員　日本大学大学院　理工学研究科社会交通工学専攻（〒274-8501 船橋市習志野台七丁目24-1）
E-mail: cshi11002@g.nihon-u.ac.jp

[2]正会員　日本大学教授　総合科学研究所（〒274-8501 船橋市習志野台七丁目24-1）
E-mail: morisugi.hisayoshi@nihon-u.ac.jp

[3]正会員　日本大学教授　理工学部社会交通工学科（〒274-8501 船橋市習志野台七丁目24-1）
E-mail:fukuda.atsushi@nihon-u.ac.jp

本稿では，多数のノードとリンクからなる交通ネットワークを対象とし，ルート間選択が不完全代替関係である効用関数を持つ利用者均衡下での社会的総余剰を最大化する最適なリンク混雑料金水準の公式を明示的に提示する．このため第１に予算および時間制約のもとで，いくつかのルート間選択が不完全代替である準線形効用を最大化する利用者行動を定式化する．第２に求められた均衡解は弾力的な交通需要を伴う確率的利用者均衡状態と一致することを示す．第３に利用者均衡時に達成される効用水準（間接効用水準）は確率均衡における最大効用の期待値に対応し，それは消費者余剰を示すことを示す．第４に利用者の消費者余剰と料金収入で示される生産者余剰の和で定義される社会的余剰を最大にするリンク料金水準を示す公式を導く．すべてのリンク料金を対象とする場合にも１つまたは複数のリンクの料金を対象とする場合にも，結果は単一ODで多数平行リンクの場合とまったく同じ結果となる．すなわち，前者の場合にはそのリンクの社会的限界費用と私的限界費用の差分（すなわち混雑外部性）として表現される．後者の場合には関連リンクへの影響を考慮する項が追加される．

Key Words : *optimal road pricing, user equilibrium, general transportation network, utility function*

1.　はじめに

交通ネットワーク均衡分析のモデルで用いられる目的関数は，経済学的意味を与えるのは難しいとされている．しかし，リンクに限界費用原理に従う料金が課せられている場合，経済学的意味を持つことは，明らかになっている．例えば，近年盛んに行われている交通混雑の解消等を目的とするロードプライシングなどの最適な道路料金水準を求める研究では，最適な水準の道路料金は，社会的限界費用マイナス私的限界費用の差分（混雑外部性）に一致するべきとされている．社会的限界費用は既に他の利用者が道路を走行している状況において，道路利用者が１単位だけ追加的に増したことによって総走行費用がどれだけ増加するかというその増分であるとしている（上田(2009)[1]）．実際，混雑現象を経済理論の立場から解釈すると，私的限界費用と社会的限界費用が乖離した状態を指し，その差に等しい額を混雑している道路の利用者に課すことで，社会的に最適な交通フローが実現されることは知られている[2]．そこで，限界費用原理に基づき，混雑課金や最適な道路料金水準についての研究が行われているが，未だその設定方法に関して多くの問題が残されているとされている[3][4]．特に次に示す複数の論文では，最適料金水準について詳細に検討が行われている．まずネットワーク均衡下の最適料金の設定に関する研究について，赤松・桑原(1988)[5]は，確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金の設定を，短期的な視点での最適化問題として，総走行時間の最小化を目的関数として，その場合の限界費用原理の一般化式を得ている．これに対して，Yang (1999)[6]は，消費者行動理論に基づく経済的便益を最大化する目的関数を示し，ロジット型確率的均衡配分下での限界費用原理が，最適混雑課金となることを示している．またYang et al. (2004)[7]は，需要関数が未知のときの交通ネットワークにおける限界費用課金について，試行錯誤する手法により求めている．一方文(2005)[8]は，等時間（費用）原則による利用者均衡を達成するような次善の混雑料金を，２地点を結ぶ道路が複数存在する状況で，一部の道路でのみ徴収するときのモデルを構築している．これらの論文では，道路交通の均

衡問題を明示し，限界費用原理が最適混雑料金となることを示しており，一般性と現実性を備えている．しかし，経済学的意味を持たないとされている目的関数を用いているため，簡明で理論的な検討に用いることが難しいと考えられる．

そこで本稿では，多数のノードとリンクからなる一般的な交通ネットワークを対象に，利用者均衡下での社会的総余剰を最大とする最適な道路料金水準を導出する．具体的には，既存の研究と対比しながら予算および時間制約のもとで，いくつかのルート間選択が不完全代替である効用関数を持つ利用者行動について，準線形効用を最大化するための定式化を行う．その上で，最適料金水準の公式を明示的に提示することを目的とする．

2. 問題の定式化に係る設定条件

本稿で設定する最適料金水準の設定に関する条件は，以下の通りである．

① 計画者は利用者に対して各リンクに“料金”を課することができる．

② 利用者は自己の効用を最大にするように経路交通量配分を行う．

③ 利用者は，自分の行動が交通混雑に影響しないと認識する．

④ リンク所要時間はリンク交通量に対して単調増加な凸な関数で表わされる．

⑤ 総需要（分布交通量）は限定しない．

以上の条件の下で，ネットワーク均衡状態での最適な料金水準の設定の方法について，定式化を行う．このため，まず利用者均衡の定式化を行い，次に社会的余剰を最大にする効率的なリンク混雑料金を求める定式化を行う．

3. 利用者均衡の定式化

(1) 交通利用者行動

交通利用者である消費者の効用関数Vは，次のように表す．

$$\max_{z,f_k^{rs},l} V = z + u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l \right) \tag{1}$$

ここで，zは合成財の消費，lは余暇時間，f_k^{rs}はrs間における経路kの交通量である．

次に予算制約と時間制約を式(2)，式(3)のように表す．

$$z + \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_k^{rs} f_k^{rs} = wL + y \tag{2}$$

$$l + \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} t_k^{rs}(\bar{f}) f_k^{rs} + L = T \tag{3}$$

ここで，P_k^{rs}はrs間における経路kの料金P，wは賃金率，Lは労働時間，yは資産所得，t_k^{rs}はrs間における経路kの所要時間（それは，経路交通量ベクトルfの関数としている），Tは総利用可能時間である．$\bar{f}$は，均衡時の経路交通量ベクトルで，交通利用者にとっては与件とみなしている．すなわち，自分の交通が他人の交通状況に影響を与えること無視していると仮定する．この取り扱いが外部性としての混雑を表現している．

以上に示した，式(2)，式(3)の制約条件のもとで余暇時間l，rs間における経路kの交通量であるf_k^{rs}についてまとめると式(5)が求まる．

$$z + \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_k^{rs} f_k^{rs} = w\left(T - l - \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} t_k^{rs}(\bar{f}) f_k^{rs} \right) + y \tag{4}$$

$$z + wl + \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left(P_k^{rs} + w t_k^{rs}(\bar{f}) \right) f_k^{rs} = wT + y \tag{5}$$

ここで，以下の条件が成り立つ．

$$P_k^{rs} = \sum_{a'} \delta_{a',k}^{rs} P_{a'} \tag{6.a}$$

$$t_k^{rs}(\bar{f}) = \sum_{a'} \delta_{a',k}^{rs} t_{a'}(\bar{x}_{a'}) \tag{6.b}$$

$$x_{a'} = \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs} \tag{6.c}$$

上述の式(5)について，式(6)より，式(7)に示すように展開することで，式(8)が導出できる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left(P_k^{rs} + w t_k^{rs}(\bar{f}) \right) f_k^{rs} \\
&= \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{a'} \delta_{a',k}^{rs} P_{a'} + w \sum_{a'} \delta_{a',k}^{rs} t_{a'}\left(\bar{x}_{a'}\right) \right) f_k^{rs} \\
&= \sum_{a'} \left(P_{a'} + w t_{a'}\left(\bar{x}_{a'}\right) \right) \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs} \\
&= \sum_{a'} \left(P_{a'} + w t_{a'}\left(\bar{x}_{a'}\right) \right) x_{a'}
\end{aligned} \tag{7}$$

上述の式(7)を式(5)に代入すると，下記の式(8)を得る．

$$z + wl + \sum_{a'} \left(P_{a'} + w t_{a'}(\bar{x}_{a'}) \right) x_{a'} = wT + y \tag{8}$$

このとき，a'はリンクaを含むすべてのリンク，$P_{a'}$はリンクa'の交通費用P，$t_{a'}$はリンクa'の所要時間t，$x_{a'}$はリンクa'の交通量xを表している．$\delta_{a',k}^{rs}$は，1のときは，ODペアrs間の経路kがはリンクa'を含むときとし，0のときは，そうでないときとしている．このとき，式(6.b)の$\bar{x}_{a'}$は，与件であるが，式(6.c)の$x_{a'}$は変数として取り扱う．

以上の条件より，需要関数と間接効用関数を得るために，式(1)についてラグランジェ未定乗数法を適用し，式(9)を得る．

$$\max_{z,f_k^{rs},l,\lambda} L = z + u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right)$$
$$+\lambda\left(wT + y - z - wl - \sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)x_a\right) \quad (9)$$
$$+\sum_{a'} \mu_{a'}\left(x_{a'} - \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs}\right)$$

このとき一階の必要条件は，式(10)に示す通りである．

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda = 0 \quad (10.a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right)}{\partial l} - \lambda w = 0 \quad (10.b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right)}{\partial f_k^{rs}} - \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mu_a \delta_{a,k}^{rs} = 0 \quad (10.c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_a} = -\lambda\left(P_a + t_a\left(\bar{x}_a\right)\right) + \mu_a = 0$$
$$\therefore \quad \mu_a = P_a + t_a\left(\bar{x}_a\right) \quad (10.d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = wT + y - z - wl - \sum_a \left(P_a + t_a\left(\bar{x}_a\right)\right)x_a = 0 \quad (10.e)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_a} = x_a - \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs} = 0 \quad (10.f)$$

ただし，$t_a\left(\bar{x}_a\right)$ の x_a は，他の交通量を含む全交通量を示し，個人から見ると与件である．

また，式(10.d)を式(10.c)に代入すると，式(10.g)を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} &= \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \sum_a \mu_a \delta_{a,k}^{rs} \\ &= \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \sum_a \delta_{a,k}^{rs}\left(P_a + wt_a(\bar{x}_a)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) = 0\end{aligned} \quad (10.g)$$

上述の一階の条件の式(10.g)と式(10.b)より，経路交通需要関数と余暇需要関数(11.a), (11.b)を得る．

$$f_k^{rs} = f_k^{rs}\left(1, w, P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) \quad (11.a)$$

$$l = l\left(1, w, P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) \quad (11.b)$$

ただし，式(11)における右辺の $P_k^{rs} + wt_k^{rs}(f)$ は，ベクトルであり，次式で定義する．

$$\begin{aligned}&P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f}) \\ &= \left(P_{k=1}^{rs=1} + wt_{k=1}^{rs=1}(\bar{f}), \cdots, P_{k=n(m)}^{rs=m} + wt_{k=n(m)}^{rs=m}(\bar{f})\right)\end{aligned}$$

式(11)を，式(5)に代入すると，

$$\begin{aligned}z &= wT + y \\ &- \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) f_k^{rs}\left(1, w, P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right)\end{aligned} \quad (12)$$

となる．この式(12)を式(1)に代入すると，式(13)に示す間接効用関数 V が求められる．

$$V = wT + y + v\left(1, w, P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) \quad (13)$$

一般的に，式(13)の間接効用関数 V に対して，式(14)のロアの定理が成立することが知られている．

$$-\frac{\partial V}{\partial\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right)} = f_k^{rs}\left(1, w, P_k^{rs} + wt_k^{rs}(\bar{f})\right) \quad (14)$$

以下は，最適料金水準を求めるときに利用する微係数を求めている．まず，

$$\frac{\partial V}{\partial P_a} = \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\right)} \frac{\partial\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\right)}{\partial P_a} \quad (15)$$

ロアの定理と式(14)より，

$$\frac{\partial V}{\partial\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\right)} = -f_k^{rs} \quad (16)$$

が得られる．また，式(6.a)より，

$$\frac{\partial P_k^{rs}}{\partial P_a} = \delta_{a,k}^{rs} 1 \quad (17)$$

が得られる．続いて，式(6.b)，式(6.c)より，限界時間費用 $w\partial t_k^{rs} \big/ \partial P_a$ は，

$$\begin{aligned}\frac{w\partial t_k^{rs}}{\partial P_a} &= w\sum_{a'} \delta_{a,k}^{rs} \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a} \\ &= w\left(\delta_{a,k}^{rs} \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial P_a} + \sum_{a' \neq a} \delta_{a',k}^{rs} \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}\right)\end{aligned} \quad (18)$$

となる．式(14)，式(17)，式(18)を式(15)に代入すると，

$$\frac{\partial V}{\partial P_a} = -\sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[\begin{aligned}&f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}\left(1 + w\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial P_a}\right) \\ &+ f_k^{rs}\left(w\sum_{a' \neq a} \delta_{a',k}^{rs} \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}\right)\end{aligned}\right] \quad (19)$$

が得られる．このとき，式(6.c)より，

$$-\sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} = -x_a$$

また，式(19)の右辺第２項は，

$$\begin{aligned}&\sum_{a' \neq a}\left(\sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs}\right) w \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a} \\ &= \sum_{a' \neq a} x_{a'} w \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}\end{aligned} \quad (20)$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial P_a} &= -x_a\left(1 + w\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial P_a}\right) \\ &- \sum_{a' \neq a} x_{a'}\left(w\frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}}\frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}\right)\end{aligned} \quad (21)$$

となることが分かる．

(2) 利用者均衡

均衡時には，外生的に与えた交通量$\bar{x}_a$ と $\bar{f}_k^{rs}$ が，利用者の交通行動 x_a と f_k^{rs} にそれぞれ等しくなる．この利用者均衡時を考慮して，等価な最適化問題，OD需要固定・ロジット型均衡配分との比較，分布配分統合型の需要変動・ロジット型の確率均衡を対象として，本稿で定式化した利用者行動について検証する．

a) 等価な最適化問題

均衡配分を行うための等価な最適化問題の目的関数は，間接効用関数V である必要がある．しかし，間接効用関数V は，交通量に影響を与える混雑の外部性を個々人の行動時には与件としている．混雑の外部性も直接制御する必要が生じる均衡配分計算においては，その必要条件を，式(10)に一致させるようにするために式(22)のような目的関数をおいている．この目的関数は，赤松ら(1988)[5]の式(7)の制約条件なしの最大化問題と等価であると考えることができる．

$$\begin{aligned}\max_{f_k^{rs},l} V' &= wT + y - wl \\ &- \sum_a \int_0^{x_a} \left(P_a + wt_a\left(x_a\right)\right) dx_a \\ &+ u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right)\end{aligned} \tag{22}$$

ただし，

$$P_k^{rs} + wt_k^{rs}(f) = \sum_{a'} \delta_{a',k}^{rs}\left(P_a + t_a\left(x_a\right)\right)$$

$$s.t. \quad x_{a'} = \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a',k}^{rs} f_k^{rs}$$

ラグランジェ関数を取り，その一階の条件を求めると

$$\begin{aligned}L &= wT + y - wl \\ &- \sum_a \int_0^{x_a} \left(P_a + wt_a(x_a)\right) dx_a \\ &+ u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right) \\ &+ \sum_a \mu_a \left(x_a - \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -w + \frac{\partial u}{\partial l} = 0, \quad w = \frac{\partial u}{\partial l} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_a} = -\left(P_a + wt_a(x_a)\right) + \mu_a = 0 \\ &\therefore \mu_a = P_a + wt_a(x_a) \\ &\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \sum_a \mu_a \delta_{a,k}^{rs} \\ &= \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \sum_a \delta_{a,k}^{rs}\left(P_a + wt_a(x_a)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} - \left(P^{rs}{}_k + wt^{rs}{}_k(f)\right) = 0\end{aligned} \tag{25}$$

このように，利用者行動の式(9)と最適化問題の必要条件である式(24)，式(25)が一致する．しかし，両者の目的関数は明らかに異なる．すなわち，利用者行動の目的関数では，

$$-\sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) x_a \tag{26.a}$$

であり，等価な最適化問題では，

$$-\sum_a \int_0^{x_a} \left(P_a + wt_a\left(x_a\right)\right) dx_a \tag{26.b}$$

となっている点である．これら式(26)の両者の値は明らかに異なる．前者は均衡時の平均費用に交通量を乗じた総費用を表し，後者は平均費用曲線を積分したものである．しかし，均衡交通量$\bar{x}_a$ における限界費用が一致していることがわかる．つまり，式(26.a)を用いた場合には，利用者の費用を示すが，式(26.b)を用いた場合には意味を持たなくなる．このため，従来均衡計算に使用されてきた定式化である等価な最適化問題は，理論分析では使用しない方が望ましい．むしろ，式(1)の効用関数を分析の対象とする方が理解しやすくなる．この意味で，式(1)の定式化は，理論分析には望ましいということができる．なお，この効用関数は逆需要関数で表現することも可能である．すなわち，式(24)，式(25)より，式(27)を導出できる．

$$\begin{aligned}&u\left(f_{k=1}^{rs=1}, f_{k=2}^{rs=1}, \cdots, f_{k=n(m)}^{rs=m}, l\right) \\ &= \oint \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial f_k^{rs}} df_k^{rs} + \frac{\partial u}{\partial l} dl \\ &= \oint \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\right) df_k^{rs} + wdl\end{aligned} \tag{27}$$

続いて，式(27)を式(9)に代入すると，式(28)が得られる．

$$\begin{aligned}\max_{f_k^{rs},l} V &= wT + y - wl \\ &- \sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) x_a \\ &+ \oint \sum_{rs=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}(f)\right) df_k^{rs} + wdl\end{aligned} \tag{28}$$

このとき $P_k^{rs} + wt_k^{rs}, w$ は，逆需要関数である．式(28)はYang (1999)[6]の定式化に対応する需要変動型確率均衡における等価な最適化目的関数を示している．ただし，第２項の総費用は利用者費用関数で置き換えている点を修正している．さらに，式(28)は逆需要関数から総費用を差し引いているので消費者余剰を示している．この点に関して円山琢也(2009)は，最適化料金時においては等価な目的関数の値が消費者余剰に一致すると述べている．一方式(28)の定式化は，均衡下ではいずれの料金水準であれ消費者余剰を示しているということができる．

b) OD需要固定・ロジット型均衡配分との比較

ここでは，以上の等価な最適化問題のロジット型均衡配分との比較を行う．まず，赤松（土木学会(1998)[10]の式(6.36)~(6.40)）に対応するように等価な最適化問題の目的関数である式(22)の部分効用 u を次式のように特定化する．

$$\begin{aligned}u &= u_1(l) + \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} H_{rs}\left(f^{rs}\right) \\ &= u_1(l) - \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\end{aligned} \tag{29}$$

さらに，需要固定条件である

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs}$$

を追加するとロジット型確率均衡経路交通量が得られる．このことを証明するために，下記の式(30)の解を求める．

$$\max_{l,x_a,f_k^{rs}} V=wT+y-wl$$
$$-\sum_a\left(P_a+wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)x_a \tag{30.a}$$
$$+u_1\left(l\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\sum_k\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}$$

$$s.t.\ q_{rs}=\sum_k f_k^{rs} \tag{30.b}$$

$$x_a=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs} \tag{30.c}$$

このとき，赤松（土木学会(1998)[10]の式(6.49)）に従い，ラグランジェ関数を下記式(31)の通り設定し，その一階の条件を求める．

$$\max_{l,x_a,f_k^{rs},\eta,\mu} L=wT+y-wl$$
$$-\sum_a\left(P_a+wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)x_a$$
$$+u_1\left(l\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\sum_k\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \tag{31}$$
$$+\sum_{rs}\eta_{rs}\left(q_{rs}-\sum_k f_k^{rs}\right)$$
$$+\sum_a\mu_a\left(x_a-\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l}=\frac{\partial u_1}{\partial l}-w=0,\quad l=l\left(w\right) \tag{32.a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=\frac{1}{\theta}\left(\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}+1\right)-\eta_{rs}-\sum_a\mu_a\delta_{a,k}^{rs}=0 \tag{32.b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_a}=-\left(P_a+wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)+\mu_a=0$$
$$\therefore\quad \mu_a=P_a+wt_a\left(\bar{x}_a\right) \tag{32.c}$$

式(32.c)を式(32.b)に代入すると，

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=-\frac{1}{\theta}\left(\ln f_k^{rs}+1-\ln q_{rs}\right)-\eta_{rs}$$
$$-\sum_a\left(P_a+wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)\delta_{a,k}^{rs}$$

が得られ，式(6)より，

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=-\frac{1}{\theta}\left(\ln f_k^{rs}+1-\ln q_{rs}\right)-\eta_{rs}$$
$$-\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)=0$$

$$\frac{1}{\theta}\ln f_k^{rs}=-\frac{1}{\theta}\left(1-\ln q_{rs}\right)-\eta_{rs}-\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)$$
$$\ln f_k^{rs}=\ln q_{rs}-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)-\left(1+\theta\eta_{rs}\right)$$

$$\therefore f_k^{rs}=q_{rs}\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)\exp\left(-\left(1+\theta\eta_{rs}\right)\right) \tag{32.d}$$

さらに，

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs}$$
$$=q_{rs}\exp\left(-\left(1+\theta\eta_{rs}\right)\right)\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)$$

より，

$$\exp\left(-\left(1+\theta\eta_{rs}\right)\right)=\frac{1}{\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)} \tag{32.e}$$

故に，式(32)より，均衡時には，$\bar{f}=f$ であるので，

$$f_k^{rs}=q_{rs}\frac{\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)}{\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)} \tag{33}$$

式(33)に示す，Logit 型経路交通量を導くことができる．式(33)は，赤松（土木学会(1998)[10]の式(6.48)）に等しい．

求めた式(33)を，式(30.c)に代入すると，均衡リンク交通量 x_a を求めることができる．また，間接効用関数は式(33)を式(28.a)に代入すればよい．実際，

$$\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}=\frac{\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)}{\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)}$$

のとき，式(31)の第６項は，

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\sum_k\left(\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\right)$$
$$=-\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\sum_k\left[\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\left(\begin{array}{l}-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\\-\ln\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)\end{array}\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\left[\begin{array}{l}\sum_k\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)\\-\sum_k\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)\end{array}\right]$$
$$=\frac{1}{\theta}\sum_{rs}\sum_k\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)f_k^{rs}$$
$$+\frac{1}{\theta}\sum_{rs}q_{rs}\ln\sum_k\exp\left(-\theta\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)$$

となる．故に，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} \sum_{k}\left(\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\right) \\
&=\sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) x_a \\
&\quad +\frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} \ln \sum_k \exp\left(-\theta\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{34}
$$

式(34)を式(28.a)に代入すると，

$$
\begin{aligned}
V &= wT + y - wl\left(w\right) + u_1\left(l\left(w_1\right)\right) \\
&\quad +\frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} \ln \sum_k \exp\left(-\theta\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\left(\bar{f}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{35}
$$

となる間接効用関数を得る．式(35)の右辺の最後の項は既知のログサムであり，ここでは，間接部分効用水準を示す．

c) 分布配分統合型の需要変動・ロジット型の確率均衡

分布配分統合型の需要変動・ロジット型確率均衡モデルは，朝倉（土木学会(1998)[10]の式(7.5.33)）に従い，式(36)に示す通り設定する．

$$
\begin{aligned}
\max_{x_a, f_k^{rs}, q_{rs}, O_r} \quad V &= wT + y - wl \\
&\quad -\sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) x_a + u_1\left(l\right) \\
&\quad -\sum_{rs} C_{rs} q_{rs} - \sum_r \left(C_r - R_r\right) O_r \\
&\quad -\frac{1}{\theta_1}\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln\left(f_k^{rs}/q_{rs}\right) \\
&\quad -\frac{1}{\theta_2}\sum_s\sum_r q_{rs} \ln\left(q_{rs}/O_r\right) \\
&\quad -\frac{1}{\theta_3}\sum_r O_r \ln\left(O_r/T_r\right)
\end{aligned} \tag{36.a}
$$

$$
s.t. \quad \sum_s q_{rs} = O_r \tag{36.b}
$$

$$
\sum_{rs} f_k^{rs} = q_{rs} \tag{36.c}
$$

$$
x_a = \sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \tag{36.d}
$$

ここで，C_{rs} は OD ペア rs 間における費用（定数）で，C_r は発生地 r においてトリップすることによる費用（定数），R_r はトリップしないことによる費用（定数）である．また O_r は発生地 r からの発生交通量で与件であり，T_r は発生地 r から発生しうる交通の上限である．式(36)のラグランジェ関数は，

$$
\begin{aligned}
\max_{l, x_a, f_k^{rs}, q_{rs}, O_r} \quad L &= wT + y - wl \\
&\quad -\sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) x_a - \sum_{rs} C_{rs} q_{rs} \\
&\quad -\sum_r \left(C_r - R_r\right) O_r + u_1\left(l\right) \\
&\quad -\frac{1}{\theta_1}\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln\left(f_k^{rs}/q_{rs}\right) \\
&\quad -\frac{1}{\theta_2}\sum_s\sum_r q_{rs} \ln\left(q_{rs}/O_r\right) \\
&\quad -\frac{1}{\theta_3}\sum_r O_r \ln\left(O_r/T_r\right) \\
&\quad +\sum_r \eta_r \left(O_r - \sum_s q_{rs}\right) \\
&\quad +\sum_{rs} \eta_{rs} \left(q_{rs} - \sum f_k^{rs}\right) \\
&\quad +\sum_a \mu_a \left(x_a - \sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}\right)
\end{aligned} \tag{37}
$$

となる．その一階の条件は，式(38)に示す通りとなる．

$$
\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial u_1}{\partial l} - w = 0, \quad l = l\left(w\right) \tag{38.a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_a} = -\left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right) + \mu_a = 0 \\
&\therefore \quad \mu_a = P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)
\end{aligned} \tag{38.b}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = -\frac{1}{\theta_1}\left(\ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} + 1\right) - \eta_{rs} - \sum_a \mu_a \delta_{a,k}^{rs} = 0 \tag{38.c}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial q_{rs}} = \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\left(\ln\left(\frac{q_{rs}}{O_r}\right) + 1\right) + \eta_{rs} - \eta_r - C_{rs} = 0 \tag{38.d}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial O_r} = \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_3}\left(\ln\left(\frac{O_r}{T_r}\right) + 1\right) + \eta_r - \left(C_r - R_r\right) = 0 \tag{38.e}
$$

このとき，式(38.c)に式(38.b)を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} &= -\frac{1}{\theta_1}\left(\ln f_k^{rs} + 1 - \ln q_{rs}\right) - \eta_{rs} \\
&\quad -\sum_a \left(P_a + wt_a\left(\bar{x}_a\right)\right)\delta_{a,k}^{rs}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} &= -\frac{1}{\theta_1}\ln f_k^{rs} - \frac{1}{\theta_1}\left(1 - \ln q_{rs}\right) - \eta_{rs} \\
&\quad -\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\left(f\right)\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\ln f_k^{rs} = \ln q_{rs} - \left(\theta_1\eta_{rs} + 1\right) - \theta_1\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\left(f\right)\right)
$$

$$
f_k^{rs} = q_{rs}\exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs} + wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)\exp\left(-\left(\theta_1\eta_{rs} + 1\right)\right) \tag{39}
$$

式(39)を経路 k について合計して，

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs}$$
$$=q_{rs}\exp\left(-\left(\theta_1\eta_{rs}+1\right)\right)\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)$$

であるから，

$$\exp\left(-\left(\theta_1\eta_{rs}+1\right)\right)=\frac{1}{\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)} \tag{40}$$

式(40)を式(39)に代入すると，

$$f_k^{rs}=q_{rs}\frac{\exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)}{\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)} \tag{41}$$

rs 間における経路 k の交通量である f_k^{rs} を求める式(41)が求まる．さらに，式(40)より，

$$-\left(\theta_1\eta_{rs}+1\right)=-\ln\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\eta_{rs}&=\frac{1}{\theta_1}\ln\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)\\&=-S_{rs}-\frac{1}{\theta_1}\end{aligned} \tag{42}$$

次に，式(38.d)より，

$$\frac{1}{\theta_2}\ln q_{rs}=-\frac{1}{\theta_2}\left(-\ln O_r+1\right)+\eta_{rs}-\eta_r-C_{rs}+\frac{1}{\theta_1}$$

$$\ln q_{rs}=\ln O_r-\theta_2\left(S_{rs}+C_{rs}\right)-\left(\theta_2\eta_r+1\right)$$

$$q_{rs}=O_r\exp\left(-\theta_2\left(S_{rs}+C_{rs}\right)\right)\exp\left(-\theta_2\eta_r-1\right)$$

が得られる．これを制約条件 $\sum_{rs} f_k^{rs}=q_{rs}$ に代入して整理すると，

$$q_{rs}=O_r\frac{\exp\left(-\theta_2\left(S_{rs}+C_{rs}\right)\right)}{\sum_s \exp\left(-\theta_2\left(S_{rs}+C_{rs}\right)\right)} \tag{43}$$

を得る．式(43)は，朝倉（土木学会(1998)[10]の式(7.5.40)）に等しい．同様に整理すると，

$$O_r=T_r\frac{\exp\left(-\theta_3\left(S_r+C_r\right)\right)}{\sum_r \exp\left(-\theta_3\left(S_r+C_r\right)\right)} \tag{44}$$

を得る．ただし，

$$S_r=-\frac{1}{\theta_3}\ln\left[\sum_s \exp\left(-\theta_3\left(S_{rs}+C_{rs}\right)\right)\right] \tag{45}$$

ここで，S_{rs} は OD ペア rs 間の経路選択に関する期待最小費用であり，S_r は発生地 r からの目的地選択に関する期待最小費用である．

最後に，式(41)，式(43)，式(44)を代入すると間接効用関数である式(46)を得ることができる．

$$\begin{aligned}V&=wT+y-wl\left(w\right)+u_1\left(l\left(w\right)\right)\\&+\frac{1}{\theta_1}\sum_{rs}\left[\ln\sum_k \exp\left(-\theta_1\left(P_k^{rs}+wt_k^{rs}\left(f\right)\right)\right)\right]\\&+\frac{1}{\theta_2}\sum_r\left[\ln\sum_s \exp\left(-\theta_2\left(C_{rs}+S_{rs}\right)\right)\right]\\&+\frac{1}{\theta_3}\ln\sum_r \exp\left(-\theta_3\left(C_r+S_r\right)\right)\end{aligned} \tag{46}$$

(3) 社会的厚生関数

社会的厚生関数は，利用者の消費者余剰である消費者の間接効用関数 V の式(13)と生産者余剰である料金収入で定義する．それは，式(47)に示す通りとなる．

$$W=V+\sum_a P_a x_a \tag{47}$$

ここでは，リンク a の料金を決定する問題として設定している．また，リンク a 以外のリンクの料金収入についても考慮する．

(4) リンクの混雑課金

a) 最善（ファーストベスト）の解

社会的厚生関数 W を最大にするリンク a の混雑課金の水準について最善（ファーストベスト）の解は，

$$\begin{aligned}dw&=\sum_a\frac{\partial W}{\partial P_a}dP_a\\&=\sum_a\left(\frac{\partial V}{\partial P_a}+\left(x_a+\sum_{a'}\left(P_{a'}\frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}\right)\right)\right)dP_a\\&=\sum_a\sum_{a'}\left(P_{a'}-w\frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}}x_{a'}\right)\frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}dP_a\\&=\sum_{a'}\left[\left(P_{a'}-w\frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}}x_{a'}\right)\left(\sum_a\frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}dP_a\right)\right]\\&=\sum_{a'}\left(P_{a'}-w\frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}}x_{a'}\right)dx_{a'}=0\end{aligned} \tag{48}$$

このとき，式(48)の３番目の等式は，式(15)から式(21)のように導くことができる．式(21)を式(48)の $\partial V/\partial P_a$ に代入することで，リンク a の混雑課金の水準 $P_{a'}$ は，式(49)に示す通り求めることができる．

$$\therefore\ P_{a'}=w\frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}}x_{a'} \tag{49}$$

本研究では，多数のリンク・ノードからなるネットワークを想定している．したがって，最適混雑料金はすべてのリンクにおける情報を必要とするように思われる．しかし，式(49)はそうではないことを示している．個別のリンクにおける最適料金は料金は，その個別リンクの交通量を観察し，所要時間が交通量に応じていかに変化

するかを推定（観察）すれば，最適な混雑料金を課すことができることを示している．すなわち，式(49)はもっとも単純な単一リンクの料金問題との解と一致していることを示している．

b) 次善（セカンドベスト）の解

この場合は，リンク a 以外の料金は何れかの水準に設定されており，リンク a の料金のみを最適化することを意味している．このとき，社会的厚生関数 W を最大にするリンク a の混雑課金の水準について次善（セカンドベスト）の解を，式(47)より求めると式(50)が得られる．

$$\frac{\partial W}{\partial P_a} = \frac{\partial V}{\partial P_a} + \left(x_a + \sum_{a'} P_{a'} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a} \right) = 0 \qquad (50)$$

式(50)の $\partial V / \partial P_a$ に式(21)を代入すると式(51)が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial P_a} &= -x_a \left(1 + w \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial P_a} \right) \\ &\quad - \sum_{a' \neq a} x_{a'} \left(w \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a} \right) \\ &\quad + \left(x_a + P_a \frac{\partial x_a}{\partial P_a} + \sum_{a' \neq a} P_{a'} \frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a} \right) = 0 \end{aligned} \qquad (51)$$

ゆえに，リンク a の混雑課金の水準 P_a は，式(52)に示す通り求めることができる．

$$\begin{aligned} P_a &= w \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} x_a \\ &\quad - \sum_{a' \neq a} x_{a'} \left(P_{a'} - w \frac{\partial t_{a'}(x_{a'})}{\partial x_{a'}} x_{a'} \right) \frac{\frac{\partial x_{a'}}{\partial P_a}}{\frac{\partial x_a}{\partial P_a}} \end{aligned} \qquad (52)$$

式(52)の右辺第２項は，他のすべてのリンク料金 $P_{a'}$ の社会的限界費用から乖離していることによって発生している歪みを少なくするようにリンク a の料金を高く（あるいは低く）している．この場合は，すべてのリンクにおける情報を必要とする．

4. まとめ

本稿では，ネットワーク均衡状態での最適な料金水準の設定の方法について，定式化を行った．まず，交通利用者である消費者の効用関数を設定し，需要関数と間接効用関数を導出した．この利用者行動を，利用者均衡時における，等価な最適化問題，OD需要固定・ロジット型均衡配分，分布配分統合型の需要変動・ロジット型の確率均衡を対象として，定式化した利用者行動を用いて導出できることが確認できた．ただし，本研究は混雑を外部性として利用者が与件として受け取りそれへの影響を与える効果は無視するものとするという仮定を置いている．この仮定を置いた取り扱いは，いわゆる等価最適化問題で定式化されている平均費用の積分という関数を設定する必要がなくその解釈も効用水準あるいは消費者余剰と解釈可能であることを示した．次に，この利用者均衡の定式化に基づき，最善，次善の解について，社会的余剰を最大にする効率的なリンク混雑料金水準を求める式を導出した．その結果，最善の場合は対象リンクの交通量に関してのみ，次善の場合は社会的限界費用から乖離していることによって発生している歪みを少なくするような料金水準を求めていることが分かった．

この静的な枠組みで提案されてきた限界費用の考え方について桑原（2002[11]，2007[12]）は，動的な渋滞現象を適切に表現することができていないとして，交通混雑の動学モデル化について検討を行っている．このような交通混雑の動学モデルに対する分析は盛んに行われている[13]とされ，動的限界費用を導出することで最適料金水準を求めることが，今後の課題であると考える．

参考文献

1) 上田孝行：高速道路料金変更政策の費用便益分析，運輸政策研究，Vol.12，No.3，pp.30-36，2009.
2) 山内弘隆，竹内健蔵：混雑税理論の展望—経済学の視点，土木学会論文集，第 449 号/IV-17，pp.17-26，1992.
3) 文世一，秋山孝正，奥嶋政嗣：道路ネットワークにおける次善の混雑料金—都市高速道路の役割に着目して—，応用地域学研究，No.12，pp.15-25，2007.
4) 円山琢也，原田昇，太田勝敏：Nested Logit 型確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金，土木計画学研究・論文集，Vol.20，pp.555-562，2003.
5) 赤松隆，桑原雅夫：確率利用者均衡条件下での最適混雑料金，土木学会論文集，第 389 号/IV-8，pp.121-129，1988.
6) Hai Yang: System Optimum, Stochastic User Equilibrium, and Optimal Link Tolls, Transportation Science, Vol. 33, No. 4, pp. 354–360, 1999.
7) Hai Yang, Qiang Meng and Der-Horng Lee : Trial-and-error implementation of marginal-cost pricing on networks in the absence of demand functi*ons, Transportation Research Part B*., Vol.38, No.6, pp.477-493, 2004.
8) 文世一：交通混雑の理論と政策，pp.157-172，東洋経済新報社，2005.
9) Hai Yang, Hai-jun Huang: Mathematical and Economic Theory of Road Pricing, Elsevier Science, 2005.
10) 土木学会：交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法-，pp.85-94，丸善，1998.
11) 桑原雅夫：動的な限界費用に関する理論的分析，土木学会論文集，第 709 号/IV-56，pp.127-138，2002.
12) Masao Kuwahara: A theory and implications on dynamic marginal cost, *Transportation Research Part A .*, Vol.41, No.7, pp.627-643, 2007.
13) 円山琢也：都市域における混雑課金の政策分析：レ

ビューと展望，土木計画学研究・論文集，Vol.26，
No.1，pp.15-32，2009.

（2012.?.？受付）

OPTIMAL ROAD PRICING UNDER IMPERFECT SUBSTITUTION USER EQUILIBRIUM IN THE GENERAL TRANSPORTATION NETWORK

Hidenori IKESHITA, Hisa MORISUGI and Atsushi FUKUDA

This paper discussed the optimal road pricing, which maximizing social surplus under user equilibrium with imperfectsubstitutionassumption for routes choice in a transportation network with many nodes and links. We formulate the user behavior as maximizing a quasi-linear utility with imperfect substitution between any routes under the constraint of budget and time. We show that resulting equilibrium corresponds to a stochastic user equilibrium with flexible transport demand. The social surplus is defined sum of indirect utility function as consumers' surplus and charge revenue as producer's surplus. The first best optimal congestion price level for a link equals to the difference of social marginal link cost from private marginal link cost ,which is exactly identical to simple OD pair with multi pararell links.