

複数ボトルネックにネットワークにおける Many-to-Many ODの出発時刻選択問題

松田 一輝¹・桑原 雅夫²

¹非会員 東北大学 情報科学研究科 (〒980-8671 宮城県仙台市青葉区国分町三丁目7番1号)
E-mail:mattsun0214@gmail.com

²正会員 東北大学 情報科学研究科 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号09)
E-mail:kuwahara@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は、異なる個人属性を持つMany-to-ManyのOD需要が、複数のボトルネックと出発時刻を利用者均衡に従って選択するという、かなり一般性の高い既存研究について、その解の特性を分析したものである。井料らは、出発時刻選択問題を一般性のある条件下でLPとして定式しているが、FIFOというボトルネックでのサービス原理を考慮していないという問題がある。そこで本研究では、待ち行列の物理的な性質を定義するとともに、LPから得られる解が一定の条件のもとではこの物理的性質を満足することを明らかにした。

Key Words : 出発時刻, ボトルネック, Schedule費用, 待ち行列, 経路費用

1. 研究背景と目的

ボトルネックでは、道路の容量を利用者の需要が上回ることによって渋滞が発生する。その一つの原因が、ある狭い時間帯に需要が局所的に集中していることが挙げられる。この解消のためには、時刻に対して需要の平滑化が有効であるが、そのためには、利用者が出発時刻を決定するメカニズムを解析することが必要となる。

井料¹⁾らは、動的費用である渋滞による遅れ時間費用（ボトルネックにおいて発生する費用）と、Schedule費用（目的地に到着した時刻と希望到着時刻との差）および静的費用である経路費用を考えた問題について、Many-to-Many ODで、時間価値に個人差があり、ボトルネックも複数あるという一般性の高い定式化を提案している（ただし、各利用者はボトルネックを1回だけ通過するものとしている）。Schedule費用と経路費用の全利用者の総和を最小にする線形の最適化問題が、出発時刻選択問題の利用者均衡状態を与えることを証明している。しかし、この定式化では、ボトルネックのサービス原理であるFIFOを考慮しておらず、FIFOを考慮しないで得られた遅れ時間がどのような性質を持つかについての言及がない。そこで、FIFOを考慮しないで得られた解がどのような性質を持つのか、またどのような性質を持たなければいけないのかを明示し、ボトルネックにおける

渋滞時間が求まるかについて考察を行う。

2. 定式化とLagrange未定乗数法

図1に車両の累積図を、図2に一般的なSchedule費用を示す。

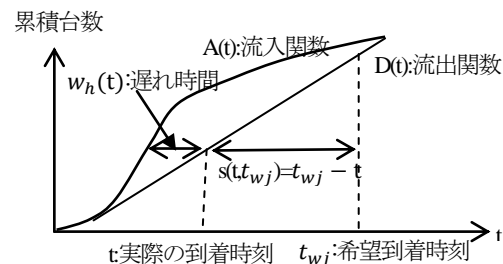


図-1 累積図

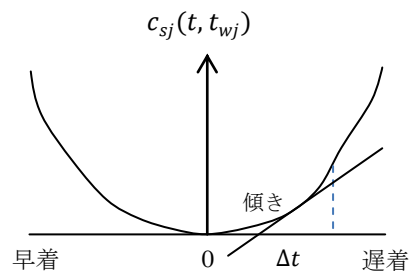


図-2 Schedule費用

$$\min S = \sum_{h=1}^H \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^m X_j(h, t) P_j(h, t, t_{wj}) \quad (1)$$

$$s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^m X_j(h, t) - \mu_h \cdot \Delta t \leq 0 \\ 1 - \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^m X_j(h, t) = 0 \\ -X_j(h, t) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

- j : 利用者属性, h : ボトルネック番号, t : 実際の到着時刻
 t_{wj} : 希望到着時刻, Δt : 離散時刻
 $P_j(h, t, t_{wj})$: 非ボトルネック費用
 $(= p_{sj}(t, t_{wj}) + r_j(h))$
 $p_{sj}(t, t_{wj})$: 時間単位Schedule費用
 $(= c_{sj}(t, t_{wj})/c_w(j))$
 $r_j(h)$: 時間単位経路費用
 $(= c_r(h)/c_w(j))$
 $c_{sj}(t, t_{wj})$: Schedule費用
 $c_r(h)$: ボトルネック h を選択するときの経路費用
 $c_w(j)$: ボトルネックでの遅れ時間に対する時間価値
 μ_h : ボトルネック容量
 $X_j(h, t)$: 属性 j の車両がボトルネック h を時刻 t に出発する台数

図1と図2のような車両の累積とSchedule費用の概念に基づいてモデルを構築した。目的関数は非ボトルネック費用総和最小化である（車両数 m , 時刻の分割 n , ボトルネック数 H ）。制約式は、ボトルネック h を時刻 t に出発する利用者を属性 j について和をとると、時間 Δt でのボトルネック容量を超えない容量制約、希望到着時刻 t_{wj} の利用者を全てのボトルネック、全てのボトルネックからの出発時刻で和をとると1になる需要制約、利用者数が負の値にならない非負条件の3式である。Kuhn-Tucker条件より2つの相補性条件を得る。

$$\begin{cases} \alpha_{h,t} \left(\sum_{j=1}^m X_j(h, t) - \mu_h \cdot \Delta t \right) = 0 \dots \text{相補性条件1} \\ \alpha_{h,t} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_j(h, t, t_{wj}) + \alpha_{h,t} - \beta_j) X_j(h, t) = 0 \\ P_j(h, t, t_{wj}) + \alpha_{h,t} - \beta_j \geq 0 \end{cases} \dots \text{相補性条件2}$$

また均衡条件は次の通りである。

$$\begin{cases} (P_j(h, t, t_{wj}) + w_h(t) - \beta_j) X_j(h, t) = 0 \\ P_j(h, t, t_{wj}) + w_h(t) - \beta_j \geq 0 \end{cases} \dots \text{均衡条件}$$

相補性条件2と均衡条件を比較すると、相補性条件2は利用者均衡を表していると言える。

3. 待ち行列が満たすべき物理的性質の考察

(1) ボトルネック容量が最大限使われていないとき待ち行列はできない

相補性条件1より、ボトルネック容量最大限使われていないときは待ち行列ができず、最大限使われているときは待ち行列ができる可能性があるという条件待ち時間 $\alpha_{h,t}$ が0となる。

(2) 待ち行列ができないとき、Schedule-Delayは0

相補性条件2より利用者がいるとき ($X_j(h, t) > 0$) , $P_j(h, t, t_{wj}) + \alpha_{h,t} = \beta_j$ なので、時刻 t で偏微分して整理すると、次の式が得られる。

$$\alpha_{h,t} = \int_{t_0}^t p'_{sj}\{s(t, t_{wj})\} dt \quad \text{for } X_j(h, t) > 0 \quad (3)$$

Schedule費用は、Schedule-Delayが0を基準に、単調増加・減少関数なので待ち行列がないとき、Schedule費用の傾きは0、つまりSchedule-Delayの値は0である。ここで、 t_0 は待ち行列が発生し始める時刻である

(3) FIFOを仮定した場合、累積流入曲線が負にならない

図1より、条件は $dt + w(t) \geq w(t + dt)$ なので、費用関数が線形の場合の最終的な条件は、

$$\frac{dw(h, t)}{dt} = \frac{d\alpha_{h,t}}{dt} = p'_{sj}\{s(t, t_{wj})\} \leq 1 \quad \forall j \quad (4)$$

待ち時間の増分より、時刻の増分が大きければよい。また、すべての個人属性において、待ち行列費用の時間価値（待ち時間が1単位変化したときの待ち行列費用の変化）が、Schedule費用のそれよりも大きければよいことになる。一般的に待ち時間の方がSchedule-Delayよりも時間価値が高いとされるので、この条件は成立する。また各時刻に対して図3のような、 $p'_{sj}\{s(h, t, t_{wj})\}$ との関係を求めることができる。

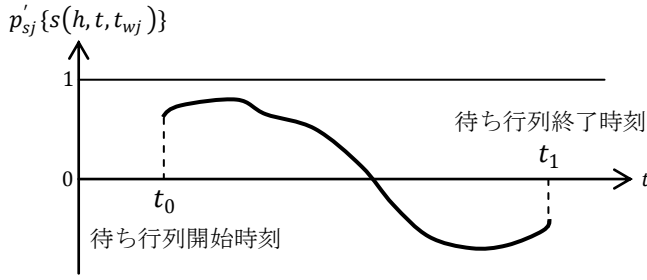


図3 一般的な $p'_{sj}\{s(h, t, t_{wj})\}$

また、一般的な費用（遅れ時間費用が線形でなくてもよい）を考えると、さきほどと同様に考えて、累積流入曲線が負にならないための条件は、待ち行列費用を p_{wj} とすると、次の式が得られる。

$$\frac{dw_h(t)}{dt} = \frac{p_{sj}'\{s(t, t_{wj})\}}{p_{wj}'\{\alpha_{h,t}\}} \leq 1 \quad \forall j \quad (5)$$

待ち行列費用の1単位あたりの増加分が、Schedule費用の1単位あたりの増加分以上であればよい。FIFOを考慮しないで得られた待ち時間 $\alpha_{h,t}$ はこれらの3つの条件を満たすので、待ち行列の物理的な性質を満たすことになる。

これまでの、費用関数を線形のものに限って議論してきた。しかし、費用が線形でない場合は次のようになる。

$$TC_j(h, t, t_{wj}) = f_{wj}\{w_h(t)\} + g_j(h, t, t_{wj}) \quad (6)$$

$$g_j(h, t, t_{wj}) = f_{sj}\{s(t, t_{wj})\} + f_{mj}\{m_j(h)\}$$

$f_{wj}\{w_h(t)\}$:属性jの待ち行列関数

$f_{sj}\{s(t, t_{wj})\}$:属性jのスケジュール費用関数

$f_{mj}\{m_j(h)\}$:属性jの移動費用関数

さきほどの相補性条件2と同様にして、

$$\begin{cases} \{g_j(h, t, t_{wj}) + \alpha_{h,t} - \beta_j\}X_j(h, t, t_{wj}) = 0 \\ g_j(h, t, t_{wj}) + \alpha_{h,t} - \beta_j \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

均衡条件と同様にして、

$$\begin{cases} \{g_j(h, t, t_{wj}) + f_{wj}(w_h(t)) - \beta_j\}X_j(h, t, t_{wj}) = 0 \\ g_j(h, t, t_{wj}) + f_{wj}(w_h(t)) - \beta_j \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

式(7), (8)より、

$$\alpha_{h,t} = f_{wj}(w_h(t)) \quad (9)$$

であることがわかる。待ち行列の物理的な性質 3.2 と同様にすると、

$$\frac{d\alpha_{h,t}}{dt} = f'_{sj}\{s(t, t_{wj})\} \quad (10)$$

式(4.4.12)より、次の式が成り立つ。

$$w_h(t) = f_{wj}^{-1}(\alpha_{h,t}) \quad (11)$$

$w_h(t)$ の変化量は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{dw_h(t)}{dt} &= \frac{df_{wj}^{-1}(\alpha_{h,t})}{dt} \\ &= \frac{f'_{sj}\{s(t, t_{wj})\}}{f'_{wj}\{\alpha_{h,t}\}} \end{aligned} \quad (12)$$

よって、費用関数が線形でないときは、 $f'_{wj}\{w_h(t)\} > f'_{sj}\{s(t, t_{wj})\}$ であれば、累積流入曲線の傾きは負にならない。

4. 累積流入関数の決定

最適化問題を解くことで得られた $X_j(h, t)$ と相補性条件1から、待ち行列ができる時刻(t_0)と待ち行列が終了する時刻(t_1)がわかる。また、属性jが選択する出発時刻 t も得られるので、 $p'_{sj}\{s(h, t, t_{wj})\}$ が求まり、さらに式(5)から $\alpha_{h,t}$ が求まる。すなわち、同ボトルネック同時刻に複数の利用者があるとき、 $\alpha_{h,t}$ は属性jに依存しないので、複数の利用者は同じ待ち時間を被ることになる。

5. 数値解析

ここでは、図4のような複数ボトルネックのネットワークについて解析する。

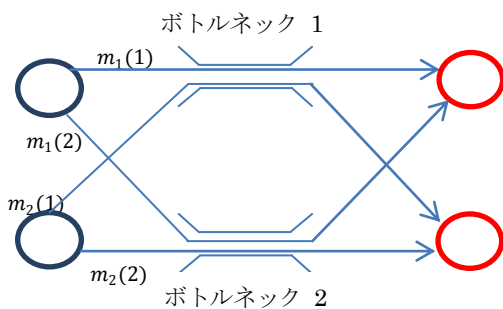


図4 複数ボトルネックの例

設定

- ①ボトルネックは2つ
 - ②車両数2
 - ③出発地点2ヶ所，目的地点2ヶ所
 - ④時刻の分割数は20
 - ⑤希望到着時刻は， $j = 1$ は時刻10， $j = 2$ は時刻10
 - ⑥どちらのボトルネック容量も Δt あたり0.25
 - ⑦スケジュールコストは次の通りである。
 - ⑧経路費用は次の通りである。
- $m_1(1) = 0, m_1(2) = 0, m_2(1) = 0, m_2(2) = 0$

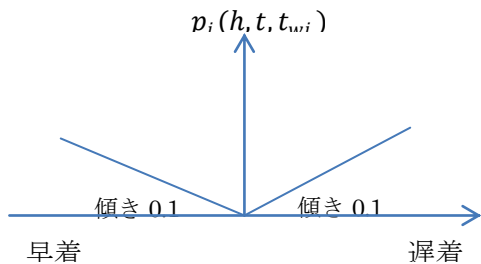


図5 スケジュールコスト

計算の結果， $X_j(h, t)$ は次の通りである。

ボトルネック 1			
時刻	車両 1	車両 2	合計
1~7	0	0	0
8	0.0625	0.0625	0.125
9	0.125	0.125	0.25
10	0.125	0.125	0.25
11	0.125	0.125	0.25
12	0.0625	0.0625	0.125
13~20	0	0	0
合計	0.5	0.5	1
ボトルネック 2			
時刻	車両 1	車両 2	合計
1~7	0	0	0
8	0.0625	0.0625	0.125
9	0.125	0.125	0.25
10	0.125	0.125	0.25

11	0.125	0.125	0.25
12	0.0625	0.0625	0.125
13~20	0	0	0
合計	0.5	0.5	1

・ボトルネック 1の待ち行列について

$$\begin{cases} \alpha_{1,8} = 0 \\ \alpha_{1,9} = 0.1 \\ \alpha_{1,10} = 0.2 \\ \alpha_{1,11} = 0.1 \\ \alpha_{1,12} = 0 \end{cases}$$

・ボトルネック 2の待ち行列について

$$\begin{cases} \alpha_{2,8} = 0 \\ \alpha_{2,9} = 0.1 \\ \alpha_{2,10} = 0.2 \\ \alpha_{2,11} = 0.1 \\ \alpha_{2,12} = 0 \end{cases}$$

これらより，累積流入曲線と累積流出曲線を描くと次の図6と図7ようになる。

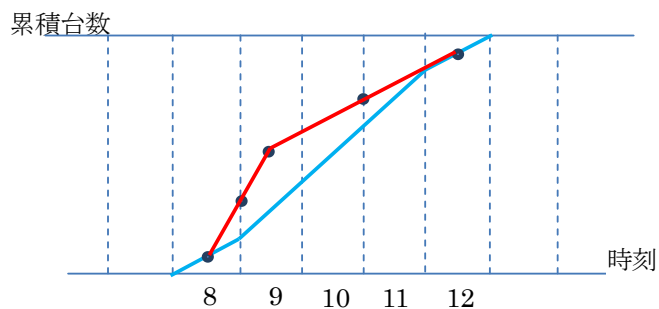


図6 ボトルネック1の累積図

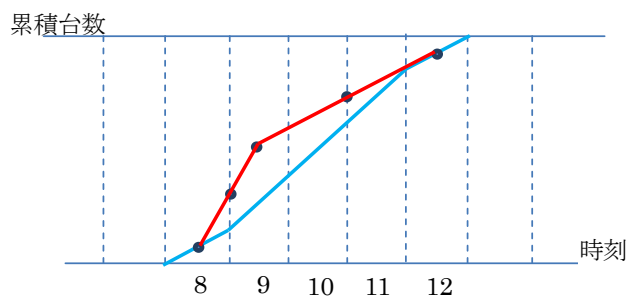


図7 ボトルネック2の累積図

5. 結論と今後の課題

井料らのMany-to-Many ODで，時間価値に個人差があ

り、ボトルネックも複数あるという一般性の高い定式化について、FIFOを考慮していない線形最適化問題から得られる解が、待ち行列の物理的性質を満たすかどうかの検討を行った。本研究の成果は次の通りである。

- ①最適化問題が均衡条件を満たすことをLagrangianで証明したこと、
- ②待ち行列の物理的性質を満たす条件を明らかにしたこと、
- ③それを例題で確かめたこと、
- ④より一般的な費用関数へと、多少の拡張を行ったこと。

今後の課題としては、解の唯一性についての検討を行うこと、ボトルネックを複数回通過できるより一般性の高い問題に拡張することなどが挙げられる。

参考文献

- 1) 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫: 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的分析, 土木学会論文集, 779/IV-66: pp. 105-118.2005.

(2012.5.7 受付)

DEPARTURE TIME CHOICE FOR A MANY-TO-MANY OD PATTERN ON A NETWORK WITH TWO OR MORE BOTTLENECKS

Kazuki MATSUDA and Masao KUWAHARA