道路ネットワークにおける時間信頼性価値の推計法

内田　賢悦[1]

[1]正会員　北海道大学大学院　北方圏環境政策工学部門（〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目）
E-mail: uchida@eng.hokudai.ac.jp

本研究では，時間価値と移動時間信頼性の価値が内生的に決定される交通ネットワークモデルの構築を行う．すなわち，ミクロ経済学理論と整合的な時間価値・移動時間信頼性価値を内生化する需要変動型利用者均衡配分モデルを構築する．従来の所得近接法，選好近接法あるいは機会費用法に基づく推計法は，交通ネットワークモデルと理論的整合性がとれていなかった．本研究で構築する手法は，ミクロ経済理論との整合性のとれた時間価値・移動時間信頼性価値を内生化する交通ネットワークモデルと位置付けられる．本研究の基本的なアイディアは，はじめに，平均移動時間，移動時間信頼性および移動費用に関する制約条件を部分双対化によって交通均衡の目的関数内で表現し，需要変動型利用者均衡配分として問題の再定式化を行うことである．次に，それぞれの制約条件に関するシャドウプライスは均衡制約付き最適化問題を解いて求める．得られたシャドウプライスの比から，時間価値・移動時間信頼性価値は推計される．

Key Words : *value of travel time, value of travel time reliability, stochastic network model*

1. はじめに

本研究では，時間価値と移動時間信頼性の価値（以下，移動時間信頼性価値とする）が内生的に決定される交通ネットワークモデルの構築を行う．すなわち，ミクロ経済学理論と整合的な時間価値・移動時間信頼性価値を内生化する需要変動型利用者均衡配分モデルを構築する．たとえば，時間価値に関しては，所得近接法，選好近接法あるいは機会費用法などの推計法が挙げられるが，それらは交通ネットワークモデルと理論的整合性がとれていなかった．そのため，多くの課題が残されていたが，こうした課題の包括的解決に資するモデル構築をめざす．

2. 基本モデル

(1) 記号

本研究で使用する主な記号は以下の通りである．

N　ネットワーク上のノードの集合
A　ネットワーク上のリンクの集合
I　O-D ペアの集合
J_i　O-D ペア i 間の経路集合
δ_{aj}　リンク a が経路 j の一部であれば 1，それ以外のときに 0 をとる変数．
q_i　O-D ペア i 間の（確定的）交通需要
$\tilde{q}_i$　O-D ペア i 間の交通需要の推計値
f_{ij}　O-D ペア i 間の経路 j の（確定的）交通量
$\tilde{f}_{ij}$　O-D ペア i 間の経路 j の交通量の推計値
v_a　リンク a の（確定的）交通量
$\hat{v}_a$　リンク a の観測交通量
p_{ij}　O-D ペア i 間の交通需要が経路 j を選択する比率
C_a　リンク a の確率的交通容量
$t_a(\cdot)$　リンク a の移動時間関数
$\rho_a(\cdot)$　リンク a の移動費用関数
$\sigma_a^2(\cdot)$　リンク a の移動時間信頼性（分散）

(2) 定式化

ここでは，交通市場のみを対象とした基本モデルの定式化を行う．交通市場では，交通行動を起こすことによって得られる非飽和な効用関数が存在し，それらは OD 交通量の関数として与えられると考えることにする．また，最適な OD 交通量は，OD 間の平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性に関する制約条件の下，効用を最大化するように決定されると考える．以上の制約条件付き効用最大化問題は，式(1)-(4)で定式化できる．

$$\max u\left(q_1,\ldots,q_{|I|}\right) \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} t_i \cdot q_i \le \phi, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \rho_i \cdot q_i \le \pi, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \sigma_i^2 \cdot q_i \le \theta. \tag{4}$$

式(2)-(4)はそれぞれ，平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性に関する制約条件を表わしている．また，t_i，ρ_i およびσ_i^2 は，それぞれ OD ペア i の平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性に関する指標値であり，次章で定式化される．また，ϕ，π およびθ は観測または推計可能な定数である．

式(2)-(4)に関する最適なラグランジュ乗数をそれぞれλ^*, ω^*, γ^* とすると，時間価値および時間信頼性価値は，それぞれ式(5)，(6)で与えられる．

$$\tau = -\frac{\partial v / \partial \phi}{\partial v / \partial \pi} = \frac{\lambda^*}{\omega^*}, \tag{5}$$

$$\upsilon = -\frac{\partial v / \partial \theta}{\partial v / \partial \pi} = \frac{\gamma^*}{\omega^*}. \tag{6}$$

ここでvは間接効用関数である．

以上の形式的な定式化は，効用関数が特定化され，さらにt_i，ρ_i およびσ_i^2 が交通量に関わらず一定であるような場合には，簡単に解くことが可能であると考えられる．しかしながら，ネットワーク上のドライバーの交通行動を考えた場合，経路選択と平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性の関係が明示的に表現する必要があるため，簡単には解くことができない問題となっている点に注意が必要である．

3. ネットワーク問題への拡張

(1) 仮定

Fosgerau & Engelson (2011) に従い，本研究での移動時間信頼性は，移動時間の分散であると定義する．本研究では， O-D 交通量は確定的に与えられるものと考え，q_i と表現する．したがって，経路交通量は式(7)で表現される．

$$f_{ij} = p_{ij} \cdot q_i \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i. \tag{7}$$

確率的交通容量$C_a(a \in \mathrm{A})$ は，平均，分散がそれぞれ$E[C_a](a \in \mathrm{A})$， $\mathrm{var}[C_a]$で表現される互いに独立な正規分布に従うものとする．すなわち，$\mathrm{cov}[C_a, C_b] = 0\,(a \ne b \in \mathrm{A})$が成立する．

リンク交通量v_a と互いに独立な確率的リンク交通容量C_a を用いて，確率的経路移動時間は式(8)で表現される．

$$\Xi_{ij} = \sum_{a\in \mathrm{A}} t_a(v_a; C_a) \cdot \delta_{aj} \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i, \tag{8}$$

where

$$v_a = \sum_{i\in \mathrm{I}} \sum_{j \in \mathrm{J}_i} f_{ij} \cdot \delta_{aj} \;\; \forall a \in \mathrm{A}. \tag{9}$$

同様に，確率的経路移動費用は式(10)で表現される．

$$\Gamma_{ij} = \sum_{a\in \mathrm{A}} \rho_a(v_a; C_a) \cdot \delta_{aj} \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i. \tag{10}$$

式 (8)，(10) の平均は，それぞれ式(11)，(12)で与えられる．

$$E[\Xi_{ij}] = \sum_{a\in \mathrm{A}} t_a(v_a) \cdot \delta_{aj} \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i, \tag{11}$$

$$E[\Gamma_{ij}] = \sum_{a\in \mathrm{A}} \rho_a(v_a) \cdot \delta_{aj} \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i. \tag{12}$$

where

$$t_a(v_a) = E[t_a(v_a; C_a)] \;\; \forall a \in \mathrm{A}, \tag{13}$$

$$\rho_a(v_a) = E[\rho_a(v_a; C_a)] \;\; \forall a \in \mathrm{A}. \tag{14}$$

一方，経路移動時間の分散は式(15)で表現される．

$$\mathrm{var}[\Xi_{ij}] = \sum_{a\in \mathrm{A}} \sigma_a^2(v_a) \cdot \delta_{aj} \;\; \forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}_i, \tag{15}$$

where

$$\sigma_a^2(v_a) = \sigma_a^2(v_a; C_a) \;\; \forall a \in \mathrm{A}. \tag{16}$$

本研究では，$t_a(v_a)$，$\sigma_a^2(v_a)$，$\rho_a(v_a)$はすべてリンク交通量v_a に関する単調増加関数であると仮定する．

(2) 問題の定式化

定式化に先立ち，以下に示す3つの仮定を設けた．

A1. ネットワーク上のリンク交通量は計測可能である．

A2. 計測されたリンク交通量は，平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性に関する制約下におけるドライバーの効用最大化行動の結果として現れたものである．

A3. A2 で述べた 3 つの制約は，観測交通量から推計することができる．

私的限界費用に基づく経路選択行動を表現するため，それぞれ平均移動時間，平均移動費用および移動時間信頼性に関する式(17)-(19)に示す 3 つの仮想変数を導入する．

$$\hat{t}_a(v_a) = \frac{\int_0^{v_a} t_a(w)dw}{v_a}, \tag{17}$$

$$\hat{\rho}_a(v_a) = \frac{\int_0^{v_a} \rho_a(w)dw}{v_a}, \tag{18}$$

$$\hat{\sigma}_a^2(v_a) = \frac{\int_0^{v_a} \sigma_a^2(w)dw}{v_a}. \tag{19}$$

Nguyen (1984), LeBlank & Farhargian (1982), Hazelton (2000) または Hazelton (2001) などで提案されている方法を適用すると，A1 から得られる観測交通量 $\hat{v}_a \forall a \in \mathrm{A}$ から O-D 交通量の推計値 $\tilde{q}_i\ \forall i \in \mathrm{I}$ だけではなく，経路交通量の推計値 $\tilde{f}_{ij}\ \forall i, \forall j$ も得ることができる．そこで，$\tilde{q}_i\ \forall i \in \mathrm{I}$ は所与であると仮定し，以下に示す問題を考えよう．

[PP: primary problem]:

$$\max u(q_1,...,q_{|I|}) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{q_i} \frac{\alpha_i}{w+1}dw, \tag{20}$$

s.t.

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} t_i \cdot q_i \le \phi, \tag{21}$$

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \rho_i \cdot q_i \le \pi, \tag{22}$$

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \sigma_i^2 \cdot q_i \le \theta, \tag{23}$$

$$q_i + e_i = \breve{q}_i (> \tilde{q}_i)\ \forall i \in \mathrm{I}, \tag{24}$$

and (7) and (9), where

$$t_i = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} p_{ij}\cdot \hat{t}_a(v_a)\cdot \delta_{aj} = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} \frac{f_{ij}}{q_i}\cdot \hat{t}_a(v_a)\cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathrm{I}, \tag{25}$$

$$\rho_i = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} p_{ij}\cdot \hat{\rho}_a(v_a)\cdot \delta_{aj} = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} \frac{f_{ij}}{q_i}\cdot \hat{\rho}_a(v_a)\cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathrm{I}, \tag{26}$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} p_{ij}\cdot \hat{\sigma}_a^2(v_a)\cdot \delta_{aj} = \sum_{j\in \mathrm{J}_i}\sum_{a\in \mathrm{A}} \frac{f_{ij}}{q_i}\cdot \hat{\sigma}_a^2(v_a)\cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathrm{I}, \tag{27}$$

$$\phi = \sum_{a\in \mathrm{A}} \hat{t}_a(\hat{v}_a)\cdot \hat{v}_a, \tag{28}$$

$$\pi = \sum_{a\in \mathrm{A}} \hat{\rho}_a(\hat{v}_a)\cdot \hat{v}_a, \tag{29}$$

$$\theta = \sum_{a\in \mathrm{A}} \hat{\sigma}_a^2(\hat{v}_a)\cdot \hat{v}_a. \tag{30}$$

式(20)で表わされる目的関数は，ネットワーク上での効用関数と解釈することができる．なぜなら，目的関数は式(31)のように変換することができ，それはコブダグラス型効用関数と同形式となるからである．

$$\max u = \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{q_i} \frac{\alpha_i}{w+1}dw = \sum_{i\in \mathrm{I}} \alpha_i \cdot \ln(q_i+1). \tag{31}$$

式(31)では，O-D 交通量 q_i を代替財（以下では代替交通量とよぶ），$\alpha_i > 0$ は $\sum_i \alpha_i = 1$ となるパラメータと仮定している．仮定 A2 に従い，式(31)に示したネットワーク上の効用関数は，それぞれのドライバーの効用最大化行動から導くことができる．またパラメータ $\alpha_i > 0 \forall i$ の設定法も同様な議論を適用すると設定可能である．式(24)の $e_i (0 \le e_i < \breve{q}_i)$ は，超過需要（Gartner (1980)参照）であり，ネットワークに表れない需要交通量である．式(24)の $\breve{q}_i$ はそれぞれの O-D ペア i に与えられる定数であり，それらは想定される最大交通需要よりも大きな値をとる．t_i は，利用される経路の平均移動時間に関する指標値である．同様に ρ_i, σ_i^2 は，それぞれ利用される経路の平均移動費用，移動時間信頼性に関する指標値である．以下では説明の簡略化のため，t_i，ρ_i，σ_i^2 をそれぞれ O-D ペア i に関する平均移動時間，平均移動費用および平均移動時間信頼性と呼ぶことにする．仮定 A3 に従い，式(21)-(23)は観測リンク交通量から計算されている．式(7), (9), (24)の関係を除けば，PP は基本モデルと等価な問題構造を有していることがわかる．すなわち PP は，ネットワーク上での効用関数最大化問題に，平均移動時間，平均移動費用および平均移動時間信頼性に関する制約条件を付加した問題構造となっている．式(32)に示す経路交通量とリンク交通量の関係式を適用すると，式(21)-(23)に示した制約条件は，それぞれ式(33)-(35)として表現できる．

$$v_a = \sum_{i\in \mathrm{I}}\sum_{j\in \mathrm{J}_i} f_{ij}\cdot \delta_{aj}. \tag{32}$$

$$\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} t_a(w)dw \le \phi, \tag{33}$$

$$\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \rho_a(w)dw \le \pi, \tag{34}$$

$$\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \sigma_a^2(w)dw \le \theta. \tag{35}$$

式(33)-(35)の制約条件に関する部分双対化 (Lasdon (1970)) を行うことによって，PP を解くことにする．λ^*, ω^*, γ^* は，それぞれ式(33)-(35) に示した制約条件の最適ラグランジュ乗数を表わすものとする．PP は，制約条件(7), (9), (24)の下で，以下に示すラグランジュ関数を最小化する問題と等価となる．

$$\begin{aligned} L = \lambda^* \cdot \left(\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} t_a(w)dw - \phi \right) + \omega^* \cdot \left(\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \rho_a(w)dw - \pi \right) \\ + \gamma^* \cdot \left(\sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \sigma_a^2(w)dw - \theta \right) - \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{q_i} \frac{\alpha_i}{w+1}dw, \end{aligned} \tag{36}$$

上記の問題で定数項を無視すると，PP は以下に示

す問題に帰着する．

$$\min \widetilde{L} = \sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \chi_a(w)dw - \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{q_i} \frac{\alpha_i}{w+1}dw, \quad (37)$$

s.t. (17), (19) and (34) where

$$\chi_a(w) = \lambda^* \cdot t_a(w) + \omega^* \cdot \rho_a(w) + \gamma^* \cdot \sigma_a^2(w) \ \forall a \in \mathrm{A}. \quad (38)$$

後に示すように，$\chi_a(v_a)$はv_aに関する単調増加関数となるため，上記の最適化問題は，$\chi_a(v_a)$をリンクコスト，$\alpha_i/(q_i+1)$を逆需要関数とみなすことによって，需要変動型利用者均衡問題と等価な問題構造を有することがわかる．以下では，逆需要関数を$d_i^{-1}(\mathbf{q})$ where $\mathbf{q} = (q_1,...,q_i,...)^T$と表現することにする．式(37)右辺第2項は式(39)となる．

$$-\sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{q_i} d_i^{-1}(\mathbf{q})dw = -\sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{\breve{q}_i} \frac{\alpha_i}{w+1}dw + \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{e_i} \frac{\alpha_i}{\breve{q}_i - w + 1}dw$$
$$= const. - \alpha_i \cdot \left(\ln(\breve{q}_i - e_i + 1) - \ln(\breve{q}_i + 1)\right). \quad (39)$$

したがって PP は，以下に示す需要変動型均衡配分型問題と等価な問題に変換できる．

[UE-VD1: user equilibrium assignment with variable demand problem]:

$$\min \hat{L} = \sum_{a\in \mathrm{A}} \int_0^{v_a} \chi_a(w)dw + \sum_{i\in \mathrm{I}} \int_0^{e_i} \frac{\alpha_i}{\breve{q}_i - w + 1}dw, \quad (40)$$

s.t. (7), (9) and (24).

時間価値，時間信頼性価値はそれぞれ式(41)，(42)で与えられる点は，基本モデルと同様である．

$$\tau = \frac{\lambda^*}{\omega^*}, \quad (41)$$

$$\upsilon = \frac{\gamma^*}{\omega^*}. \quad (42)$$

PP と UE-VD は，もしラグランジュ関数Lがλ, ω, γに関して凹であれば，唯一の解をもつことが知られている．$-u$は凸関数であり，式(33)-(35) に示される制約条件は凸であることは明らかである．したがって鞍点定理より，ラグランジュ関数Lはλ, ω, γに関して凹となることがわかる．以上から，PP と UE-VD は唯一の解をもつが示された．また，式(33)-(35) に示される制約条件は不等式制約であるため，$\lambda^* \geq 0$, $\omega^* \geq 0$ and $\gamma^* \geq 0$となる．さらに$t_a(v_a)$, $\rho_a(v_a)$, $\sigma_a^2(v_a)$はリンク交通量v_aに関する単調増加関数であると仮定しているため，$\chi_a(v_a) \forall a \in \mathrm{A}$ もまたリンク交通量v_aに関する単調増加関数となることがわかる．したがって，最適なラグラジアン乗数λ^*, ω^*, γ^*が推計されると，UE-VD は，各 O-D ペアiのノード間を交通量，リンクコスト関数がそれぞれe_i，$\alpha_i/(\breve{q}_i - e_i + 1)$で与えられるダミーリンクによって結ぶことにより，利用者均衡問題のアルゴリズムによって容易に解くことができる．任意の実行可能なλ, ω, γに対応するラグラジアン関数の値（L），リンク交通量（$v_a(\forall a)$）および O-D 交通量ベクトル（$\mathbf{q}$）は，需要変動型利用者均衡配分問題のアルゴリズムを適用すると得ることができる．したがって，需要変動型利用者均衡問題と凸計画問題のアルゴリズムを組み合わせた解法を適用すれば，最適なラグランジュ乗数λ^*, ω^*, γ^*は推計可能である．

4. おわりに

交通ネットワークにおける移動者が曝されるリスクの1つとして移動時間の不確実性が挙げられる．そのため，移動時間信頼性の低い経路は移動者に選択されにくい傾向がある．交通施策によって移動時間信頼性が向上する場合，それを便益として計測することができる．その際，時間価値・移動時間信頼性価値が適切に推計されなければならない．利用者均衡配分モデルにおいて移動時間が内生的に決定されるのと同じように，時間価値・移動時間信頼性価値も内生的に決定できれば，別途それらを推計するための調査・分析が不要となる．それだけではなく，時間価値・移動時間信頼性価値の推計法と交通ネットワークモデルとで理論的整合性が確保されることになり，交通施策による便益推計に関わる多くの問題が解決されることが期待され，本研究は基礎研究の域は出ないが，その一助となるべく行われたものである．

参考文献

1) Fosgerau, M. and Engelson, L. (2011) The value of travel time variance, Transportation Research Part B, 45, 1–8.
2) Gartner, G. H. (1980) Optimal traffic assignment with elastic demands: A review part II, Transportation Science 14, 174-191.
3) Hazelton, M. (2000) Estimation of origin-destination matrices from link flows in uncongested networks. Transportation Research Part B, 34, 549-566.
4) Hazelton, M. (2001) Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction and reconstruction. Transportation Research Part B, 35, 667-676.
5) Lasdon, L. (1970) Optimization Theory for Large Systems, Macmillian, New York.
6) LeBlanc, L. J. and Farhargian, K. (1982) Selection of a trip table which reproduce observed link flows, Transportation Research, 16B, 83-88.
7) Nguyen, S. (1984) Estimating origin-destination matrices from observed flows, Transportation Planning Models (Ed. Florian, M.), 363-380.